Zápočtový test, 4.12.2023

1. Ukažte, že funkce
$$F(a) := \int_0^1 \frac{|\log x|^a}{\sqrt{x}}\, dx$$
je spojitá na intervalu $(-1, \infty)$.

2. Vyjádřete následující integrál jako číselnou řadu:
$$\int_0^1 \log x \, \log(1+x)\, dx.$$

3. Spočtěte Lebesgueovu míru množiny
$$\{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 < 2x, \, x < z < 4\}.$$
Nápověda: Můžete použít polární souřadnice.

Řešení

1. Funkce $f(x,a) = \frac{|\log x|^a}{\sqrt{x}}$ je zrejme spojita na $(0,1)\times(-1,\infty)$. Uvazujme $-1 < p < q < \infty$ a funkci
$$g(x) = \begin{cases} \frac{|\log x|^q}{\sqrt{x}}, & x \in (0, e^{-1}], \\ \frac{|\log x|^p}{\sqrt{x}}, & x \in (e^{-1}, 1). \end{cases}$$
Pro kazde $a \in [p,q] \subset (0,\infty)$ a $x \in (0,1)$ zrejme plati $|f(x,a)| \le g(x)$. Protoze
$$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)}{x^{-\frac{3}{4}}} = \lim_{x\to 0+} |\log x|^q x^{\frac{1}{4}} = 0$$
a
$$\lim_{x\to 1-} \frac{g(x)}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 1-} |\log x|^p (1-x)^{\frac{1}{2}} = \lim_{y\to 0+} |\log(1-y)|^p \sqrt{y} = 0,$$
plati $g \in \mathcal{L}^1$. Podle Lebesgueovy vety je tedy F spojita na (p,q). Protoze p,q byly zvolena libovolne, je F spojita na $(-1,\infty)$.

2. Pro $x \in (0,1)$ mame $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Oznacme $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \log x$. Pomoci per partes spocteme
$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}.$$
Protoze $f_n(x)$ je na $(0,1)$ bud vsude kladna, nebo vsude zaporna, mame
$$\sum_n \int_0^1 |f_n(x)|dx = \sum_n \frac{1}{n(n+1)^2} < \infty,$$
a muzeme tedy v nasledujicim vypoctu zamenit sumu a integral:
$$\int_0^1 \log x \log(1+x)dx = \int_0^1 \sum_n f_n(x)dx = \sum_n \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_n \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}.$$

3. Oznacme danou mnozinu jako A. Podle Fubiniho vety mame
$$\lambda^3(A) = \int_{x^2+y^2<2x} \lambda^1(\{z : x < z < 4\})d(x,y) = \int_{x^2+y^2<2x} (4-x)d(x,y)$$
V polarnich souradnicich dale mame
$$\begin{aligned} \lambda^3(A) &= \int_{r<2\cos t} r(4 - r\cos t)d(r,t) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{2\cos t} (4r - r^2\cos t)dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8\cos^2 t - \frac{8}{3}\cos^4 t)dt \\ &= 4\pi - \pi \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Zápočtový test, 5.12.2023

1. Ukažte, že funkce
$$F(a) := \int_1^\infty \frac{|\log x|^a}{x^2} dx$$
je spojitá na intervalu $(-1, \infty)$.

2. Vyjádřete následující integrál jako číselnou řadu:
$$\int_0^1 \log x \, \log(1-x) \, dx.$$

3. Spočtěte
$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-2x}}{xe^x} \sin x \, dx.$$
Nápověda: Uvažujte obecnější integrál $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} \sin x \, dx$.

Řešení

1. Funkce $f(x,a) = \frac{|\log x|^a}{x^2}$ je zrejme spojita na $(1,\infty)\times(-1,\infty)$. Uvazujme $-1 < p < q < \infty$ a funkci
$$g(x) = \begin{cases} \frac{|\log x|^p}{x^2}, & x \in (1,e], \\ \frac{|\log x|^q}{x^2}, & x \in (e,\infty). \end{cases}$$
Pro kazde $a \in [p,q] \subset (0,\infty)$ a $x \in (0,1)$ zrejme plati $|f(x,a)| \le g(x)$. Protoze
$$\lim_{x\to 1+} \frac{g(x)}{(x-1)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 1+} |\log x|^p (x-1)^{\frac{1}{2}} = \lim_{y\to 0+} |\log(1+y)|^p \sqrt{y} = 0$$
a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{|\log x|^q}{\sqrt{x}} = 0,$$
plati $g \in \mathcal{L}^1$. Podle Lebesgueovy vety je tedy F spojita na (p,q). Protoze p,q byly zvolena libovolne, je F spojita na $(-1,\infty)$.

2. Pro $x \in (0,1)$ mame $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Oznacme $f_n(x) = -\frac{x^n}{n}\log x$. Pomoci per partes spocteme
$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n(n+1)^2}.$$
Protoze $f_n(x)$ je na $(0,1)$ vsude kladna, mame
$$\sum_n \int_0^1 |f_n(x)|dx = \sum_n \frac{1}{n(n+1)^2} < \infty,$$
a muzeme tedy v nasledujicim vypoctu zamenit sumu a integral:
$$\int_0^1 \log x \log(1-x)dx = \int_0^1 \sum_n f_n(x)dx = \sum_n \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_n \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

3. Funkce
$$f(x,a) = \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\sin x, \quad x \in (0,\infty), a \in (-\tfrac{1}{4}, 3)$$
je zrejme hladka v obou argumentech. Pro kazde $a \in (-\frac{1}{4},3)$ plati $\lim_{x\to 0^+} f(a,x) = 0$ a zaroven $|f(x,a)| \le e^{-x}$, $x > 2$, a existuje tedy integral
$$F(a) = \int_0^\infty f(x,a)dx.$$
Spocteme $\frac{d}{da}f(x,a) = e^{-(a+1)x}\sin x$. Protoze $|\frac{d}{da}f(x,a)| \le e^{-\frac{x}{2}} \in \mathcal{L}^1$, muzeme podle vety o zamene integralu a derivace psat
$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\sin x dx \\ &= 1-(a+1)\int_0^\infty e^{-(a+1)x}\cos x dx \\ &= 1-(a+1)^2\int_0^\infty e^{-(a+1)x}\sin x dx \\ &= 1-(a+1)^2 F'(a). \end{aligned}$$
Odtud s pouzitim $F(0)=0$ snadno dostaneme $F(a) = \arctan(a+1) - \frac{\pi}{4}$. Specialne pro $a=2$, dostavame, ze hledany integral je $\arctan(3) - \frac{\pi}{4}$.