Ukázka zadání zkoušky z G2
LS 2022/23

Početní část

1. Určete povrch části zeměkoule (kterou pro zjednodušení považujeme za kouli o poloměru R) vymezený poledníky $0°$ a $30°$ východní délky a rovnoběžkami $45°$ a $60°$ severní šířky.

2. Je dána množina
$$S := \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \leq r^2,\ y + z = 0\}.$$
   (a) Ukažte, že S je 2-plocha s krajem.

   (b) Vnitřek plochy S je orientován normálovým vektorem n s vlastností $\langle n, e_3 \rangle > 0$. Popište kraj plochy ∂S a jeho indukovanou orientaci.

   (c) Spočtěte pomocí Stokesovy věty
$$\int_{\partial S} (x - y)dz + (y - z)dx + (z - x)dy.$$

3. Je dána funkce
$$\varphi : (u, v) \mapsto (u, v, u^2 - v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$
   (a) Ukažte, že φ je mapa.

   (b) Najděte první a druhou fundamentální formu a normálu plochy $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ v obecném bodě.

   (c) Najděte hlavní křivosti plochy v bodě $u = v = 1$.

90 minut

maximálně 10 bodů za každý příklad, požadované minimum je 15 bodů celkem

Teoretická část

1. Definujte k-plochu a zobecněnou k-plochu v $\mathbb{R}^n$.
2. Definujte druhou fundamentální formu plochy v $\mathbb{R}^3$ a ukažte, že je symetrická.
3. Vyslovte a dokažte větu o vlastnostech de Rhamova diferenciálu $d\omega$ diferenciální formy $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$.
4. Rozhodněte, zda platí (dokažte nebo vyvraťte): Jsou-li $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ k-mapa a $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ l-mapa, pak

$$\Phi : (u, v) \mapsto (\varphi(u), \psi(v)), \quad (u, v) \in U \times V$$

   je $(k + l)$-mapa v $\mathbb{R}^{m+n}$?

60 minut

Bodování: maxima 5/7/10/8 bodů, požadováno minimálně 15 bodů celkem.

Výsledná známka: 50-60 bodů: **1**, 40-49 bodů: **2**, 30-39 bodů: **3**