Lineární algebra pro fyziky

Zápisky z přednášek

Dalibor Šmíd

4. ledna 2011

Úvod

První verze těchto zápisků z přednášky vznikla v zimním semestru 2009/2010. Mnoho chyb a překlepů se podařilo odchytit pozorným čtenářům z řad tehdejších posluchačů. K těm, které zůstaly, nevyhnutelně přibudou další vzniklé při úpravách na míru letošní přednášky. Pokud na takové narazíte, budu vděčný, když mi dáte vědět.

Každá kapitola zápisků odpovídá jedné přednášce. Neznamená to, že na přednášce odvykládám přesně to, co je v zápiskách. Pro přípravu ke zkoušce jsou směrodatné tyto zápisky, přičemž partie, které jdou nad rámec zkoušky, budu označovat jako bonusové.

Za každou kapitolou najdete několik (většinou neřešených) cvičení. Abych vám usnadnil orientaci, roztřídil jsem je do několika kategorií: **(4)**,**(3)**,**(2)**,**(1)**, podle obtížnosti od nejnižší po nejvyšší. Číslování zhruba odpovídá klasifikaci u zkoušky - obtížnost 4 jsou zcela elementární úlohy, obtížnost 3 by měl zvládnout aspirant na trojku, atd. Pro cvičení s obtížností vyšší než by odpovídala první kategorii zavádím označení **(HC)** (což můžete interpretovat dle vaších lingvistických a jiných sklonů buď jako „hors catégorie“, nebo jako „hard core“). Doposud jsou úlohy ve spíše nahodilém pořadí, budu se jim snažit vtisknout nějakou logiku, jak bude přednáška postupovat.

V prvním semestru lineární algebry je poměrně málo volnosti co do volby a řazení témat. V rámci tohoto manévrovacího prostoru jsem se snažil o to, aby ve chvíli zavedení nějaké abstraktní definice měl čtenář vždy po ruce nějaký její konkrétní příklad, který si už dříve stihl trochu ohmatat. Aby při definici abstraktního vektorového prostoru už měl něco spočítáno v rámci jeho nejčastějšího příkladu $\mathbb{R}^n$ nebo aby při zavedení lineárního zobrazení už uměl zacházet s maticemi. Nevýhodou tohoto postupu je, že mnohé definice a tvrzení nejsou hned od začátku zavedeny ve své nejčistší a nejobecnější formě a čtenář musí průběžně zasazovat to, co už ví, do nových kontextů. Příkladem budiž třeba množina řešení homogenní soustavy rovnic, kterou je možné chápat jako řešení maticové rovnice, jako vektorový podprostor, jako jádro lineárního zobrazení či jako ortogonální doplněk množiny vektorů. Všechny tyto interpretace jsou důležité a v jistém smyslu rovnocenné, ale není možné učit se tyto soustavy řešit až poté, co člověk porozumí všem jejich převlekům.

Kapitola 1

Soustavy lineárních rovnic

Lineární rovnicí s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \text{ zkráceně } \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

kde **koeficienty** $a_j, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a **pravá strana** b jsou zadaná reálná nebo komplexní čísla a řešení hledáme také v $\mathbb{R}$, respektive v $\mathbb{C}$. Pokud je rovnic více, řekněme m, mluvíme o **soustavě lineárních rovnic**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Každá n-tice čísel $(x_1, \ldots, x_n)$, která splňuje všech m rovnic, je **řešením soustavy rovnic**. Naším úkolem je najít a popsat všechna řešení.

Zapišme si nyní důležitá data úlohy do následující přehledné tabulky:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Každý řádek zde odpovídá jedné rovnici, vlastně jsme jen vynechali symboly, které se ve všech rovnicích opakují: znaménka $+$, $=$ a neznámé x_i. Tato tabulka se nazývá **rozšířenou maticí soustavy**, její část nalevo od svislé čáry je **matice soustavy** a část napravo **pravá strana**. Jsou-li všechna čísla

b_i nulová, mluvíme o **homogenní** soustavě rovnic, jinak je soustava **nehomogenní**. Občas budeme používat zkrácený zápis rozšířené matice soustavy $(A|b)$.

Naše strategie bude nyní jednoduchá. Nejprve ukážeme, že určité úpravy rozšířené matice soustavy zachovávají množinu všech řešení. Poté se naučíme vyřešit soustavy, jejichž rozšířená matice má určitý speciální tvar. Nakonec popíšeme algoritmus, jak úpravami převést rozšířenou matici soustavy na tento speciální tvar.

Definice 1. Řekneme, že matice A' vznikne z matice A **elementární úpravou**, pokud A' vznikla z A buď

1. vynásobením některého řádku nenulovým číslem, nebo
2. tak, že k nějakému řádku A byl přičten libovolný násobek jiného řádku A, nebo
3. změnou pořadí řádků, nebo
4. doplněním nebo vynecháním řádku obsahujícího pouze nuly.

Je hned vidět, že pokud A' vznikne z A elementární úpravou, pak také A vznikne z A' elementární úpravou, jedná se tedy o symetrickou relaci. Je to také relace reflexivní, protože A vznikne z A elementární úpravou. Je to relace ekvivalence? A je ekvivalencí relace "vzniknout konečnou posloupností elementárních úprav"? Všimněte si také, že pokud bychom v prvním typu úpravy vynechali slovo "nenulovým"nebo ve druhém typu slovo "jiného", relace by už symetrická nebyla - najděte vhodný příklad!

Lemma 1. *Pokud rozšířená matice* $(A'|b')$ *vznikne z rozšířené matice* $(A|b)$ *elementární úpravou, pak mají příslušné soustavy rovnic stejnou množinu řešení.*

Důkaz. Potřebujeme ověřit, že každé řešení soustavy s rozšířenou maticí $(A|b)$ je zároveň řešením soustavy s rozšířenou maticí $(A'|b')$, a naopak, že každé řešení soustavy $(A'|b')$ je řešením soustavy $(A|b)$. Ve skutečnosti nám ale stačí jen jeden směr, protože "vzniknout elementární úpravou"je symetrická relace. Předpokládejme tedy, že n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vyhovuje rovnicím

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Pokud A' vznikne z A vynásobením k-tého řádku číslem $r \neq 0$, vidíme, že rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} r a_{kj} x_j = r b_k$$

je také splněna a ostatní rovnice se nezměnily, tedy

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i$$

pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Podobně pokud A' vznikne přičtením s-násobku l-tého řádku do k-tého řádku, pak k-tá rovnice soustavy $(A'|b')$

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} + s a_{lj}) x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + s \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j = b_k + s b_l = b'_k$$

je splněna a ostatní rovnice zůstaly opět beze změn.

Změna pořadí rovnic samozřejmě množinu řešení nemění a nulové řádky odpovídají rovnicím splněným pro libovolnou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které tím pádem můžeme přidávat i ubírat bez omezení. $\square$

Podívejme se nyní na konkrétní soustavu rovnic (nad $\mathbb{R}$) s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Poslední řádek matice vyjadřuje rovnici $x_5 - 2x_6 = 4$. Její řešení je jednoduché: k libovolně zvolené hodnotě neznámé x_6 lze dopočítat hodnotu x_5 (a naopak). Pokud tedy zvolíme x_6 **volnou neznámou**, má poslední rovnice řešení $x_5 = 4 + 2x_6, x_6 \in \mathbb{R}$ (a samozřejmě x_1 až x_4 mohou být libovolné). Dosaďme toto řešení do předchozí rovnice $2x_2 + 6x_3 - 2x_4 - x_5 - 4x_6 = 0$, po úpravě získáme

$$x_2 = 2 - 3x_3 + x_4 + 3x_6$$

Vidíme, že můžeme přidat k volným neznámým x_3 a x_4, dopočítat x_2 a získat tak všechna řešení třetí rovnice, která jsou zároveň řešením rovnice druhé. Nakonec dosadíme do rovnice první a zjistíme, že

$$x_1 = 9 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_6$$

Žádná další možnost volby se neobjevila, hodnoty volných neznámých x_3, x_4 a x_6 určují i hodnotu neznámé x_1. Množina řešení této soustavy tří rovnic tedy je

$$\{(9 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_6, 2 - 3x_3 + x_4 + 3x_6, x_3, x_4, 4 + 2x_6, x_6)|x_3, x_4, x_6 \in \mathbb{R}\}$$

Tento zápis označuje množinu v $\mathbb{R}^6$ parametrizovanou třemi proměnnými x_3, x_4 a x_6. Přehlednější zápis téhož je

$$\{(9, 2, 0, 0, 4, 0)+r(2, -3, 1, 0, 0, 0)+s(2, 1, 0, 1, 0, 0)+t(3, 3, 0, 0, 2, 1)|r, s, t \in \mathbb{R}\},$$

potřebujeme k němu jen definovat násobení n-tice číslem a sčítání n-tic tím nejpřirozenějším způsobem, tedy po složkách. Zvolili jsme také nové označení parametrů odlišné od označení neznámých.

Řešení této soustavy jsme nalezli tak snadno proto, že ne všechny rovnice obsahovaly všechny neznámé. Nulové koeficienty v levé spodní části matice umožňují postupně dosazovat řešení odspodu matice. Pro matice tohoto typu si zavedeme dva nové pojmy:

Definice 2. Řekneme, že matice je v **odstupňovaném tvaru**, pokud první nenulový koeficient zleva v každém řádku má vyšší sloupcový index (je více vpravo) než první nenulový koeficient v předchozím řádku. Tento první nenulový koeficient každého řádku matice v odstupňovaném tvaru se nazývá **pivot** a sloupec, v němž se nachází, **pivotní sloupec**. Řekneme, že matice je v **redukovaném odstupňovaném tvaru**, pokud navíc je první nenulový koeficient v každém řádku roven jedné a zároveň je tento koeficient jediným nenulovým koeficientem ve svém sloupci.

Vidíme, že matice z našeho příkladu je v odstupňovaném tvaru, není ale v redukovaném odstupňovaném tvaru. Lze ovšem provést elementární úpravy, jimiž z ní matice v redukovaném odstupňovaném tvaru vznikne:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Nejprve jsme přičetli třetí řádek do druhého, pak násobili druhý řádek číslem $\frac{1}{2}$ a nakonec přičetli (-1)-násobek druhého řádku k prvnímu. Je zřejmé, že stejně můžeme postupovat v obecném případě: přenásobit každý řádek takovým číslem, aby první nenulový koeficient byl roven jedné, a přičítat vhodné násobky každého řádku k předchozím řádkům, aby v každém pivotním sloupci vznikaly nuly i nad pivotem (pod ním už jsou).

Vyřešit soustavu v redukovaném odstupňovaném tvaru je ještě jednodušší: každá rovnice závisí vedle volných neznámých už jen na jedné další neznámé, té, která odpovídá pořadovému číslu příslušného pivota. Tu tedy můžeme z rovnice vyjádřit ve volných neznámých. Například pro druhou rovnici dostáváme $x_2 + 3r - s - 3t = 2$ a po převedení na druhou stranu a doplnění téhož pro ostatní rovnice

$$\begin{aligned} x_6 &= t \\ x_5 &= 4 + 2t \\ x_4 &= s \\ x_3 &= r \\ x_2 &= 2 - 3r + s + 3t \\ x_1 &= 9 + 2r + 2s + 3t \\ \forall r, s, t &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Řešení je samozřejmě totožné s tím, které jsme obdrželi pro matici v neredukovaném tvaru, protože elementární úpravy množinu řešení zachovávají.

Zbývá nám už jen se přesvědčit, že každou matici lze posloupností elementárních úprav převést na odstupňovaný tvar. Algoritmus, kterým toho dosáhneme, se nazývá **Gaussova eliminace** a je základem prakticky všech výpočtů v lineární algebře. Bez jejího pochopení a spolehlivého zvládnutí se ani nemusíte obtěžovat číst další kapitolu. Naštěstí to není nijak složité. Gaussovu eliminaci můžeme shrnout do následující posloupnosti kroků:

1. Najděme řádek, jehož první nenulový prvek je ze všech prvních nenulových prvků všech řádků v matici nejvíce vlevo. Pokud je takových více, můžeme vzít libovolný z nich. Označme si sloupcový index tohoto prvku k. To je možné pro každou nenulovou matici, nulová matice v odstupňovaném tvaru už je.

2. Změňme pořadí řádků posunutím řádku nalezeného v předchozím bodě na první pozici. Pokud označíme vzniklou matici A, pak $a_{1k} \neq 0$ a zároveň $a_{ij} = 0$ pro libovolné i a pro všechna $j < k$. Zvolené a_{1k}

se stane pivotem v budoucím odstupňovaném tvaru, proto se tomuto kroku říká **pivotace**.

3. Pro $i = \{2, \ldots, m\}$ přičtěme do i-tého řádku $\left(-\frac{a_{ik}}{a_{1k}}\right)$-násobek prvního řádku. Po této posloupnosti elementárních úprav vznikne matice, která má na pozicích zmíněných v předchozím bodě stále nuly a navíc jsou nulové i všechny koeficienty v k-tém sloupci kromě pivotu.

4. Aplikujme celý algoritmus na podmatici vzniklou vynecháním prvního řádku.

Je zřejmé, že tímto rekurzivním postupem převedeme libovolnou matici na matici v odstupňovaném tvaru. Na několika místech algoritmu máme určitou libovůli, na níž může záviset i výsledný odstupňovaný a redukovaný odstupňovaný tvar. I množina řešení proto může být popsána více způsoby, u nichž není na první pohled zřejmé, že jsou ekvivalentní.

Příklad. Pro ilustraci zkusme vyřešit soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5\\
3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9\\
3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15
\end{aligned}
$$

Zapíšeme rozšířenou matici spoustavy a provedeme pivotaci:

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9\\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15\\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9\\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right)
$$

Pod trojkou na prvním řádku chceme získat nuly, proto přičteme (-1)-násobek prvního řádku ke druhému. Poté aplikujeme celý algoritmus na druhý a třetí řádek:

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15\\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6\\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15\\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)
$$

Přičítali jsme $\left(-\frac{3}{2}\right)$-násobek druhého řádku ke třetímu. Matice je nyní v odstupňovaném tvaru a lze ji dále převést na redukovaný odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

První matice vznikla přičtením (-2)-násobku třetího řádku ke druhému a (-6)-násobku třetího řádku k prvnímu. Další $\sim$ shrnuje opět dvě úpravy - násobení druhého řádku číslem $\frac{1}{2}$ a poté přičtení devítinásobku nového druhého řádku k prvnímu. Nakonec jen násobíme první řádek jednou třetinou a jsme hotovi. Řešení pak má tvar

$$\{(-24,-7,0,0,4)+s(2,2,1,0,0)+t(-3,-2,0,1,0)|s,t\in\mathbb{R}\}$$

Z odstupňovaného tvaru můžeme ihned usoudit na počet řešení, které soustava rovnic má:

Později bude tato věta přeformulována pomocí pojmu hodnosti matice.

Věta 1. *Nechť $(A|b)$ je rozšířená matice soustavy a rozšířená matice $(A'|b')$ v odstupňovaném tvaru z ní vznikne konečnou posloupností elementárních úprav. Pak soustava s rozšířenou maticí $(A|b)$ má řešení právě tehdy, když sloupec b' není pivotní. Pokud soustava s rozšířenou maticí $(A|b)$ má řešení, pak je toto řešení právě jedno, právě když všechny sloupce matice soustavy A' jsou pivotní. V opačném případě existuje nekonečně mnoho řešení soustavy.*

Důkaz. Pokud je sloupec b' pivotní, pak v matici $(A'|b')$ existuje řádek tvaru $(00\ldots0|b'_p)$, kde $b'_p \neq 0$. Takový řádek ale odpovídá rovnici, kterou nelze splnit pro žádnou n-tici $(x_1,\ldots,x_n)$. Pokud naopak sloupec b' pivotní není, pak všechny řádky v $(A'|b')$ (a stejně tak i v jejím redukovaném tvaru) mají svůj pivot v matici soustavy A'. Pokud v A' zbývají ještě sloupce, které neobsahují pivot, pak lze příslušné neznámé položit za parametry a neznámé odpovídající pivotním sloupcům dopočítat, řešení je pak nekonečně mnoho. Pokud žádné takové sloupce nezbývají, vyjadřuje každý řádek v redukovaném odstupňovaném tvaru přímo hodnotu některé neznámé a řešení je tedy jednoznačné. $\square$

Příklad. Soustava rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -8 & -8 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

nemá žádné řešení, protože sloupec pravých stran poslední matice je pivotní. Soustava

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

má jediné řešení $(x_1, x_2) = (2, -1)$.

Všimněte si, že homogenní soustava rovnic zůstává v průběhu úprav stále homogenní soustavou. Nuly na pravé straně zůstávají nulami a proto se při výpočtu ani nepíší. Homogenní verze naší první soustavy rovnic by se tedy převedla na redukovaný odstupňovaný tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

s řešením

$$\{r(2,-3,1,0,0,0) + s(2,1,0,1,0,0) + t(3,3,0,0,2,1) | r, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Oproti nehomogenní soustavě zmizel „absolutní člen“ $(9, 2, 0, 0, 4, 0)$, a tedy množina řešení obsahuje nulovou n-tici $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Je zřejmé, že tuto vlastnost má každá homogenní soustava. „Absolutnímu členu“ se někdy říká **partikulární řešení nehomogenní soustavy rovnic** a je vidět, že jakékoli jiné řešení nehomogenní soustavy je součtem tohoto partikulárního řešení a obecného řešení příslušné soustavy homogenní.

K soustavám rovnic se ještě jednou vrátíme na konci kapitoly o hodnosti matice, poté co zavedeme pojmy jako lineární kombinace, vektorový podprostor, báze, dimenze a hodnost, které nám umožní popsat podmínky řešitelnosti soustav kompaktněji a elegantněji.

Cvičení

1. **(4)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 16 \\ 6x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 27 \end{array}$$

2. **(4)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & & & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

3. **(4)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

4. **(4)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \end{array}$$

5. **(4)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

6. **(4)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & -7 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & -6 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \end{array}$$

7. **(3)** Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} ix_1 & + & x_2 & & & = & -1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -4+3i \end{array}$$

8. **(3)** Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & (2+2i)x_2 & + & 2ix_3 & = & 1 \\ (1-i)x_1 & + & (1+3i)x_2 & + & (i-1)x_3 & = & 0 \\ (1+i)x_1 & + & (1-i)x_2 & + & (1+i)x_3 & = & 1 \end{array}$$

9. **(2)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & a^2 \end{array}$$

10. **(2)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & bx_2 & + & (a^2+b^2)x_3 & = & b \\ bx_1 & + & ax_2 & + & (a^2+b^2)x_3 & = & -a \\ x_1 & + & x_2 & + & (a+b)x_3 & = & 0 \end{array}$$

11. **(2)** Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & - & x_4 & = & a^2 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & ax_4 & = & a \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

Řešení:

1. $(3, -1, 2)$, 2. nemá řešení, 3. $(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}t, \frac{5}{4} + \frac{1}{2}t, t), t \in \mathbb{R}$, 4. $(2 + s - t, s, 1 + t, t), s, t \in \mathbb{R}$, 5. $(1, 1, 1, -1)$, 6. nemá řešení, 7. $(1 + i, -i, 3)$, 8. $(\frac{1-i}{4} + \frac{1-i}{2}t, t, \frac{1-i}{4} + \frac{-1+3i}{2}t), t \in \mathbb{C}$, 9. pro $a \notin \{1, -2\}$ jediné řešení $(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2})$, pro $a = 1$ nekonečně mnoho řešení tvaru $(1 - a - b, b, a), a, b \in \mathbb{R}$, pro $a = -2$ nemá řešení, 10. pro $a = b = 0$ nekonečně mnoho řešení tvaru $(-s, s, t), s, t \in \mathbb{R}$, pro $a = b \neq 0$ nemá řešení, jinak jediné řešení $(-\frac{a+b}{b-a}, 0, \frac{1}{b-a})$, 11. má řešení pouze pro $a = \frac{17}{7}$, všechna řešení mají tvar $(\frac{60}{7}, -\frac{5}{2} - t, -\frac{1}{14}, t), t \in \mathbb{R}$

Kapitola 2

Matice

V minulé přednášce jsme soustavě lineárních rovnic přiřadili tabulku čísel, nazývanou matice, případně rozšířená matice soustavy, pomocí níž bylo možné přehledně formulovat postup vedoucí k vyřešení soustavy. Matice jsou ale objekty zasluhující pozornost samy o sobě, lze na nich definovat algebraické operace s velmi zajímavými a užitečnými vlastnostmi.

Označme $\mathbb{F}$ číselnou množinu, se kterou budeme pracovat, $\mathbb{F}$ bude buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Nechť m, n jsou přirozená čísla, pak **maticí typu** $m \times n$ **nad** $\mathbb{F}$ nazveme tabulku čísel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$. Množinu všech takových matic označíme $M_{mn}(\mathbb{F})$. Jednotlivé a_{ij} nazveme **elementy matice**, matici jako celek označíme písmenem A. Elementy, jejichž řádkový a sloupcový index se rovnají, označujeme dohromady za **diagonálu** matice. Pokud $m = n$, máme co do činění se **čtvercovou maticí** - diagonála je pak skutečně souhrn elementů ležících na diagonále čtvercové tabulky. **Nulová matice** je taková, jejíž všechny elementy jsou rovny nule, označíme ji 0. **Součtem matic** $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ nazveme matici, jejíž element na pozici ij je roven $a_{ij}+b_{ij}$ pro všechny indexy i a j. Operace sčítání matic splňuje mimojiné následující vlastnosti:

1. $\forall A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A + (B + C) = (A + B) + C$ (**asociativita**)

2. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A + 0 = 0 + A = A$ (0 je **neutrální prvek**)
3. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ $\exists(-A) \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A + (-A) = 0$ (existence **opačného prvku**)
4. $\forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A + B = B + A$ (**komutativita**)

Opačným prvkem $(-A)$ k matici A je samozřejmě matice, jejíž elementy mají tvar $-a_{ij}$. Množina s operací splňující tato čtyři pravidla se nazývá **komutativní grupa**, o trochu více se o grupách zmíníme v příští přednášce.

Matici $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ můžeme také vynásobit libovolným číslem $r \in \mathbb{F}$, výsledná matice rA má elementy ra_{ij}. Mnohem zajímavější operací je ale násobení matic mezi sebou:

Definice 3. Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in M_{mp}(\mathbb{F})$, $B \in M_{pn}(\mathbb{F})$. Pak definujme **součin** $AB \in M_{mn}(\mathbb{F})$ těchto matic jako matici, jejíž element na pozici ij je roven

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Se součinem matic jsme se ve skutečnosti už setkali. Označme $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matici soustavy m lineárních rovnic o n neznámých, dále x matici typu $n \times 1$ složenou z neznámých a b matici typu $m \times 1$ složenou z pravých stran:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Pak součin matic Ax je podle definice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

a soustava lineárních rovnic s rozšířenou maticí $(A|b)$ tedy vlastně odpovídá hledání matice x, pro níž je splněna rovnost matic $Ax = b$. Tímto způsobem budeme skutečně v budoucnu soustavy rovnic obvykle zapisovat.

Geometrický význam maticového násobení je dobře vidět z následujícího příkladu. Uvažujme bod o souřadnicích (x, y) v rovině a transformaci, která jej pootočí o úhel α okolo počátku proti směru hodinových ručiček do nové polohy (x', y'). Pokud označíme r vzdálenost (původního i pootočeného) bodu od počátku a ϕ úhel, který svírá spojnice (x, y) a počátku s osou x, můžeme vypočítat novou polohu pomocí staré:

$$
\begin{aligned}
x' &= r\cos(\alpha+\phi) = r\cos\alpha\cos\phi - r\sin\alpha\sin\phi = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\
y' &= r\sin(\alpha+\phi) = r\sin\alpha\cos\phi + r\cos\alpha\sin\phi = x\sin\alpha + y\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Vidíme, že x' a y' závisí na x a y lineárně a tuto závislost lze přepsat pomocí násobení matic:

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}
$$

Označme matici 2×2 symbolem $R(\alpha)$, zjevně nějak reprezentuje transformaci samotnou v závislosti na α. Pootočení bodu (x', y') o úhel β bude pak realizováno násobením maticí $R(\beta)$:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= R(\beta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\cos\beta - (x\sin\alpha + y\cos\alpha)\sin\beta \\ (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\sin\beta + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)\cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) - y(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ x(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) - y(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Po úpravě snadno ověříme, že pravá strana je totožná s aplikací součinu matic $R(\alpha)$ a $R(\beta)$

$$
\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \\
\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}
$$

na bod (x, y).

Tedy součin matic odpovídá skládání odpovídajících transformací. Aplikací součtových vzorců zjišťujeme, že $R(\beta)R(\alpha) = R(\beta + \alpha)$, což odpovídá prostému faktu, že rotace o α následovaná rotací o β je vlastně rotace o součet těchto úhlů. V kapitole o lineárních zobrazeních si skutečně ukážeme, že na první pohled neintuitivní zavedení maticového násobení se stane naprosto přirozeným, jakmile začneme chápat matice jako reprezentanty lineárních zobrazení.

Násobení matic se někdy označuje i jako **násobení řádek-sloupec**, což odpovídá tomu, že ij-tý element součinu získáme z i-tého řádku první matice a j-tého sloupce druhé matice jako součet součinů odpovídajících si prvků. Nelze tedy vynásobit jakékoli dvě matice, musí se rovnat počet sloupců první matice a počet řádků druhé. Součin „zdědí“ po první matici počet řádků a po druhé počet sloupců. Z toho plyne, že

1. pokud je součin AB definován, pak součin BA definován být nemusí,
2. pokud je BA definován také, nemusí být stejného typu jako AB,
3. a ani pokud je definován a stejného typu, nemusí se BA rovnat AB.

Najděte příklady ilustrující všechny tři situace! Násobení matic tedy není obecně komutativní.

Lemma 2. *Nechť $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B, D \in M_{np}(\mathbb{F})$, $C, F \in M_{pq}(\mathbb{F})$. Pak platí*

1. $A(BC) = (AB)C$ (asociativita)

2. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists E_k \in M_{kk}(\mathbb{F})$ taková, že $E_m A = A$ a $AE_n = A$ (jednotková matice)

3. $B(C + F) = BC + BF$, $(B + D)C = BC + DC$ (distributivita)

Důkaz. 1. ij-tý element na levé straně je roven

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

a na stejný výraz se dá upravit i pravá strana.

2. Jednotková matice stupně n je čtvercová matice mající na diagonále jedničky a mimo diagonálu nuly:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Splnění rovností se pak snadno ověří. Pokud nebude hrozit nedorozumění, index v označení jednotkové matice vynecháme a budeme ji značit prostě E.

3. Ověřte sami.

□

Tenhle příklad je tu hlavně jako jednoduchá ilustrace důkazu matematickou indukcí.

Příklad. Pokud A je čtvercová matice, můžeme ji násobit samu se sebou a tedy definovat mocninu A^n pro $n \in \mathbb{N}$. Analogicky jako u čísel je přirozené dodefinovat $A^0 = E$. Zkusme si pro zajímavost spočítat mocniny matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Už z několika prvních mocnin vidíme systém:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nabízející se hypotézu

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

dokážeme matematickou indukcí.

1. Ověříme, že dokazované tvrzení platí pro $n = 0$.

2. Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ ukážeme, že pokud tvrzení platí pro n, pak platí i pro $n + 1$.

První bod plyne ihned z $A^0 = E$. Druhý bod ověříme výpočtem:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Elementární úpravy, které se používají při řešení soustavy rovnic, je možné chápat jako výsledek násobení matic. Pokud $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je libovolná matice a $U_{k,r} \in M_{mm}(\mathbb{F})$ je matice, lišící se od jednotkové matice jen elementem na pozici kk, který má hodnotu r, pak matice $U_{k,r}A$ vznikne z A vynásobením k-tého řádku číslem r. Podobně matice $V_{k,l,s} \in M_{mm}(\mathbb{F})$ se liší od jednotkové matice jen elementem na pozici kl, který je roven $s \in \mathbb{F}$, a $V_{k,l,s}A$ vznikne z A přičtením s-násobku l-tého řádku do k-tého. Zkuste si sami rozmyslet, jak vypadá matice realizující výměnu i-tého a j-tého řádku.

Další styčný bod mezi násobením matic se soustavami lineárních rovnic nabízí maticová rovnice typu $AX = B$, kde $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{mp}(\mathbb{F})$ jsou pevné matice a $X \in M_{np}(\mathbb{F})$ je neznámá matice. V součinu matic AX závisí j-tý sloupec pouze na j-tém sloupci matice X. Proto jsou neznámé elementy $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$ tohoto sloupce řešením soustavy rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_{2j} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_{mj} \end{array}\right)$$

Úpravy, které budeme při řešení této soustavy rovnic provádět, abychom ji dostali do odstupňovaného tvaru, nezávisí na pravé straně, pouze na matici A. Můžeme tak stejně dobře psát za svislou čáru všechny pravé strany, pro které nás řešení zajímá, tedy celou matici B. Existenci řešení a jejich počet pak odečteme po úpravě matice $(A|B)$ na odstupňovaný tvar. Je zřejmé, že ve výsledné matici X budou všechny sloupce záviset na stejném počtu parametrů, rovném počtu nepivotních sloupců v odstupňovaném tvaru matice A.

Zvláštní pozornost zaslouží situace, kdy A je čtvercová matice a po úpravě na odstupňovaný tvar jsou všechny sloupce pivotní. Pak upravená rozšířená matice vypadá jako $(E|B')$, kde B' je nějaká matice. Přitom elementárním úpravám, kterými jsme k tomuto tvaru dospěli, odpovídají matice úprav, označme je popořadě $U_1, U_2, \ldots, U_q$. Takže po první úpravě máme před svislou čarou U_1A, po druhé úpravě U_2U_1A, až nakonec $U_qU_{q-1}\ldots U_1A = E$. Matice B' je potom rovna $U_qU_{q-1}\ldots U_1B$. Součin $U_qU_{q-1}\ldots U_1$ matic úprav označme A^{-1}, protože vztah $A^{-1}A = E$ je analogií vztahu $a^{-1}a = 1$ pro čísla.

Definice 4. Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$. Pokud existuje matice $A^{-1} \in M_{nn}(\mathbb{F})$ splňující $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, pak říkáme, že matice A je **regulární** a A^{-1}

je její **inverzní matice**. Čtvercová matice, která nemá inverzní matici, se nazývá **singulární**.

Lemma 3. *Nechť A je čtvercová matice, kterou lze upravit na jednotkovou matici. Pak A je regulární, existuje právě jedna matice C splňující $AC = E$, právě jedna matice D splňující $DA = E$ a $D = C = A^{-1}$.*

Lemma říká, že matice, které jdou upravit na jednotkovou matici, jsou regulární. Platí také, že matice, která na jednotkovou upravit nejde, už musí být singulární, ale pro elegantnější formulaci a důkaz tohoto kritéria počkáme až na zavedení pojmu hodnost matice.

Důkaz. Uvažujme maticovou rovnici $AX = E$, která odpovídá soustavě rovnic s rozšířenou maticí $(A|E)$. Podle předpokladu existuje posloupnost elementárních úprav s maticemi $U_1, \dots, U_q$ takových, že $U_q \dots U_1 A = E$ a tedy existuje $A^{-1} := U_q \dots U_1$ splňující $A^{-1}A = E$. Po úpravách má rozšířená matice tvar $(E|U_q \dots U_1 E)$, takže soustava rovnic má řešení $X = A^{-1}$. Tedy $AA^{-1} = E$, A je regulární a matice C, D z tvrzení existují. Pro libovolnou matici D splňující $E = DA$ musí platit $A^{-1} = DAA^{-1} = D$ a podobně pro libovolnou matici C splňující $E = AC$ platí $A^{-1} = A^{-1}AC = C$, čímž je dokázána i jednoznačnost matic C a D. □

Vidíme, že ačkoli násobení matic není obecně komutativní, matice a její inverzní matice komutují vždy, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Metoda důkazu zároveň dává i metodu výpočtu inverzní matice: stačí upravit rozšířenou matici $(A|E)$ na tvar $(E|D)$ a matice D pak musí být A^{-1}. Zatím ale ještě nevíme, jestli selhání této metody znamená, že je daná matice singulární.

Příklad. Hledejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Upravujeme tedy rozšířenou matice odpovídající maticové rovnici $AX = E$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Hledaná inverzní matice je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

jak snadno ověříme vynásobením s A.

Lemma 4. *Nechť $A, B \in M_{nn}(\mathbb{F})$ jsou regulární matice. Pak A^{-1} a AB jsou regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$ a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Důkaz. Platí $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = E$ a zároveň $AA^{-1} = E$, tudíž díky jednoznačnosti inverzní matice k A^{-1} musí být $(A^{-1})^{-1} = A$. Podobně $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E$, tudíž $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $\square$

Cvičení

1. **(3)** Najděte matici X, pro kterou
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **(3)** Najděte matici X, pro kterou
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **(3)** Najděte matici X, pro kterou
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Najděte matici X, pro kterou
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. **(3)** Najděte matici X, pro kterou
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. **(3)** Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. **(3)** Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

8. **(3)** Najděte matici X, která splňuje $AX = XA$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9. **(4)** Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

10. **(4)** Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

11. **(4)** Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

12. **(4)** Určete

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

13. **(4)** Určete
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

14. **(4)** Určete
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

15. **(4)** Najděte nenulovou matici A, pro kterou $A^2 = 0$.

16. **(3)** Najděte matici A, pro kterou $A^2 \neq 0$, ale $A^3 = 0$.

17. **(2)** Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najděte matici A, pro kterou $A^n \neq 0$, ale $A^{n+1} = 0$.

18. **(3)** Dokažte, že pro dvě čtvercové matice A, B platí $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, právě když $AB = BA$.

19. **(2)** Nechť A, B jsou dvě čtvercové matice, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pokud $AB = BA$, pak
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

20. **(3)** Označme jako $J_n \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je matici, pro niž $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $(J_n)_{i,i+1} = 1$ a všechny ostatní elementy matice J_n jsou nuly. Určete $(J_n)^k$ pro všechna $k \geq 0$.

21. **(3)** Zjistěte, pro která $k \in \mathbb{Z}$ má smysl a spočtěte
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}^k$$

22. **(3)** Jak se změní součin matic AB, pokud v matici A vyměníme i-tý a j-tý řádek? Zdůvodněte.

23. **(3)** Jak se změní součin matic AB, pokud v matici A vynásobíme i-tý řádek číslem c? Zdůvodněte.

24. **(3)** Jak se změní součin matic AB, pokud v matici B vyměníme i-tý a j-tý sloupec? Zdůvodněte.

25. **(3)** Jak se změní součin matic AB, pokud v matici B vynásobíme i-tý sloupec číslem c? Zdůvodněte.

26. **(3)** Jak se změní A^{-1}, pokud v matici A vyměníme i-tý a j-tý řádek? Zdůvodněte.

27. **(3)** Jak se změní A^{-1}, pokud v matici A vynásobíme i-tý řádek číslem c? Zdůvodněte.

28. **(3)** Jak se změní A^{-1}, pokud v matici A vyměníme i-tý a j-tý sloupec? Zdůvodněte.

29. **(3)** Jak se změní A^{-1}, pokud v matici A vynásobíme i-tý sloupec číslem c? Zdůvodněte.

30. **(3)** **Stopa** $\operatorname{Tr} A$ čtvercové matice $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je součet všech elementů na diagonále $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Dokažte, že pro libovolné dvě matice $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.

31. **(2)** Zobecněte předchozí tvrzení na případ stopy součinu více než dvou matic.

32. **(1)** Řekneme, že matice A, B **komutují**, pokud $AB = BA$. Dokažte, že pokud nějaká matice komutuje se všemi maticemi z $M_{nn}(\mathbb{R})$, pak musí být násobkem jednotkové matice.

33. **(2)** Dokažte, že čtvercová matice A komutuje se všemi diagonálními maticemi, právě když je sama diagonální.

34. **(2)** Dokažte, že pokud A je čtvercová diagonální matice, která má všechny elementy na diagonále navzájem různé, pak každá matice, která s A komutuje, už musí být diagonální.

35. **(4)** Nechť $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ je polynom a
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
matice. Spočtěte $p(A)$.

36. **(2)** Dokažte, že pro žádné dvě matice není splněna rovnost $AB - BA = E$.

37. **(3)** Najděte všechny matice $A \in M_{22}(\mathbb{F})$, pro něž $A^2 = E$.

38. **(3)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

39. **(3)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

40. **(3)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

41. **(2)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

42. **(2)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

43. **(1)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1+a & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

44. **(1)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

45. **(1)** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+nh \\ a+nh & a & a+h & \dots & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a+nh & a & \dots & a+(n-2)h \\ \vdots & & & \ddots & a+h \\ a+h & a+2h & \dots & a+nh & a \end{pmatrix}$$

46. **(1)** Nechť $\epsilon = \exp\left(i\frac{2\pi}{n+1}\right)$. Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^n \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \epsilon^{n(n-1)} \\ 1 & \epsilon^n & \dots & \epsilon^{n(n-1)} & \epsilon^{n^2} \end{pmatrix}$$

47. **(3)** Řešte maticovou rovnici

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

48. **(3)** Řešte maticovou rovnici

$$X \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

49. **(3)** Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

50. **(2)** Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

51. **(2)** Nechť $A \in M_{mk}(\mathbb{F})$,$B \in M_{ml}(\mathbb{F})$, $C \in M_{nk}(\mathbb{F})$, $D \in M_{nl}(\mathbb{F})$. Zápisu matice z $M_{m+n,k+l}(\mathbb{F})$

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

říkáme zápis v blokovém tvaru. Ukažte, že pokud máme matici $Y \in M_{k+l,p+q}(\mathbb{F})$ také zapsanou v blokovém tvaru

$$Y = \begin{pmatrix} F & G \\ H & I \end{pmatrix},$$

kde $F \in M_{kp}(\mathbb{F})$,$G \in M_{kq}(\mathbb{F})$, $H \in M_{lp}(\mathbb{F})$, $I \in M_{lq}(\mathbb{F})$, pak

$$XY = \begin{pmatrix} AF + BH & AG + BI \\ CF + DH & CG + DI \end{pmatrix}$$

52. **(2)** Nechť $U \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Najděte inverzní matici k matici zapsané v blokovém tvaru
$$\begin{pmatrix} E_m & U \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

53. **(1)** Horní (resp. dolní) trojúhelníková matice je taková, jejíž elementy pod (resp. nad) hlavní diagonálou jsou všechny nulové. Dokažte, že libovolnou matici lze napsat jako součin horní trojúhelníkové matice a dolní trojúhelníkové matice.

54. **(2)** Dokažte, že inverzní matice k horní (resp. dolní) trojúhelníkové matici je opět horní (resp. dolní) trojúhelníková.

55. **(2)** Při výpočtech na počítači trvá násobení dvou reálných čísel mnohem déle než sčítání. Proto ze při násobení více matic vyplatí využít asociativity a uzávorkovat je tak, aby počet násobení byl co nejmenší. V jakém pořadí je nejlepší provést součin matic 5, 10×20, 20×5 a 5×1?

56. **(HC)** Najděte způsob, jak vynásobit dvě 2×2 matice tak, abyste místo osmkrát potřebovali násobit jenom sedmkrát.

Řešení:

1. $\begin{pmatrix} r+\frac{2}{3} & s-\frac{5}{3} & t-1 \\ -2r & 2-2s & 1-2t \\ r & s & t \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$, $r,s,t \in \mathbb{R}$; 2. nemá řešení; 3. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$; 5. nemá řešení; 6. $\begin{pmatrix} r+\frac{1}{2} & s+\frac{1}{2} & t \\ r & s & t \\ -3r+\frac{1}{2} & -3s+\frac{1}{2} & -3t \\ -3r+1 & -3s & -3t+1 \end{pmatrix}$, $r,s,t \in \mathbb{R}$; 7. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} s+t & -s \\ s & t \end{pmatrix}$, $s,t \in \mathbb{R}$; 9. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 13. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;
14. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Kapitola 3

Vektorové prostory

Jednou z nejdůležitějších algebraických struktur je struktura grupy. Jedná se o množinu s jednou binární operací, splňující tři jednoduché axiomy. Axiomy dostatečně silné, aby z nich plynuly zajímavé vlastnosti, ale zase natolik volné, že spektrum objektů, které je splňují, zůstává velmi pestré.

Definice 5. Dvojice $(G, \odot)$, kde G je množina a $\odot$ binární operace na ní, se nazývá **grupou**, pokud:

1. $\forall a, b, c \in G,\ a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (asociativita)

2. $\exists e \in G,\ \forall a \in G,\ e \odot a = a \odot e = a$ (neutrální prvek)

3. $\forall a \in G,\ \exists a^{-1} \in G,\ a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = e$ (inverzní prvky)

Grupu nazveme **komutativní** (nebo též **abelovskou**), pokud navíc $\forall a, b \in G,\ a \odot b = b \odot a$.

S těmito podmínkami jsme se setkali už v minulé přednášce, splňovalo je sčítání matic. Další příklady grup zahrnují

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, neutrální prvek je vždy 0 a inverzní prvek k x je vždy $-x$. $(\mathbb{N}, +)$ grupa není, chybí inverzní prvky. Množina všech lichých čísel se sčítáním grupa není.

2. $(\mathbb{R}^n, +)$, kde $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic a $+$ je sčítání po složkách. Totéž s $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ místo $\mathbb{R}$. Množina všech matic typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ je vlastně množina mn-tic uspořádaných do tabulky.

3. $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$, neutrální prvek je 1, inverzní prvek k x je $\frac{1}{x}$. Všimněte si, že musíme vždy vyjmout nulu, protože by k ní neexistoval inverzní prvek vzhledem k násobení.

4. Množina $\{\pm 1\}$ s operací násobení.

5. Množina všech regulárních matic stupně n s operací maticového násobení. V minulé přednášce jsme ověřili, že násobení matic je asociativní, že jednotková matice je regulární a že splňuje $EA = AE = A$ pro každou čtvercovou matici A. Dále že každá regulární matice má inverzní $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, která je také regulární, a nakonec, že součin dvou regulárních matic je také regulární. Komutativní axiom ale obecně neplatí (najděte příklad!). Různé grupy matic poskytují bohatý zdroj příkladů nekomutativních grup.

6. Množina matic
$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$
s operací maticového násobení. Opět můžeme ověřit splnění všech axiomů a uzavřenosti množiny na operaci. V minulé přednášce jsme si tyto matice označili $R(\alpha)$ a ukázali, že $R(\beta)R(\alpha) = R(\beta + \alpha)$, množina je tedy na operaci skutečně uzavřená. Asociativita je jasná, protože násobení matic je asociativní pro libovolné matice, jednotkovým prvkem je $E \equiv R(0)$ a inverzním prvkem k $R(\alpha)$ je zjevně $R(-\alpha)$. Tato grupa matic s operací násobení tedy geometricky odpovídá grupě rotací v rovině s operací skládání.

7. Geometrická verze předchozího příkladu je speciálním případem grup transformací s operací skládání. Příkladem může být grupa rotací v prostoru, grupa všech shodností (tedy translací, rotací a zrcadlení) nebo grupy symetrií, čili grupy shodností zachovávajících nějaký geometrický útvar. Například osmiúhelník v rovině bude zachován každou rotací o 45 stupňů a každým zrcadlením podle přímky jdoucí počátkem a vrcholem nebo středem strany. Krychle v prostoru je zachovávána 24 různými rotacemi. Stejného druhu jsou grupy symetrie dláždění roviny, jejichž proslulé vyobrazení je zachyceno ve výzdobě maurské Alhambry, nebo grupy krystalografické.

8. V částicové fyzice hrají velkou roli grupy symetrií v neprostorových stupních volnosti, například v prostoru všech možných hodnot spinu.

Studium grup je matematickým oborem samo o sobě, či spíše několika obory. Pro nás zde je definice grupy jen stavebním blokem pro strukturu, která nás v této přednášce zajímá především:

Definice 6. Nechť $\mathbb{F}$ je číselná množina ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$). Komutativní grupu $(V, +)$, na níž je navíc definována operace násobení prvků z V prvky z $\mathbb{F}$, nazveme **vektorový prostor nad** $\mathbb{F}$, pokud splňuje následující axiomy. Pro všechna $r, s \in \mathbb{F}$ a pro všechny $u, v \in V$

1. $(r + s).v = r.v + s.v$
2. $r.(u + v) = r.u + r.v$
3. $(r.s).v = r.(s.v)$
4. $1.v = v$

Prvky z V nazýváme **vektory**, prvky z $\mathbb{F}$ **skaláry**. Neutrální prvek v grupě V nazýváme **nulový vektor** a značíme 0. Všimněte si, že všechny čtyři axiomy udávají vztah mezi operacemi na číselné množině a operacemi ve vektorovém prostoru. Například ve třetím axiomu znamená první tečka násobení čísel, zatímco zbývající tři operaci násobení vektoru skalárem. Z těchto axiomů můžeme dokázat další jednoduché vlastnosti:

Bonusové lemma. Dokazováním vlastností z axiomů si pocvičíte logické myšlení, ale u zkoušky to vyžadovat nebudu.

Lemma 5. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $v \in V$, $r \in \mathbb{F}$. Pak platí*

1. $0.v = 0$

2. $(-1).v = -v$

3. $r.0 = 0$

Důkaz. Tvrzení vypadají na první pohled triviálně, ale u každého je potřeba si uvědomit, že stejné symboly nemusejí znamenat stejné objekty: například symbol 0 označuje jak nulový vektor, tak nulu v číselné množině. První tvrzení se dokáže následovně:

$$0 = (-v) + v = (-v) + (1 + 0).v = (-v) + v + (0.v) = 0 + 0.v = 0.v$$

Nejprve jsme využili axiom existence opačného prvku v grupě, poté čtvrtý axiom vektorového prostoru, pak první axiom, dále opět opačný prvek v grupě a nakonec vlastnost neutrálního prvku v grupě. Zbylá dvě tvrzení zkuste dokázat sami, je to docela zábavné a užitečné cvičení. $\square$

Bonus. Pro definici tělesa (field), modulu (module) a okruhu (ring) se podívejte do nějaké učebnice algebry nebo na Wikipedii.

Poznámka. Vektorový prostor si s ohledem na naše potřeby definujeme pouze reálný nebo komplexní a využíváme toho, že algebraické vlastnosti těchto číselných množin nepotřebují dalšího komentáře. Obecně se ale vektorové prostory definují nad strukturou **tělesa**, která je definována svou vlastní sadou axiomů. Zobecněním vektorového prostoru je pojem **modulu**, u kterého stačí, aby číselná množina byla **okruhem**. Například množina $\mathbb{Z}$ je okruh, který není tělesem, protože $\mathbb{Z}$ neobsahuje inverzní prvky k násobení.

Základními příklady vektorových prostorů jsou komutativní grupy $(\mathbb{F}^n, +)$, kde násobení číslem z $\mathbb{F}$ je definováno po složkách. Někdy mluvíme o **aritmetickém vektorovém prostoru** a značíme jej prostě $\mathbb{F}^n$. S těmito vektorovými prostory a s jejich objekty, uspořádanými n-ticemi čísel, budeme pracovat nejčastěji. Sloupce a řádky matic, sloupec pravých stran soustavy rovnic nebo n-tice neznámých budou všechno objekty nějakých aritmetických vektorových prostorů. Důležité jsou ale i další příklady:

1. Množina $M_{mn}(\mathbb{F})$ s operací sčítání matic a násobení matice číslem je speciální případ aritmetického vektorového prostoru.

2. Komutativní grupa $(\mathbb{C}^n, +)$ s násobením pouze čísly z $\mathbb{R}$ je vektorový prostor, ale jiný než aritmetický vektorový prostor $\mathbb{C}^n$. Vidíme tedy, že na jedné množině může existovat více různých struktur vektorového prostoru.

3. Na množině $(\mathbb{R}^2, +)$ lze zavést násobení komplexním číslem $r + is \in \mathbb{C}$ takto:
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (r + is).(x, y) := (rx - sy, sx + ry)$$
Definice je ušitá tak, aby se x a y vlastně chovaly jako reálná a imaginární část komplexního čísla. Podobně můžeme definovat strukturu komplexního vektorového prostoru na $(\mathbb{R}^{2n}, +)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Znovu vidíme dvě struktury vektorového prostoru na jedné komutativní grupě $(\mathbb{R}^{2n}, +)$.

4. Množina všech nekonečných posloupností z $\mathbb{F}$ je přímé zobecnění aritmetického vektorového prostoru - i zde se sčítá a násobí po jednotlivých členech. K důkazu stačí ověřit jednotlivé axiomy.

5. Pokud M je libovolná množina, pak množina $F(M, \mathbb{F})$ všech funkcí z M do $\mathbb{F}$, na níž jsou $\forall f, g \in F(M, \mathbb{F})$, $\forall r \in \mathbb{F}$, $\forall x \in M$ definovány

operace předpisem

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x)\\ (rf)(x) &:= r.f(x),\end{aligned}$$

je vektorový prostor. Jaký je vlastně význam tohoto předpisu? První řádka definuje funkci $f+g$ její hodnotou v bodě x, a to tak, že pro libovolné $x \in M$ je tato hodnota součtem hodnot funkcí f a g v x. Druhá obdobně definuje násobek funkce. Volba $M = \{1,\dots,n\}$ pokrývá případ aritmetického vektorového prostoru, pro

$$M = \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$$

máme prostor matic, pro $M = \mathbb{N}$ zase máme prostor všech nekonečných posloupností. Množina M žádnou algebraickou strukturu mít nemusí, axiomy plynou z vlastností operací na $\mathbb{F}$.

6. Komutativní grupa $(\mathbb{R}^+,\cdot)$, na níž je zavedena operace „násobení“ $\times$ prvku $a \in \mathbb{R}^+$ reálným číslem r předpisem $r \times a := a^r$, tedy jako mocnění, je vektorový prostor. Je skutečně užitečné zkusit si pro tento případ ověřit platnost všech axiomů. Lze podobně definovat strukturu vektorového prostoru na $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$?

Definice 7. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a W je neprázdná podmnožina V taková, že $\forall v,w \in W$, $\forall r \in \mathbb{F}$ platí $v+w \in W$ a $rv \in W$. Pak nazýváme W **podprostorem** vektorového prostoru V, značíme $W \leq V$.

Lemma 6. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a W jeho podprostor. Pak W je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$.*

Důkaz. Podmínky v definici podprostoru zaručují, že součet i násobení jsou uzavřené na W a tedy jsou na něm jakožto operace dobře definovány. Postupně ověříme axiomy:

1. $\forall u,v,w \in W$ platí $u+(v+w) = (u+v)+w$, neboť $u,v,w \in V$ a tam to platí. Podobně komutativita.

2. Pro libovolný $v \in W$ díky uzavřenosti na násobení $0.v = 0 \in W$.

3. Pro všechna $v \in W$ patří i opačný prvek $-v = (-1).v$ znovu do W díky uzavřenosti na násobení. Pro v a $-v$ platí z axiomů na V rovnost $v+(-v) = 0$, takže opačný prvek ve V je opačným prvkem i ve W.

4. Všechny tři distributivní axiomy platí ze stejných důvodů jako asociativita a komutativita. Stejně tak axiom $v = 1.v$.

□

Následující lemma nám umožní sloučit dvě podmínky charakterizující podprostor do jedné, což učiní následující důkazy o něco elegantnějšími.

Je to vlastně ekvivalentní definice podprostoru. Také by šlo ho definovat jako podmnožinu uzavřenou na lineární kombinace, viz dále.

Lemma 7. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a W jeho podmnožina. Pak $W \leq V$, právě když $\forall u, v \in W$ a $\forall r, s \in \mathbb{F}$ je $ru + sv \in W$.*

Důkaz. Tvrzení říká, že nějaké dvě podmínky jsou ekvivalentní („právě když“). Je tedy potřeba ověřit, že podmnožina splňující podmínky v definici podprostoru splňuje i podmínku v tvrzení, a naopak, podmnožina splňující podmínku v tvrzení vyhovuje definici. Pokud W je podprostor, $u, v \in W$, $r, s \in \mathbb{F}$, pak rv i su patří do W z druhé podmínky v definici a $rv + su \in W$ z první podmínky. Naopak, pokud všechny $u, v \in W$ splňují $ru+sv \in W$ pro všechny skaláry r, s, pak stačí zvolit $r = 1, s = 1$ a získáváme první podmínku v definici, a volbou $s = 0$ získáváme druhou. □

Drtivá většina vektorových prostorů, s nimiž se setkáme, bude zadána jako podprostor nějakého vektorového prostoru výše, nejčastěji $\mathbb{F}^n$. V praxi tedy nikdy nebudeme ověřovat sadu axiomů, ale jen podmínku na podprostor.

Příklad. Pojem podprostoru umožňuje zkonstruovat mnoho dalších příkladů vektorových prostorů:

1. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a v vektor v něm. Pak množina $\langle v \rangle := \{rv | r \in \mathbb{F}\}$ je vektorový podprostor V, který se nazývá **lineární obal** v. Ve vektorových prostorech, které mají geometrickou interpretaci (třeba $\mathbb{R}^n$), je to vlastně přímka o směru v procházející počátkem.

2. Nechť $a_j \in \mathbb{F}$ pro $j \in \{1, \ldots, n\}$, pak množina W_a všech vektorů $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, které splňují homogenní lineární rovnici $\sum_{j=1}^n a_j x_j = 0$, je podprostorem $\mathbb{F}^n$. Stačí použít ekvivalentní podmínku z lemmatu, neboť pokud $x, y \in W_a$ a $r, s \in \mathbb{F}$, pak

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(rx_j + sy_j) = r \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + s \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = r.0 + s.0 = 0,$$

tedy $rx+sy \in W_a$. Všimněte si, že pokud by v rovnici byla pravá strana nenulová, pak by podmínka splněna nebyla, množina řešení nehomogenní rovnice tedy není vektorovým prostorem. Jinými slovy, přímka v $\mathbb{F}^n$ je vektorovým podprostorem právě tehdy, když prochází počátkem.

3. Množina všech matic v odstupňovaném tvaru je podprostor množiny všech matic daného typu (ověřte sami).

4. Množina všech omezených posloupností je podprostor množiny všech posloupností. Stačí si uvědomit, že součet dvou omezených posloupností je omezená a násobek omezené posloupnosti je také omezená posloupnost. Podobně i množina všech konvergentních posloupností (při ověření využijete větu o algebře limit z matematické analýzy), množina všech posloupností, jejichž k-tý člen je nulový, nebo množina všech posloupností splňujících nějakou lineární rekurentní podmínku, například $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ vedoucí na posloupnosti Fibonacciho typu.

5. Množina $P(x, \mathbb{F})$ všech polynomů v proměnné x s koeficienty v $\mathbb{F}$ je vektorový prostor. Jednak je možné chápat jej jako podprostor prostoru všech funkcí na $\mathbb{F}$. Druhá interpretace vychází z toho, že při sčítání polynomů se sčítají příslušné koeficienty u mocnin x a při násobení polynomu číslem se také násobí posloupnost koeficientů člen po členu. Polynom je tedy možné chápat jako posloupnost čísel z $\mathbb{F}$, která má pouze konečný počet nenulových členů. Množina takových posloupností je podprostorem v množině všech posloupností.

6. Množina $P_k(x, \mathbb{F})$ všech polynomů stupně nejvýše k. Pokud bychom vynechali slovo nejvýše, chyběl by například nulový vektor.

7. Množina všech omezených funkcí, množina všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, množina všech násobků funkce $\cos x$,... Pokud $p \in M$, pak množina všech funkcí, pro něž $f(p) = 0$, je vektorový prostor, zatímco množina všech funkcí, pro něž $f(p) = 17$, není. Množiny funkcí zadané podmínkou na existenci a nulovost limity či derivace v nějakém bodě jsou vektorové prostory, opět z vlastností limity a derivace funkce.

8. Podprostor má strukturu vektorového prostoru vždy nad celou číselnou množinou $\mathbb{F}$. Tedy $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$ není podprostorem $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$, ani naopak.

Definice 8. Nechť I je indexová množina a $\{W_i | i \in I\}$ je systém podprostorů vektorového prostoru V. Definujme **spojení** $\bigvee_{i \in I} W_i$ těchto podprostorů jako množinu všech vektorů tvaru $\sum_{j \in J} w_j$, kde $J \subset I$ je nějaká konečná podmnožina, $w_j \in W_j$.

Stačí, když budete umět napsat definici spojení konečně mnoha podprostorů $W_1, W_2, \ldots, W_k$, čili pro případ indexové množiny $I = \{1, \ldots, k\}$.

Nejčastějším speciálním příkladem je spojení dvou podprostorů, které se značí $W_1 \vee W_2$, indexová množina je tedy $I = \{1, 2\}$. Vektor $v \in V$ patří do

$W_1 \vee W_2$ právě když je součtem nějakého vektoru z W_1 a nějakého vektoru z W_2, a podobně si lze představit i spojení více podprostorů. Pouze pokud je podprostorů nekonečně mnoho (čili indexová množina je nekonečná), je jejich spojení tvořeno součty pouze konečně mnoha vektorů, proto v definici figuruje konečná indexová podmnožina J. Nekonečné součty nemáme definovány, jejich studium je doménou matematické analýzy a vyžadovalo by zavést na V ještě další strukturu, která by umožnila definovat vzdálenost vektorů od sebe. Rozmyslete si na příkladech, jaký je rozdíl mezi spojením a sjednocením. Kdy je sjednocení dvou vektorových podprostorů také vektorový podprostor?

I zde stačí, když budete větu umět naformulovat pro konečně mnoho podprostorů.

Věta 2. *Nechť V je vektorový prostor, I je indexová množina a $\{W_i, i \in I\}$ je systém podprostorů prostoru V indexovaných I. Pak platí:*

1. *Průnik těchto podprostorů $\bigcap_{i\in I} W_i$ je podprostorem V. Navíc pro každý podprostor $U \leq V$, pro nějž $\forall i \in I$, $U \leq W_i$, platí také $U \leq \bigcap_{i\in I} W_i$.*

2. *Spojení těchto podprostorů $\bigvee_{i\in I} W_i$ je podprostorem V. Navíc pro každý podprostor $U \leq V$, pro nějž $\forall i \in I$, $W_i \leq U$, platí také $\bigvee_{i\in I} W_i \leq U$.*

Důkaz. Nechť $r, s \in \mathbb{R}$.

1. Pokud $u, v \in \bigcap_{i\in I} W_i$, pak $\forall i \in I$, $u, v \in W_i$. Všechny W_i jsou podprostory, tedy $\forall i \in I$, $ru + sv \in W_i$, čili $ru + sv \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Druhá část je zřejmá, protože každý podprostor U všech W_i je jejich podmnožinou, tudíž také podmnožinou jejich průniku. Protože je U uzavřen na operace, je také podprostorem $\bigcap_{i\in I} W_i$.

2. Nechť $u, v \in \bigvee_{i\in I} W_i$, tedy existují konečné množiny J, K a vektory $u_j \in W_j, j \in J$, a $v_k \in W_k, k \in K$ takové, že $u = \sum_{j\in J} u_j$, $v = \sum_{k\in K} v_k$. Dodefinujme $\forall j \in K \setminus J$, $u_j := 0$, a $\forall k \in J \setminus K$, $v_k := 0$. Pak platí $ru_i + sv_i \in W_i$ pro všechna $i \in J \cup K$ a tedy $ru + sv = \sum_{i\in J\cup K} ru_i + sv_i \in \bigvee_{i\in I} W_i$. Tím je dokázána první část druhého tvrzení. Pokud U je podprostor V takový, že $W_i \leq U$ pro všechna $i \in I$ a $w \in \bigvee_{i\in I} W_i$, pak pro nějakou konečnou množinu $J \subset I$ a pro všechna $j \in J$ existují vektory $w_j \in W_j$ takové, že $w = \sum_{j\in J} w_j$. Protože $\forall j \in J, W_j \leq U$, je pro tato j také $w_j \in U$. Z uzavřenosti U na součty vektorů $w \equiv \sum_{j\in J} w_j \in U$, což jsme měli dokázat.

□

Pokud jsou pro vás věta a důkaz příliš složité, zkuste je nejprve přeformulovat pro případ $I = \{1, 2\}$, tedy spojení a průniku dvou podprostorů. Druhé části obou tvrzení vlastně říkají, že průnik je největší (vzhledem k inkluzi) podprostor obsažený ve všech podprostorech v systému a spojení je nejmenší (vzhledem k inkluzi) podprostor, který obsahuje všechny podprostory v systému.

Na aritmetických vektorových prostorech nás tyto dvě konstrukce vedou ke dvěma základním příkladům podprostorů, které se budou objevovat v početních úlohách:

1. Definujme W_i jako prostor všech řešení homogenní rovnice $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, $a_{ij} \in \mathbb{F}$, přičemž i běží přes množinu $I = \{1, \dots, m\}$. Pak $\bigcap_{i=1}^m W_i$ je množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí A, tuto množinu budeme značit W_A. První tvrzení věty tedy říká, že množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tvoří podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$.

2. Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k$ je konečná posloupnost (budeme krátce říkat **skupina**) vektorů z vektorového prostoru V nad $\mathbb{F}$. Definujme $W_i := \langle v_i \rangle$, tedy libovolný prvek z W_i má tvar rv_i pro nějaké $r \in \mathbb{F}$. Pak libovolný prvek z $\bigvee_{i=1}^k W_i$ má tvar $\sum_{i=1}^k r_i v_i$. Tomuto tvaru říkáme **lineární kombinace vektorů ze skupiny** $v_1, v_2, \dots, v_k$ **s koeficienty** r_i a celé množině $\bigvee_{i=1}^k W_i$ **lineární obal skupiny vektorů**. Značíme jej $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$. Druhé tvrzení věty říká, že je to nejmenší podprostor obsahující množinu vektorů $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Všimněme si, že věta umožňuje mít homogenní soustavu s jakkoli velkým (i nekonečným) počtem rovnic, podobně lineární obal je definován pro libovolně velkou (i nekonečnou) množinu vektorů z V, jako spojení lineárních obalů všech jejích prvků.

V dalších dvou přednáškách se soustředíme na otázku souvislosti těchto dvou konstrukcí podprostorů. Budeme se snažit zapsat množinu řešení homogenní soustavy jako lineární obal nějaké skupiny vektorů, a to co nejefektivněji. Nakonec uvidíme, že výsledek bude velmi užitečný i pro řešení soustav nehomogenních.

Cvičení

1. **(3)** Řekneme, že matice $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je *symetrická* (resp. *antisymetrická*), jestliže platí $a_{ij} = a_{ji}$ (resp. $a_{ij} = -a_{ji}$), kde a_{ij} je element ma-

tice A nacházející se v i-tém řádku a j-tém sloupci. Ověřte, že množina S_n všech symetrických matic typu $n \times n$ tvoří podprostor prostoru všech matic typu $n \times n$ a stejně tak i množina A_n všech antisymetrických matic. Dále ověřte, že $S_n \cap A_n = 0$ a $S_n \vee A_n = M_{nn}(\mathbb{F})$.

2. **(3)** Řekneme, že matice $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ je *hermitovská* (resp. *antihermitovská*), jestliže platí $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (resp. $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$). Ověřte, že hermitovské (resp. antihermitovské) matice tvoří podprostory prostoru všech matic, že tento je jejich spojením a že jejich průnik je nulový podprostor.

3. **(3)** Pro matici $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ definujeme její *stopu* jako $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Ověřte, že množina všech matic s nulovou stopou tvoří podprostor $M_{nn}(\mathbb{F})$.

4. **(3)** Ověřte, že množina všech horních trojúhelníkových matic ($a_{ij} = 0$ pro $i > j$) v $M_{mn}(\mathbb{F})$ tvoří podprostor $M_{mn}(\mathbb{F})$.

5. **(3)** Ověřte, že množina všech ostře horních trojúhelníkových matic ($a_{ij} = 0$ pro $i \geq j$) z $M_{mn}(\mathbb{F})$ tvoří podprostor prostoru všech horních trojúhelníkových matic, a tedy i podprostor $M_{mn}(\mathbb{F})$.

6. **(4)** Mějme v $\mathbb{R}^2$ obvyklou kartézskou soustavu souřadnic. Rozhodněte, zda následující podmnožiny tvoří podprostor:

   (a) všechny body ležící na dané přímce

   (b) všechny body ležící v prvním kvadrantu

   (c) všechny body ležící v prvním nebo třetím kvadrantu

   (d) všechny body ležící v prvním nebo druhém kvadrantu

7. **(4)** Ověřte, že řešitelnost soustavy rovnic $Ax = b$ znamená, že vektor b je lineární kombinací sloupců matice A a její koeficienty tvoří vektor x.

8. **(4)** Zjistěte, zda vektor $v \in \mathbb{R}^4$ je lineární kombinací vektorů u_1, u_2, u_3. V kladném připadě určete čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, že $v = au_1 + bu_2 + cu_3$:

   (a) $v = (2, 0, 3, 1), u_1 = (1, 0, 1, -2), u_2 = (2, -1, 0, 1), u_3 = (1, -1, -2, -2)$

   (b) $v = (3, 1, -1, 2), u_1 = (1, 1, 1, 2), u_2 = (1, 0, -1, 0), u_3 = (0, -1, 1, -2)$

   (c) $v = (2, 1, 2, -1), u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (1, 2, 1, -2), u_3 = (-1, 1, -1, -1)$

9. **(4)** Zjistěte, zda vektor v je v lineárním obalu vektorů u_i:

   (a) $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (0, 1, 2)$, $u_3 = (2, 1, 3)$, $v = (1, 0, 0)$

   (b) $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $u_3 = (3, 0, 2)$, $v = (0, 3, -1)$

   (c) $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $u_3 = (3, 0, 2)$, $v = (4, 3, 2)$

   (d) $u_1 = (1, 0, 1, 2)$, $u_2 = (2, 1, -1, 0)$, $u_3 = (-1, 2, 0, 1)$, $u_4 = (0, 3, -2, -1)$, $v = (1, 5, 0, 4)$

   (e) $u_1 = (1, 0, 1, 2)$, $u_2 = (2, 1, -1, 0)$, $u_3 = (-1, 2, 0, 1)$, $u_4 = (0, 3, -2, -1)$, $v = (2, 1, 3, 1)$

10. **(3)** Popište průnik podprostorů $\mathbb{R}^5$: $V_1 = \langle(1, 2, 1, 0, -1), (2, 1, 0, 1, -1), (1, 0, 0, 0, 1)\rangle$ a $V_2 = \langle(1, 2, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, -2), (0, 1, -5, 5, 2)\rangle$

11. **(3)** Popište průnik podprostorů $\mathbb{R}^4$:

   (a) $V_1 = \langle(1, 1, -1, 0), (1, 0, 1, 2), (1, 3, 1, -1)\rangle$, $V_2 = \langle(0, 0, 0, 1), (2, 3, -4, -2), (3, 2, -1, 2)\rangle$

   (b) V_1: $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$, V_2: $x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + 5x_1 - x_3 - x_4 = 0$

12. **(3)** Popište průnik podprostorů $\mathbb{R}^3$: V_1: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, V_2: $x_1 + 11x_3 = 0$.

13. **(3)** Zjistěte, zda vektor v leží ve spojení prostorů V_1 a V_2:

   (a) $V_1 = \langle(1, 0, 1, 2), (2, 1, 3, 1)\rangle$, $V_2 = \langle(1, -1, 0, 1), (0, -1, -1, 1)\rangle$, $v = (0, 0, 0, 1)$

   (b) $V_1 = \langle(1, 0, 1, 2), (2, 1, 3, 1)\rangle$, $V_2 = \langle(1, -1, 0, 1), (0, -1, -1, 1)\rangle$, $v = (0, 1, 1, 0)$

   (c) $V_1 = \langle(1, 1, 2), (2, 1, 1)\rangle$, $V_2 = \langle(0, 1, 3)\rangle$, $v = (1, 1, 1)$

   (d) $V_1 = \langle(1, 1, 2), (2, 1, 1)\rangle$, $V_2 = \langle(0, 1, 3)\rangle$, $v = (3, 1, 0)$

14. **(3)** Dokažte, že množina $\left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) | b \in \mathbb{R}\right\}$ spolu s operací násobení matic je grupa.

15. **(3)** Dokažte, že množina $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) | ad - bc = 1\right\}$ spolu s operací násobení matic je grupa.

17. **(2)** Dokažte, že množina všech regulárních matic stupně n s operací násobení je grupa.

18. **(3)** Popište grupu symetrie rovnostranného trojúhelníka - tedy množinu všech shodných zobrazení v rovině, které daný trojúhelník zobrazují na něj samotný. Je tato grupa komutativní?

19. **(3)** Popište grupu symetrie čtverce. Je tato grupa komutativní? A co grupa přímých symetrií čtverce, tedy těch, které lze napsat jako rotaci kolem středu čtverce?

20. **(2)** Popište grupu symetrie čtyřstěnu a najděte počet jejích prvků. Je tato grupa komutativní?

21. **(2)** Popište grupu symetrie krychle a najděte počet jejích prvků. Je tato grupa komutativní? Proč je tato grupa stejná jako grupa symetrie pravidelného osmistěnu?

22. **(1)** Popište grupu symetrie pravidelného dvacetistěnu a najděte počet jejích prvků. Je tato grupa komutativní? Proč je tato grupa stejná jako grupa symetrie pravidelného dvanáctistěnu?

23. **(3)** Dokažte, že množina všech sudých celých čísel s operací sčítání je grupa. Zobecněte na množinu všech celých čísel dělitelných přirozeným číslem k.

24. **(3)** Zdůvodněte, proč množina $M_{nn}(\mathbb{R})$ spolu s maticovým násobením není grupa.

25. **(3)** Popište průnik podprostorů $W_1 = \langle(1,0,1,1),(2,1,1,0)\rangle$ a podprostoru $W_2 = \{x_1 + x_3 = 0, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$

26. **(3)** Dokažte tvrzení 2 a 3 v lemmatu 5.

27. **(4)** Rozhodněte, zda je množina $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=1\}$ podprostor $\mathbb{R}^3$. Zdůvodněte.

28. **(4)** Rozhodněte, zda je $\mathbb{R}$ podprostorem $\mathbb{C}$. Zdůvodněte.

29. **(3)** Rozhodněte, zda je množina všech posloupností $(a_i)_1^\infty$, splňujících $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, podprostor prostoru všech posloupností.

30. **(2)** Rozhodněte, zda je množina všech periodických funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ spolu s nulovou funkcí vektorový prostor. A co množina všech funkcí s racionální periodou?

31. **(3)** Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Rozhodněte, zda je množina $\{X \in M_{nk}(\mathbb{F}) | AX = 0\}$ vektorový prostor.

32. **(3)** Za jakých podmínek je sjednocení $W_1 \cup W_2$ dvou podprostorů vektorový prostor?

33. **(3)** Dokažte, že pokud $W_1 \cap W_2 = 0$, pak lze každý vektor z $W_1 \vee W_2$ vyjádřit jednoznačně jako součet vektoru z W_1 a vektoru z W_2.

34. **(4)** Popište průnik a spojení podprostorů $\langle (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0) \rangle$ a $\langle (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$ v $\mathbb{R}^4$.

35. **(2)** Nechť V je vektorový prostor W_1, W_2, W_3 podprostory v něm. Rozhodněte, zda platí $(W_1 \vee W_2) \cap W_3 = W_1 \vee (W_2 \cap W_3)$. Odpověď zdůvodněte.

36. **(3)** Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$. Dokažte, že množina všech matic $X \in M_{nn}(\mathbb{F})$, které komutují s A, je vektorový prostor.

37. **(2)** Nechť V je vektorový prostor nad T, $v \in V, c \in T$. Dokažte z axiómů, že pokud $c.v = 0$, pak buď $c = 0$, nebo $v = 0$.

38. **(4)** Rozhodněte, zda jsou následující množiny vektorovými podprostory v prostoru V všech funkcí z $\langle a, b \rangle$ do $\mathbb{R}$:

    (a) $\{f \in V | f(a) = 1\}$
    (b) $\{f \in V | f(b) = 0\}$
    (c) $\{f \in V | f(a) - 2f(b) = 0\}$

39. **(4)** Rozhodněte, zda je vektorovým prostorem množina polynomů, které mají kořen 2.

40. **(3)** Rozhodněte, zda je vektorovým prostorem množina polynomů, které mají nějaký racionální kořen.

41. **(3)** Nechť $M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ je množina vektorů nějakého vektorového prostoru V nad $\mathbb{F}$. Je množina všech m-tic $(r_1, r_2, \dots, r_m)$, $r_i \in \mathbb{F}$ takových, že lineární kombinace $\sum_1^m r_i v_i$ je nulový vektor, podprostorem $\mathbb{F}^m$? Zdůvodněte.

42. **(4)** Matici
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
napište jako součet symetrické a antisymetrické matice.

Řešení:

6. a) ano, pokud přímka prochází počátkem soustavy souřadnic, jinak ne, b) ne, c) ne, d) ne, 8. a) $(a, b, c) = (1, 1, -1)$, b) v není lineární kombinací u_1, u_2, u_3, c) $(a, b, c) = (3t, 1 - t, -1 + 2t), t \in \mathbb{R}$, 9. a) ano, b) ano, c) ne, d) ano, e) ne, 10. $\langle (9, 19, 10, -3, -24) \rangle$, 11. a) $\langle (2, 3, -4, -2), (3, 2, -1, 2) \rangle$, b) $\langle (5, -1, 3, -3) \rangle$, 12. $\langle (-11, 6, 1) \rangle$, 13. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

Kapitola 4

Báze a dimenze

Pojďme si nejprve přesněji zformulovat definici uvedenou na konci minulé přednášky:

Definice 9. Nechť V je vektorový prostor, M množina vektorů v něm. Řekneme, že $W \leq V$ je lineárním obalem M, pakliže W je nejmenší podprostor ve V obsahující M. Říkáme také, že množina M podprostor W **generuje** nebo že je to jeho **množina generátorů**. Budeme používat označení $W = \langle M \rangle$.

Nejmenší podprostor obsahující M znamená, že už žádný jeho vlastní podprostor celé M neobsahuje.

Pokud $M = \emptyset$, pak $\langle M \rangle = 0$. Pro M neprázdnou definice znamená, že každý vektor z $w \in W$ lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů z M, $w = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i$, $v_i \in M$.

Množina generátorů je způsob, jak při popisu podprostoru nevypisovat všechny vektory v něm, ale vystačit si jen s některými. Pokud dále některé z nich jdou vyjádřit pomocí jiných, lze je vynechat a dosáhnout tak popisu efektivnějšího. K tomu slouží pojem lineární závislosti:

$\langle M \rangle$ je množina všech lineárních kombinací vektorů z M, protože nejmenším podprostorem obsahujícím M je právě spojení lineárních obalů $\langle w \rangle$ pro všechna $w \in M$.

Definice 10. Lineární kombinace $\sum_{i=1}^{k} r_i v_i$ se nazývá **triviální**, pokud všechny koeficienty r_i jsou nulové, jinak je **netriviální**. Nechť M je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru V. Řekneme, že M je **lineárně závislá**, pokud existuje netriviální lineární kombinace prvků M, jejímž výsledkem je nulový vektor. V opačném případě je M **lineárně nezávislá**.

Triviální kombinace samozřejmě dává nulový vektor vždy, jde tedy o to, zda existuje ještě nějaká jiná. Pokud například skupina vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ obsahuje nulový vektor, dejme tomu na pozici j, pak stačí vzít $r_j = 1$ a ostatní

$r_i = 0$ a pak máme $\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = 0$, tedy množina $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ je lineárně závislá. Podobně pokud množina obsahuje s vektorem v také nějaký jeho další násobek rv, je lineárně závislá, protože stačí brát koeficienty $-r$ a 1 u těchto dvou vektorů a vynulovat koeficienty ostatní. Množina je lineárně závislá právě tehdy, když lze nějaký její vektor vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních: rovnost $v = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i$ snadno přepíšeme na $0 = v - \sum_{i=1}^{k} r_i v_i$ a naopak z netriviální lineární kombinace $\sum_{i=1}^{j} s_i u_i$ můžeme vyjádřit kterýkoli vektor u_i s nenulovým koeficientem s_i pomocí ostatních.

Pokud je množina M lineárně závislá, pak je lineárně závislá i každá její nadmnožina: každá netriviální lineární kombinace prvků z M je totiž zároveň lineární kombinací prvků z nadmnožiny. Ze stejných důvodů platí, že pokud M generuje vektorový prostor V, pak jej generuje i každá $N \subset V$, která je nadmnožinou M.

Definice 11. Lineárně nezávislá množina, která generuje vektorový prostor $V \neq 0$, se nazývá **báze** V. Pokud $V = 0$, je jeho bází prázdná množina.

Báze je klíčový pojem lineární algebry, protože nám umožňuje definovat pojem dimenze jakožto počet prvků libovolné báze. V tomto kurzu se soustředíme na prostory, které mají dimenzi konečnou. Báze tak, jak ji budeme definovat, stejně není v prostorech nekonečné dimenze příliš užitečným pojmem - sice vždy existuje (za předpokladu platnosti axiomu výběru), ale v mnoha běžných případech nelze žádnou konkrétní zkonstruovat.

Je to možná trochu divné, ale pojem „býti konečné dimenze“ jsme schopni zavést dříve než pojem „dimenze“ jako takový.

Definice 12. Vektorový prostor, ve kterém existuje konečná množina generátorů, nazýváme **konečně generovaný** nebo též **prostor konečné dimenze**.

Lemma 8. *Pokud V je konečně generovaný vektorový prostor, pak z každé jeho množiny generátorů lze vybrat konečnou bázi.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že z každé nekonečné množiny generátorů M prostoru $V \neq 0$ lze vybrat konečnou podmnožinu, která také generuje V. Protože V je konečně generovaný, existuje množina $N = \{v_1, \ldots, v_k\}$, která generuje V. Protože M generuje V, lze každý vektor z N zapsat jako lineární kombinaci prvků z M, $v_i = \sum_{j=1}^{k_i} r_{ij} u_{ij}$. Označme $M_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{ik_i}\}$. Libovolný vektor $v \in V$ lze zapsat jako lineární kombinaci prvků z N a tedy

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} (s_i r_{ij}) u_{ij}$$

také jako lineární kombinaci prvků z $M' := \bigcup_{i=1}^{k} M_i$. Tedy M' je hledaná konečná podmnožina.

Lze tedy předpokládat, že množina generátorů M je konečná. Nyní mezi všemi podmnožinami množiny M, které stále generují V, vyberme nějakou $K = \{v_1, \dots, v_n\}$ s nejmenším počtem prvků. Ukážeme sporem, že K už je lineárně nezávislá, tedy báze V.

Pokud by existovala netriviální lineární kombinace $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 0$, pak by bylo možné některý z vektorů v_j vyjádřit pomocí ostatních jako $v_j = -\frac{1}{r_j}\sum_{i\neq j} r_i v_i$. Libovolný vektor $v \in V$ pak lze napsat jako

$$v = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i = \sum_{i\neq j} s_i v_i - \frac{s_j}{r_j}\sum_{i\neq j} r_i v_i = \sum_{i\neq j}\left(s_i - \frac{s_j}{r_j} r_i\right) v_i,$$

tedy jako lineární kombinaci prvků $K \setminus \{v_j\}$. To je ale množina s menším počtem prvků než K, a tudíž podle předpokladu nemůže generovat celé V. Dospěli jsme ke sporu, a tedy K je báze.

Případ $V = 0$ je zřejmý. □

Následující tvrzení vešlo pod známost pod názvem Steinitzova věta nebo Steinitzovo lemma o výměně. Říká, že v množině generátorů můžeme vyměnit vhodné prvky „kus za kus“ s prvky nějaké lineárně nezávislé množiny tak, abychom po výměně měli stále množinu generátorů. Důsledkem bude mimojiné skutečnost, že všechny báze mají stejný počet prvků, a tedy že dimenze je dobře definována.

Ernst Steinitz (1871-1928)

Věta 3. *Buď $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ množina generátorů vektorového prostoru V a $N = \{v_1, \dots, v_k\}$ lineárně nezávislá množina ve V. Pak $k \leq n$ a při vhodném očíslování vektorů $u_1, \dots, u_n$ množina $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots u_n\}$ generuje V.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle počtu k lineárně nezávislých vektorů. Pokud $k = 1$, pak musí být $1 \leq n$, protože v opačném případě $M = \emptyset$, $\langle M\rangle = 0$ a tedy $N = \{v_1\} = \{0\}$ není lineárně nezávislá množina. Protože M generuje V, existují čísla r_i taková, že $v_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i$, a protože $v_1 \neq 0$, musí pro některý index j být $r_j \neq 0$. Pokud $j \neq 1$, pak přečíslujeme vektory u_i, aby tomu tak bylo. Lze tedy psát $u_1 = \frac{1}{r_1} v_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{r_i}{r_1} u_i$. Každý vektor, který je lineární kombinací $u_1, \dots, u_n$, je tudíž také lineární kombinací $v_1, u_2, \dots, u_n$, čili $\langle v_1, u_2, \dots, u_n\rangle = V$.

Předpokládejme proto platnost tvrzení pro $k-1$, ukážeme, že pak musí platit i pro k. Pokud $\{v_1,\ldots,v_k\}$ jsou lineárně nezávislé, pak $\{v_1,\ldots,v_{k-1}\}$ jsou lineárně nezávislé a tudíž podle indukčního předpokladu generuje množina $\{v_1,\ldots,v_{k-1},u_k,\ldots,u_n\}$ vektorový prostor V. Zároveň musí být $n\geq k$, protože jinak by bylo v_k lineární kombinací vektorů $v_1,\ldots,v_{k-1}$, což je ve sporu s lineární nezávislostí množiny $\{v_1,\ldots,v_k\}$. Tedy v_k lze vyjádřit jako $\sum_{i=1}^{k-1} r_iv_i+\sum_{i=k}^{n} r_iu_i$, kde pro nějaké $j\geq k$ musí být $r_j\neq 0$, jinak bychom opět dostali spor s lineární nezávislostí množiny $\{v_1,\ldots,v_k\}$. Přečíslujme zbylé vektory $u_k,\ldots,u_n$ tak, aby $j=k$, pak je možné podobně jako v případě $k=1$ vyjádřit u_k jako lineární kombinaci množiny $\{v_1,\ldots,v_k,u_{k+1},\ldots,u_n\}$, a tedy i libovolný vektor jako lineární kombinaci z této množiny. □

Steinitzova věta má celou řadu důležitých důsledků:

Důsledek 1. *Všechny báze konečně generovaného vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Pokud M je báze V o m prvcích a N je báze V o n prvcích, pak ze Steinitzovy věty plyne, že $m\geq n$ a zároveň $n\geq m$, čili $m=n$. □

Definice 13. Nechť V je konečně generovaný vektorový prostor. Počet prvků libovolné báze V nazýváme **dimenzí** V, značíme $\dim V$. Pokud vektorový prostor není konečně generovaný, píšeme $\dim V=\infty$.

Někdy budeme ve zkratce psát V_n pro vektorový prostor dimenze n.

Důsledek 2. *Počet prvků každé lineárně nezávislé množiny ve V_n je menší nebo roven n, a pokud je roven, už musí být tato množina bází.*

Důkaz. Stačí vzít ve Steinitzově větě za M libovolnou bázi V_n a za N zadanou množinu. □

Důsledek 3. *Počet prvků každé množiny generátorů prostoru V_n je větší nebo roven n, a pokud je roven, už musí být tato množina bází.*

Důkaz. Ukážeme, že n-prvková množina generátorů N prostoru V_n musí být lineárně nezávislá. Kdyby nebyla, bylo by možné z ní vybrat podle lemmatu 8 lineárně nezávislou vlastní podmnožinu N', pro niž $\langle N\rangle=\langle N'\rangle$. Pak ale N' je báze, která má méně prvků než je dimenze vektorového prostoru, což je spor s důsledkem 1. □

Poslední dvě tvrzení znamenají, že báze jsou právě největší lineárně nezávislé množiny a také právě nejmenší množiny generátorů.

Důsledek 4. *Každý podprostor W konečně generovaného vektorového prostoru V_n je konečně generovaný.*

Důkaz. Všechny lineárně nezávislé podmnožiny W jsou zároveň lineárně nezávislé podmnožiny V_n a mají tedy nanejvýš n prvků. Zvolme z nich nějakou $N = \{v_1, \ldots, v_k\}$ s maximálním počtem prvků. Pokud by N negenerovala celé W, pak by existoval vektor $u \in W$, pro nějž $u \notin \langle N \rangle$. Kdyby $N \cup \{u\}$ byla lineárně závislá množina, pak by existovala netriviální lineární kombinace $ru + \sum_1^k s_i v_i = 0$. Pak ale buď $r = 0$, což je ve sporu s lineární nezávislostí N, nebo $r \neq 0$, což je zase ve sporu s $u \notin \langle N \rangle$. Tedy $N \cup \{u\}$ musí být lineárně nezávislá podmnožina ve W. O N jsme ale předpokládali, že je maximální lineárně nezávislá množina ve W, takže N musí generovat celé W. Tedy W je konečně generovaný. □

Pokud teď vezmeme ve V_n libovolnou bázi $\{u_1, \ldots, u_n\}$ a ve W bázi N, pak druhá část Steinitzovy věty říká, že množina $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ generuje V_n, a jelikož je n-prvková, je to báze V_n. Tedy libovolnou lineárně nezávislou podmnožinu V_n lze doplnit na bázi.

Uveďme si nyní několik příkladů bází a dimenzí podprostorů, jimiž jsme se dosud zabývali.

1. Množina vektorů $\{e_1, \ldots, e_n\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$, kde

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1), \end{aligned}$$

   se nazývá **kanonická báze**. Tedy $\dim \mathbb{F}^n = n$.

2. Množina matic $\{E_{ij}, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$, kde E_{ij} je matice, jejíž ij-tý element je 1 a ostatní 0, je báze prostoru $M_{mn}(\mathbb{F})$ nad $\mathbb{F}$ dimenze mn.

3. Množina $\{1, x, x^2, \ldots\}$ je báze prostoru všech polynomů $P(x, \mathbb{F})$ nad $\mathbb{F}$. Není to tedy prostor konečné dimenze.

4. Množina $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$. Tento prostor má tedy dimenzi 4, zatímco $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$ má dimenzi 2.

Další důležité příklady uvidíme v následující přednášce, v níž se budeme zabývat vztahem dimenze a řešení soustavy lineárních rovnic.

Věta 4 (o dimenzi spojení a průniku)**.** *Nechť V je vektorový prostor a U, W jsou dva jeho podprostory konečné dimenze. Pak*

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim U \vee W$$

Důkaz není těžký, ale necháme ho jako **bonusový**

Důkaz. Prostor $U \cap W$ je podprostorem prostoru W a je tedy také konečné dimenze. Zvolme v něm libovolnou bázi $\{v_1, \ldots, v_k\}$, tuto bázi lze doplnit vektory $u_1, \ldots, u_p$ na bázi U a vektory $w_1, \ldots, w_q$ na bázi W. Ukážeme, že množina $M = \{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_q\}$ je bází $U \vee W$.

Je zřejmé, že M generuje $U \vee W$. Každý vektor $v \in U \vee W$ je součtem nějakého vektoru $u \in U$ a nějakého vektoru $w \in W$. Každý z nich je lineární kombinací prvků M a tedy i v je lineární kombinací prvků M. Předpokládejme nyní, že

$$0 = \sum_{i=1}^{p} r_i u_i + \sum_{i=1}^{k} s_i v_i + \sum_{i=1}^{q} t_i w_i$$

Tedy vektor

$$u = -\sum_{i=1}^{p} r_i u_i = \sum_{i=1}^{k} s_i v_i + \sum_{i=1}^{q} t_i w_i$$

je zároveň prvkem U a W, tedy prvkem jejich průniku. Je proto možné jej vyjádřit jako $u = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i$. Pak ale

$$\sum_{i=1}^{k} x_i v_i + \sum_{i=1}^{p} r_i u_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} (s_i - x_i) v_i + \sum_{i=1}^{q} t_i w_i = 0$$

Jelikož množiny $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_k\}$ a $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_q\}$ jsou lineárně nezávislé, musí být v obou rovnostech všechny koeficienty nulové. To ale znamaná, že i množina M je lineárně nezávislá.

Zkonstruovali jsme tedy z báze prostoru $U \cap W$ báze prostorů U, W a $U \vee W$. Dokazovaná rovnost plyne prostým dosazením počtů prvků těchto bází: $(p + k) + (k + q) = k + (p + k + q)$. $\square$

Speciální případ věty o dimenzi spojení a průniku nastává, pokud $U \cap W = 0$. Pak mluvíme místo o spojení o **direktním součtu** $U \oplus W$ podprostorů. Pokud U a W jsou dva podprostory V takové, že $U \oplus W = V$, říkáme, že U je **doplňkem** W ve V. Stejně jako spojení, i direktní součet má smysl definovat i pro více prostorů:

Tato definice a následující dvě věty jsou **bonus**. Stačí, když budete umět napsat větu o dimenzi spojení a průniku pro případ direktního součtu.

Definice 14. Nechť V je vektorový prostor, I indexová množina a $\{W_i | i \in I\}$ systém podprostorů V indexovaný touto množinou, přičemž pro každé $j \in I$ platí $W_j \cap \left(\bigvee_{i \neq j} W_i\right) = 0$. Pak nazveme $\bigvee_{i \in I} W_i$ direktním součtem podprostorů W_i, značíme $\bigoplus_{i \in I} W_i$.

Věta 5. *Nechť V je vektorový prostor, I indexová množina, $\{W_i | i \in I\}$ systém podprostorů V a $\bigoplus_{i \in I} W_i = V$. Pak pro každý vektor $v \in V$ existuje konečná množina $J \subset I$ taková, že v lze zapsat jednoznačně jako $\sum_{j \in J} w_j$, kde $w_j \in W_j$ jsou nenulové vektory.*

Důkaz. Existence požadovaného zápisu $v = \sum_{j \in J} w_j$ plyne z definice $\bigvee_{i \in I} W_i$, přičemž jistě můžeme vzít takový zápis, v němž jsou všechny vektory w_j nenulové. Pokud by existoval druhý takový zápis $v = \sum_{k \in K} w'_k$, pak $0 = \sum_{i \in J \cup K} (w_i - w'_i)$, kde jsme dodefinovali $w_i = 0$ pro $i \in K \setminus J$ a $w'_i = 0$ pro $i \in J \setminus K$. Pro každé $j \in J \cup K$ je

$$w_j - w'_j = - \sum_{\substack{i \in (J \cup K) \\ i \neq j}} (w_i - w'_i) \in W_j \cap \left(\bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} W_i \right),$$

což je podle předpokladu nulový podprostor, tudíž oba zápisy jsou totožné. $\square$

Věta o dimenzi spojení a průniku se zdá být podobná princip inkluze a exkluze pro konečné množiny. Pokus zobecnit ji pro více než dva podprostory ale selhává. Platí alespoň verze pro (konečné) direktní součty:

Věta 6. *Nechť $W_1, \ldots, W_k$ jsou podprostory V_n takové, že $\bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ existuje. Pak*

$$\sum_{i=1}^{k} \dim W_i = \dim \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $k = 2$ tvrzení plyne z věty o dimenzi spojení a průniku. Předpokládejme tedy, že platí pro $k - 1$. Uvažujme podprostory $W_1, \ldots, W_k$ takové, že $\bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ existuje. Pak

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\}, \quad W_j \cap \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} W_i = 0$$

a tím pádem také

$$\forall j \in \{1, \ldots, k-1\}, \quad W_j \cap \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} W_i = 0$$

Tedy $\bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i$ existuje a podle indukčního předpokladu $\sum_{i=1}^{k-1} \dim W_i = \dim \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i$. Protože $W_k \cap \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i = 0$, plyne z věty o dimenzi spojení a průniku

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{k} W_i = \dim W_k + \dim \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i.$$

□

Cvičení

1. **(4)** Rozhodněte, zda dané množiny vektorů z $\mathbb{R}^4$ jsou lineárně závislé či nezávislé:

   (a) (1,1,0,1), (2,1,0,3), (3,0,1,2)

   (b) (2,1,3,2), (1,4,0,1), (5,3,1,0), (-1,9,7,9)

   (c) (1,3,0,2), (2,-1,1,0), (3,-5,2,-2)

   (d) (1,2,0,1), (2,0,1,-2), (-1,1,2,1), (0,1,2,-1)

2. **(4)** Rozhodněte, zda dané množiny vektorů z $\mathbb{R}^3$ jsou lineárně závislé ci nezávislé:

   (a) {(2,1,0), (4,1,2), (0,1,-4)}

   (b) {(2,1,0), (-4,-2,0)}

(c) {(1,2,1), (2,1,3)}

(d) {(1,2,1), (2,1,3), (0,0,0)}

(e) {(1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)}

(f) {(1,0,1), (2,0,-1), (0,1,3)}

3. Nechť $M \subset \mathbb{C}^n$. Rozhodněte, zda platí: M je lineárně nezávislá jako množina vektorů z $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$ právě když je lineárně nezávislá jako množina vektorů z $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$.

4. **(3)** Najděte nějakou bázi prostoru $S_n(\mathbb{F})$ všech symetrických matic stupně n a určete jeho dimenzi.

5. **(3)** Najděte nějakou bázi prostoru $A_n(\mathbb{F})$ všech antisymetrických matic stupně n a určete jeho dimenzi.

6. **(3)** Najděte nějakou bázi prostoru $P(x, \mathbb{F})$ všech polynomů a dokažte, že nemá konečnou dimenzi. Jakou dimenzi má jeho podprostor všech polynomů stupně nejvýše n?

7. **(2)** Ukažte, že prostor všech posloupností $(a_i)_1^\infty$, splňujících $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je konečně generovaný a určete jeho bázi.

8. **(3)** Určete bázi a dimenzi prostoru $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$.

9. **(3)** Mějme množinu M vektorů v $\mathbb{F}^n$, vytvořme z ní množinu N vektorů v $\mathbb{F}^{n-m}$ tak, že vynecháme u každého vektoru posledních m složek. Dokažte, že pokud je N lineárně nezávislá, pak je M lineárně nezávislá.

10. **(3)** Mějme množinu M vektorů v $\mathbb{F}^n$, vytvořme z ní množinu N vektorů v $\mathbb{F}^{n+m}$ tak, že u každého vektoru zvolíme posledních m složek libovolně. Dokažte, že pokud je M lineárně nezávislá, pak je N lineárně nezávislá.

11. **(3)** Dokažte, že pokud V je direktním součtem svých podprostorů W_1 a W_2, pak je možné každý vektor z V napsat jednoznačně jako součet vektoru z W_1 a W_2. Ukažte dále, že pokud je V pouze spojením $W_1 \vee W_2$, ale nikoliv direktním součtem, pak každý vektor z V lze zapsat jako součet vektoru z W_1 a W_2 více způsoby.

12. **(3)** Nechť $M = \{u_1, \ldots, u_n\}$ je báze vektorového prostoru V, označme $W_i = \langle u_i \rangle$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dokažte, že pak $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$.

13. **(3)** Dokažte, že $M_{nn}(\mathbb{F}) = S_n(\mathbb{F}) \oplus A_n(\mathbb{F})$, tedy prostor všech čtvercových matic stupně n je direktním součtem prostoru všech symetrických a prostoru všech antisymetrických matic. Ověřte platnost věty o dimenzi spojení a průniku.

14. **(3)** Dokažte, že $M_{nn}(\mathbb{F})$ je spojením prostoru všech horních trojúhelníkových matic a prostoru všech dolních trojúhelníkových matic, ale není jejich direktním součtem. Určete průnik a ověřte platnost věty o dimenzi spojení a průniku.

15. **(1)** Definujme řetězec vektorových prostorů jako posloupnost $(V_0, V_1, \ldots, V_k)$, kde $V_0 = 0$ a pro všechna i je V_i vlastním podprostorem V_{i+1}. Délkou řetězce nazveme číslo k. Dokažte, že vektorový prostor není konečně generovaný právě když v něm existuje řetězec libovolné délky.

16. **(2)** Nechť V je vektorový prostor všech reálných posloupností $\{a_i\}_0^\infty$ a $M \subset V$ je podmnožina všech posloupností vyhovujících pro $n \geq 3$ rekurentní relaci $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + Ca_{n-3}$, kde A, B, C jsou reálné konstanty. Dokažte, že M je vektorový podprostor V dimenze 3.

17. **(2)** Dokažte, že prostor $P(x, \mathbb{F})$ všech polynomů není konečné dimenze.

18. **(2)** Dokažte, že je-li $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V nad T a $r_{ij} \in T, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$, pak vektory $s_i = (r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in}) \in T^n$ tvoří lineárně nezávislou množinu $\{s_1, s_2, \ldots s_k\}$ právě když je lineárně nezávislá množina $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, kde $v_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} u_j \in V$.

19. **(2)** Nechť V je vektorový prostor dimenze n, $W \leq V$, $\dim W = n - 1$, M je báze W, $u \in V$. Dokažte, že $M \cup \{u\}$ je báze V právě když u není prvkem W.

20. **(3)** Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ rozhodněte, jestli je vektor $(1, 1, 1)$ prvkem $\langle (1, 2, 1), (1, 0, -1), (2, 2, 0) \rangle$.

21. **(3)** Rozhodněte, jestli je funkce $\cos 3x$ v lineárním obalu množiny funkcí $\{1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x\}$ (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad $\mathbb{R}$)

22. **(3)** Rozhodněte, jestli je funkce $\cos 2x$ v lineárním obalu množiny funkcí $\{\cos x, \sin x, \sin 2x\}$ (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad $\mathbb{R}$)

23. **(2)** Nechť pro podprostory V_1, V_2 platí $\dim(V_1 \vee V_2) = 1 + \dim(V_1 \cap V_2)$. Pak buď $V_1 \subset V_2$ nebo $V_2 \subset V_1$. Dokažte.

Řešení: 1. a) nezávislé, b)závislé, c) závislé, d)nezávislé, 2. a)závislé, b)závislé, c)nezávislé, d)závislé, e)nezávislé, f)nezávislé.

Kapitola 5

Hodnost matice

Základní početní situace v lineární algebře je konečná množina vektorů v aritmetickém vektorovém prostoru. Chtěli bychom se naučit zjistit, jestli je taková množina lineárně nezávislá, jestli generuje nějaký vektorový prostor, určovat dimenzi jejího lineárního obalu, případně z ní vybírat bázi či ji na bázi doplňovat. K tomu se nám již potřetí v tomto kurzu budou hodit matice. Připomeňme: nejprve jsme je zavedli při studiu řešitelnosti soustav rovnic, poté jsme jim věnovali druhý pohled jakožto samostatným algebraickým objektům vybaveným nějakými operacemi.

Jako drobnou přípravu si uveďme následující lemma, které říká, co se děje s konečnou skupinou vektorů, pokud na ni aplikujeme „elementární transformaci“.

Lemma 9. *Nechť $M_0 = (v_1, \dots, v_p)$ je skupina vektorů ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{F}$, $j, k \in \{1, \dots, p\}$, $j \neq k$, $r, s \in \mathbb{F}$, $r \neq 0$. Označme*

$$M_1 = (v_1, \dots, v_{k-1}, rv_k, v_{k+1}, \dots, v_p)$$
$$M_2 = (v_1, \dots, v_{k-1}, v_k + sv_j, v_{k+1}, \dots, v_p)$$

Pak platí, že $\langle M_0 \rangle = \langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$. Dále platí, že M_0 je lineárně nezávislá, právě když je lineárně nezávislá M_1 a právě když je lineárně nezávislá M_2.

Důkaz. Dokážeme tvrzení pouze pro M_2, případ M_1 je zcela analogický a vlastně jednodušší. Pokud $v \in \langle M_0 \rangle$, pak existují $r_i \in \mathbb{F}$, že $v = \sum_{i=1}^{p} r_i v_i$. Pro pohodlí předpokládejme $k < j$. Pak lze v zapsat také jako

$$v = \sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i + r_k(v_k + sv_j) + \sum_{i=k+1}^{j-1} r_i v_i + (r_j - sr_k)v_j + \sum_{i=j+1}^{p} r_i v_i,$$

tedy $v \in \langle M_2 \rangle$. Naopak pokud $v \in \langle M_2 \rangle$, pak existují $s_i \in \mathbb{F}$ taková, že

$$v = \sum_{i=1}^{k-1} s_i v_i + s_k(v_k + s v_j) + \sum_{i=k+1}^{p} s_i v_i,$$

můžeme přepisem získat

$$v = \sum_{i=1}^{j-1} s_i v_i + (s_k s + s_j) v_j + \sum_{i=j+1}^{p} s_i v_i,$$

čili $v \in \langle M_0 \rangle$. Tím jsme dokázali obě inkluze $\langle M_0 \rangle \subset \langle M_2 \rangle$ i $\langle M_2 \rangle \subset \langle M_0 \rangle$ a tím pádem rovnost obou množin.

Podobně ověříme, že se zachovává lineární (ne)závislost. Pokud M_2 je lineárně nezávislá a $\sum_{i=1}^{p} r_i v_i = 0$, pak musí být v lineární kombinaci

$$\sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i + r_k(v_k + s v_j) + \sum_{i=k+1}^{j-1} r_i v_i + (r_j - s r_k) v_j + \sum_{i=j+1}^{p} r_i v_i,$$

prvků M_2 všechny koeficienty nulové. To ale znamená $r_i = 0$, pokud i není k ani j, dále $r_k = 0$, a díky tomu $r_j = r_j - s r_k = 0$. Tedy lineární kombinace $\sum_{i=1}^{p} r_i v_i$ musí být triviální, a tedy M_0 je lineárně nezávislá. Stejným způsobem lze ověřit opačnou implikaci. □

Z lemmatu jednoduše plyne i zachovávání dalších vlastností, jmenovitě dimenze a vlastnosti „býti bází V“. Z následující definice hned vidíme, k čemu se nám lemma bude hodit:

Definice 15. Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je matice. Jejím **řádkovým podprostorem** R_A rozumíme lineární obal skupiny všech m řádků matice A, chápaných jako vektory ve vektorovém prostoru $\mathbb{F}^n$. **Sloupcový podprostor** S_A matice A je lineární obal skupiny všech n sloupců matice A, chápaných jako prvky $\mathbb{F}^m$. Definujeme **hodnost** $h(A)$ **matice** A jakožto dimenzi prostoru R_A.

Anglický termín pro hodnost je **rank**.

Předchozí lemma tedy říká, že elementárními úpravami matice se zachovává řádkový prostor a tedy i hodnost matice. Tím pádem také víme, jak hodnost matice spočítat. Stačí matici převést do odstupňovaného tvaru, v něm už je skupina všech nenulových řádků lineárně nezávislá (rozmyslete si proč). Hodnost (původní i upravené) matice je potom rovna počtu nenulových řádků v matici v odstupňovaném tvaru.

Můžeme postupovat i opačně: chceme-li zjistit lineární nezávislost, dimenzi lineárního obalu apod. pro skupinu vektorů z aritmetického vektorového prostoru, sestavíme matici, která bude mít tyto vektory jako řádky, a určíme její hodnost.

Příklad. Určeme dimenzi lineárního obalu množiny $\{(3,-6,1,-1), (1,-2,3,1), (-2,4,0,1), (0,0,2,1)\}$ v $\mathbb{R}^4$. Úpravou vhodné matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zjišťujeme, že dimenze je 2. Při úpravě můžeme vynechat nulové řádky, tím se lineární obal ani dimenze nezmění.

Definice 16. Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je matice. Pak matici $A^T \in M_{nm}(\mathbb{F})$, jejíž ij-tý element je definován vztahem $a^T_{ij} := a_{ji}$, nazveme **maticí transponovanou** k A. Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ a $\bar{r}$ označuje komplexně sdružené číslo k $r \in \mathbb{C}$, pak matice $A^+ \in M_{nm}(\mathbb{F})$, kde ij-tý element je $a^+_{ij} := \bar{a}_{ji}$, nazveme **maticí hermitovsky sdruženou** k A.

Matici transponovanou tedy získáme prostým překlopením podle diagonály, takže z i-tého řádku v A se stane i-tý sloupec v A^T. Hermitovské sdružení je transpozice následovaná komplexním sdružením.

Věta 7. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{mn}(\mathbb{C})$, pak $h(A) = h(A^T)$, $h(B) = h(B^+)$.*

Tvrzení $h(A) = h(A^T)$ vlastně říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru A je stejná. To je zajímavé, protože jsou to podprostory ve dvou obecně různých aritmetických vektorových prostorech, $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$! Větu bychom mohli dokázat ověřením, že ačkoli se při řádkových úpravách matice mění její sloupcový prostor, jeho dimenze se zachovává. Podobným postupem bychom dokázali i $h(B) = h(B^+)$. My ale důkaz odložíme až na dobu, kdy budeme mít definovány pojmy lineárního zobrazení a skalárního součinu, které dodají novou interpretaci hodnosti matice a transponované matici. Důkaz využívající tuto interpretaci je přehlednější a jistým způsobem v sobě lépe nese smysl dokazovaného tvrzení.

Kritérium řešitelnosti soustavy rovnic je možné elegantně vyjádřit pomocí hodnosti matice. Výsledné tvrzení vešlo ve známost jako Frobeniova věta.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)

Věta 8. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je matice, $b \in \mathbb{F}^m$ vektor pravých stran. Soustava rovnic $Ax = b$ má řešení, právě když $h(A) = h(A|b)$.*

Je užitečné začít se na soustavy rovnic dívat jako na problém vyjádření zadaného vektoru (pravé strany) jako lineární kombinace jiných zadaných vektorů (sloupců matice).

Důkaz. Přepišme soustavu rovnic následovně:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Splnit tuto rovnost nějakými hodnotami $x_1, \ldots, x_n$ je totéž jako najít lineární kombinaci sloupců matice A, která se rovná vektoru $b \in \mathbb{F}^m$. To je možné právě tehdy, když vektor b náleží do sloupcového prostoru matice A, tedy když jeho přidání ke sloupcům A nezvýši dimenzi jimi generovaného prostoru. Dimenze sloupcového prostoru je podle předchozí věty rovna dimenzi prostoru řádkového. Jinými slovy, hodnost matice soustavy a rozšířené matice soustavy musejí být stejné. □

Pomocí hodnosti je možné také popsat velikost množiny řešení. Začněme nejprve soustavami homogenními:

Věta 9. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je matice. Řešením homogenní soustavy rovnic $Ax = 0$ s maticí A je vektorový podprostor $W_A \leq \mathbb{F}^n$ dimenze $n - h(A)$.*

Důkaz. Už jsme zmiňovali, že W_A je podprostor $\mathbb{F}^n$. Upravme matici A na redukovaný odstupňovaný tvar, z nějž vynecháme všechny nulové řádky. Počet nenulových řádků se rovná $p = h(A)$, tedy existuje právě $q := n - h(A)$ nepivotních sloupců. Pro přehlednost můžeme přeuspořádat neznámé tak, aby pivotními sloupci byly sloupce $1, \ldots, p$. Upravená matice pak má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1q} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2q} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{p1} & c_{p2} & \ldots & c_{pq} \end{pmatrix},$$

čímž jsme definovali matici $C \in M_{pq}(\mathbb{F})$. Množina vektorů

$$\begin{aligned} M = \{&(-c_{11}, -c_{21}, \ldots, -c_{p1}, 1, 0, \ldots, 0) \\ &(-c_{12}, -c_{22}, \ldots, -c_{p2}, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ &(-c_{1q}, -c_{2q}, \ldots, -c_{pq}, 0, 0, \ldots, 1)\} \end{aligned}$$

je lineárně nezávislá a každý její vektor je řešením soustavy rovnic. Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je libovolné řešení soustavy, označme jeho posledních q složek $r_1, \ldots, r_q$. Dosazením do všech rovnic soustavy zjistíme, že pro všechna $i \in \{1, \ldots, p\}$ už musí být $x_i = -\sum_{j=1}^{q} c_{ij} r_j$. Vzniklý vektor řešení

$$\left(-\sum_{j=1}^{q} c_{1j} r_j, -\sum_{j=1}^{q} c_{2j} r_j, \ldots, -\sum_{j=1}^{q} c_{pj} r_j, r_1, \ldots, r_q \right),$$

je lineární kombinací vektorů z M s koeficienty $r_1, \ldots, r_q$. Každé řešení soustavy $Ax = 0$ je tedy v lineárním obalu množiny M, proto je M bází W_A a $q = n - h(A)$ je dimenze tohoto prostoru. □

Už jsme si zvykli psát řešení homogenní soustavy rovnic vyjadřovat jako lineární obal určité množiny vektorů. Důkaz věty říká, že tato množina generátorů je ve skutečnosti bází, tedy že náš zápis je neefektivnější možný. Označení W_A budeme pro prostor řešení používat i nadále.

Když se podíváme na příklad soustavy rovnic z první přednášky a odmyslíme si pravou stranu (pokud je nulová, zůstane nulová i po všech řádkových úpravách), dostaneme matici v redukovaném odstupňovaném tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Musíme se přenést přes drobnou kosmetickou vadu, že pivotní sloupce nejsou na prvních třech místech, přesto ale snadno identifikujeme matici C z důkazu

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a napíšeme bázové vektory prostoru řešení:

$$\begin{aligned} u &= (2, -3, 1, 0, 0, 0), \\ v &= (2, \quad 1, 0, 1, 0, 0), \\ w &= (3, \quad 3, 0, 0, 2, 1) \end{aligned}$$

Zbývá nám popsat řešení soustav nehomogenních:

Věta 10. *Nechť $Ax = b$ je soustava rovnic s maticí $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ a vektorem pravých stran $b \in \mathbb{F}^m$. Nechť $x^P \equiv (x_1^P, \dots, x_n^P)$ je libovolné řešení této soustavy. Pak pro každé řešení $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$ soustavy $Ax = b$ existuje vektor $x^H \equiv (x_1^H, \dots, x_n^H) \in W_A$ takový, že $x = x^P + x^H$.*

Důkaz. Pokud $Ax^P = b$ a $Ax = b$, potom $A(x - x^P) = 0$, tedy $x^H := x - x^P$ je řešením homogenní rovnice. $\square$

Znamená to tedy, že stačí najít jediné libovolné řešení nehomogenní soustavy rovnic (tzv. **partikulární řešení**) a to nám spolu s obecným řešením homogenní soustavy dá všechna řešení soustavy nehomogenní. Výslednou množinu řešení soustavy $Ax = b$ pak budeme obvykle zapisovat ve tvaru $x^P + W_A$, kde W_A bude zapsáno jako lineární obal své báze. Partikulární řešení nejpohodlněji najdeme tak, že dosadíme za všechny neznámé na nepivotních sloupcích nuly. Konkrétně pokud soustava rovnic vede na odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} & b'_p \end{array}\right),$$

pak její partikulární řešení je $(b'_1, \dots, b'_p, 0 \dots, 0)$. Pro soustavu z první přednášky to znamená, že obecné řešení je

$$(9, 2, 0, 0, 4, 0) + \langle (2, -3, 1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 1, 0, 0), (3, 3, 0, 0, 2, 1) \rangle,$$

což opět můžeme srovnat se zápisem pomocí parametrů.

Věta 11. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{np}(\mathbb{F})$ jsou matice. Pak $h(AB) \le \min(h(A), h(B))$.*

Důkaz. Sloupce matice AB jsou lineární kombinací sloupců matice A, tedy $S_{AB} \le S_A$ a tedy $h(AB) \le h(A)$. Řádky AB jsou zase lineární kombinací řádků B, takže i $h(AB) \le h(B)$. $\square$

Věta 12. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je čtvercová matice. Pak A je regulární právě když $h(A) = n$.*

Důkaz. Množina sloupců jednotkové matice E_n je bází $\mathbb{F}^n$. Pokud A je regulární, pak má inverzní matici A^{-1}, $A^{-1}A = E_n$. Podle předchozí věty tedy

$n = h(E_n) = h(A^{-1}A) \leq \min(h(A), h(A^{-1}))$. Řádkové prostory matic A a A^{-1} jsou podprostory $\mathbb{F}^n$, tedy také $h(A) \leq n$, $h(A^{-1}) \leq n$. Musí být tedy $h(A) = h(A^{-1}) = n$.

Pokud naopak $h(A) = n$, pak řádky A tvoří bázi $\mathbb{F}^n$. Označme tyto řádky po řadě $a_1, \ldots, a_n$. Pro libovolný řádek e_i matice E_n, $i \in \{1, \ldots, n\}$ tedy existují čísla b_{ij}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, že e_i je lineární kombinací vektorů a_j s koeficienty b_{ij}, čili $e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_j$. Pak ale matice B splňuje vztah $BA = E$ a podle definice je inverzní maticí regulární matice A. □

Věta 13. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je libovolná matice, $B \in M_{mm}(\mathbb{F})$, $C \in M_{nn}(\mathbb{F})$ jsou regulární matice. Pak $h(BAC) = h(A)$.*

Důkaz. Platí $h(BAC) \leq \min(h(B), h(A), h(C)) = \min(n, h(A), m) = h(A)$ a také $h(A) = h(B^{-1}BACC^{-1}) \leq \min(h(B^{-1}), h(BAC), h(C^{-1})) = h(BAC)$. □

Cvičení

1. **(4)** Zjistěte, zda je množina $\{(1, -1, 1, 2), (1, 8, 7, -7), (1, 2, 3, -1), (1, 5, 5, -4)\}$ lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

2. **(4)** Zjistěte, zda je množina $\{(0, -4, 3, 3), (8, 1, 3, -3), (1, 0, 0, 7), (1, 3, 4, 8)\}$ lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

3. Zjistěte, zda je množina $\{(2, 1, -1, 2, -1), (-4, 3, 2, -1, 1), (3, 5, -2, 1, -2), (2, 2, -1, 3, -1), (-1, 2, 3, 1, 3)\}$ lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^5$.

4. **(4)** Zjistěte, zda je množina $\{(1+i, 1-i, 1+i), (1-i, 1+3i, i-1), (1, 1+i, i)\}$ lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého $\mathbb{C}^3$.

5. **(3)** Pro která $a \in \mathbb{R}$ je množina $\{(a, -4, -1), (4, -6, -3), (1, 1, -a)\}$ lineárně nezávislá? Určete dimenzi jejího lineárního obalu v závislosti na a.

6. **(3)** Pro která $a \in \mathbb{R}$ je množina $\{(7, a, -1), (-4, 8, -3), (2a, 1, -4)\}$ lineárně nezávislá? Určete dimenzi jejího lineárního obalu v závislosti na a.

7. **(3)** Najděte bázi $\langle (0,1,-3,4),(2,2,2,2),(1,-1,3,7)\rangle \subset \mathbb{R}^4$, obsahujici vektor $(1,4,-4,-1)$.

8. **(3)** Nechť $V_1 = \langle (1,0,2,-3),(3,2,1,-5),(-1,2,1,-2)\rangle$, $V_2 = \langle (-3,0,2,0)\rangle$ jsou podprostory $\mathbb{R}^4$. Určete dimenzi $V_1 \cap V_2$.

9. **(3)** Najděte dimenze prostorů V, W, $V \cap W$, $V \vee W \subset \mathbb{R}^5$ v závislosti na parametru λ, kde $V = \langle (3,-1,-2,2,1),\ (1,4,0,1,-1),\ (\lambda,6,-4,6,0)\rangle$, $W = \langle (1,-3,2,-3,0),\ (0,0,0,1,1)\rangle$.

10. **(3)** Z vektorů $(1,0,2,-3),(3,2,1,-5),(-1,2,1,-2),(-3,0,2,0)$ vyberte lineárně nezávislou množinu a vyjádřete ostatní vektory jako lineární kombinace prvků této lineárně nezávislé množiny.

11. **(3)** Nechť

$$V_1 = \langle (1,3,0,2),(2,0,1,3),(5,-3,3,1)\rangle$$
$$V_2 = \langle (3,-3,2,-2),(3,3,1,5),(2,0,1,1)\rangle$$

jsou podprostory $\mathbb{R}^4$. Určete dimenzi $V_1 \cap V_2$.

12. **(3)** Vyberte všechny báze $\mathbb{R}^3$ z množiny $\{(1,2,3),(2,3,4),(3,2,3),(4,3,4),(1,1,1)\}$.

13. **(3)** Najděte dimenzi prostoru $\langle \{(1,1,1,a),(1,1,a,1),(1,a,1,1),(a,1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

14. **(3)** Dokažte, že množina $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 = 0 \wedge x_2 - 2x_4 = 0\}$ je podprostor $\mathbb{R}^4$ a určete jeho dimenzi.

15. **(3)** Vyberte z množiny $\{(1,0,1),(3,2,1),(1,2,3),(1,0,-2)\}$ nějakou bázi $\mathbb{R}^3$ a vyjádřete zbylé vektory jako lineární kombinaci vektorů báze.

16. **(3)** Z množiny vektorů $\{(5,7,-1,3),(1,-3,8,2),(9,17,-10,4),(-2,6,-16,-4)\}$ v $\mathbb{R}^4$ vyberte nějakou bázi jejího lineárního obalu.

17. **(3)** Pro která $a \in \mathbb{R}$ je $\{(3,1,1,4),(a,4,10,1),(1,7,17,3),(2,2,4,3)\}$ lineárně nezávislá množina?

18. **(3)** Pro která $a \in \mathbb{R}$ je $\{(1,a,-1,2),(2,-1,a,5),(1,10,-6,1)\}$ lineárně nezávislá množina?

19. **(1)** Mějme množinu vektorů $\{(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in T^n, i = 1, \ldots, s \leq n\}$. Dokažte, že pokud pro všechna j platí $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{s} |a_{ij}|$, pak je tato množina lineárně nezávislá.

20. **(2)** Nechť A, B jsou dvě čtvercové matice řádu n. Platí $h(AB) = h(BA)$? Zdůvodněte.

21. **(2)** Dokažte, že čtvercová matice A je singulární, právě když existuje nenulová čtvercová matice B splňující $AB = 0$.

22. **(2)** Nechť A je čtvercová matice. Rozhodněte, zda platí: A je singulární $\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ (A^n = 0)$. Odpověď zdůvodněte.

23. **(2)** O soustavě řekneme, že je řešitelná, pokud má alespoň jedno řešení. Nechť A je čtvercová matice stupně n, B je regulární matice stupně n. Rozhodněte, které z následujících výroků platí:

    (a) $(A|b)$ je řešitelná $\Rightarrow (BA|b)$ je řešitelná

    (b) $(A|b)$ je řešitelná $\Rightarrow (AB|b)$ je řešitelná

    (c) $(AB|b)$ je řešitelná $\Rightarrow (A|b)$ je řešitelná

    (d) $(BA|b)$ je řešitelná $\Rightarrow (A|b)$ je řešitelná

    (e) žádný z předchozích výroků neplatí

    Odpověď zdůvodněte.

24. **(4)** Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

    Určete také hodnost matice transponované a ověřte, že se rovnají.

25. **(4)** Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    Určete také hodnost matice transponované a ověřte, že se rovnají.

26. **(3)** V závislosti na $a \in \mathbb{R}$ určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   Určete také hodnost matice transponované a ověřte, že se rovnají.

27. **(1)** Určete hodnost matice v závislosti na parametrech

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

28. **(2)** Dokažte, že pro libovolné dvě matice $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ platí $h(A + B) \leq h(A) + h(B)$.

29. **(2)** Nechť $Ax = b$ je soustava lineárních rovnic, mající alespoň jedno řešení. Určete nutnou a postačující podmínku, aby proměnná x_k měla hodnotu nula v každém řešení této soustavy a dokažte.

30. **(2)** Nechť $Ax = b$ je soustava lineárních rovnic, mající alespoň jedno řešení. Určete nutnou a postačující podmínku, aby proměnná x_k měla stejnou hodnotu v každém řešení této soustavy a dokažte.

31. **(1)** Určete vektor (a, b, c) tak, aby byl násobkem nějakého řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= a \\ 2x + 2z &= b \\ -x + y + z &= c \end{aligned}$$

32. **(1)** Dokažte, že pro libovolnou homogenní soustavu rovnic, jejíž koeficienty jsou racionální čísla, lze sestavit bázi prostoru řešení, v níž každá složka každého vektoru je celé číslo.

33. **(2)** Dokončete důkaz lemmatu 9.

34. **(3)** Najděte příklady singulárních matic, pro které platí v tvrzení věty 11 rovnost a naopak ostrá nerovnost.

35. **(3)** Dokažte, že pokud B je regulární a A čtvercová matice, pak $h(AB) = h(BA)$.

36. **(3)** Dokažte, že pokud je matice singulární, pak nemá inverzní matici.

37. **(2)** Vzhledem k parametrům a, b, c najděte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ x + by + z &= b \\ x + y + cz &= c \end{aligned}$$

Kapitola 6

Lineární zobrazení

Objekty, které v matematice studujeme, mívají obvykle podobu množiny s nějakou strukturou. Grupa a vektorový prostor jsou jen dva z mnoha příkladů takových objektů. Dalším krokem je podívat se na zobrazení mezi dvěma množinami, která zadanou strukturu respektují. Takovým zobrazením říkáme **morfizmy** nebo někdy **homomorfizmy**. V případě vektorových prostorů se používá také pojem **lineární zobrazení**. Díváme-li se na vektorový prostor geometricky, například na $\mathbb{R}^2$ jako na rovinu, pak má řada lineárních zobrazení jednoduchou geometrickou interpretaci a naopak, zobrazení s jednoduchou geometrickou interpretací bývají často lineární zobrazení. Například otočení vektoru v rovině o úhel α, osová souměrnost podle přímky, kolmá projekce na přímku, středová souměrnost nebo násobení vektoru číslem jsou všechno lineární zobrazení. Na lineárních zobrazeních nás budou zajímat takové otázky, jako například kterým vektorům přiřazují nulu, jak vypadá obecný vektor v obrazu zobrazení, jak se zobrazení skládají, jakým způsobem jsou jednoznačně definována a jak vypadají v souřadnicích.

6.1 Základní vlastnosti homomorfizmů

Definice 17. Nechť V a V' jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : V \to V'$ nazveme lineárním zobrazením, nebo též homomorfizmem, pokud $\forall u, v \in V$ a $\forall r \in \mathbb{F}$ splňuje podmínky

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) \\ f(ru) &= rf(u) \end{aligned}$$

Lemma 10. *Nechť V a V' jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : V \to V'$ je homomorfizmus, právě když $\forall u, v \in V$ a $\forall r, s \in \mathbb{F}$ platí $f(ru + sv) = rf(u) + sf(v)$.*

Důkaz. Podobné sloučení dvou podmínek do jedné jsme viděli už v případě definice podprostoru a důkaz zde je zcela analogický. □

Základním příkladem homomorfizmu je zobrazení $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ určené maticí $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, které vektoru $x \in \mathbb{F}^n$, chápanému jako matice o jediném sloupci, přiřazuje vektor $Ax \in \mathbb{F}^m$. Linearita zobrazení snadno plyne z vlastností maticového násobení. Zobrazení f_A vlastně přiřazuje n-tici čísel x lineární kombinaci sloupců matice A s koeficienty x_i:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n.$$

Definice 18. Nechť V a V' jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$ a $f : V \to V'$ je homomorfizmus. **Jádrem** f se nazývá množina $\operatorname{Ker} f := \{u \in V | f(u) = 0\}$, **obrazem** f je množina $\operatorname{Im} f := \{u' \in V' | \exists u \in V, f(u) = u'\}$.

Jádro homomorfizmu f je podmnožina v prostoru V, ve skutečnosti je to podprostor. To ověříme snadno: pokud $u, v \in \operatorname{Ker} f$ a $r, s \in \mathbb{F}$, pak $f(ru + sv) = rf(u) + sf(v) = r0 + s0 = 0$, tedy $ru + sv \in \operatorname{Ker} f$. Obraz $\operatorname{Im} f$ je zase podprostorem ve V', důkaz je jen o málo složitější: pokud $u', v' \in \operatorname{Im} f$, pak existují $u, v \in V$, pro něž $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$. Potom ale $f(ru + sv) = rf(u) + sf(v) = ru' + sv'$, tedy i $ru' + sv' \in \operatorname{Im} f$.

Definice 19. Dimenzi $\operatorname{Im} f \leq V'$ nazýváme **hodností** $h(f)$ zobrazení f, dimenzi $\operatorname{Ker} f \leq V$ budeme říkat **nulita** $n(f)$ homomorfizmu f.

Obrazem homomorfizmu f_A je právě množina všech lineárních kombinací sloupců matice A, jinými slovy její sloupcový podprostor S_A. Hodnost f_A je potom $\dim S_A \equiv h(A^T)$. Protože víme, že $h(A) = h(A^T)$, je hodnost zobrazení $h(f_A)$ rovna hodnosti $h(A)$ příslušné matice.

Jádro lineárního zobrazení f_A je množina všech $x \in \mathbb{F}^n$, pro něž $Ax = 0$, čili množina řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A, kterou jsme označovali W_A. Řešíme-li homogenní soustavu rovnic, snažíme se vlastně popsat podprostor $\operatorname{Ker} f_A$ jako lineární obal nějaké množiny vektorů. Řešíme-li rovnici nehomogenní, $Ax = b$, snažíme se vlastně zjistit, zda vektor $b \in \mathbb{F}^m$ patří do $\operatorname{Im} f_A$, a pokud ano, jaká je jeho množina vzorů. Poznatek „řešení nehomogenní soustavy je řešení homogenní plus partikulární řešení nehomogenní“ z konce minulé kapitoly vlastně znamená, že stačí najít jeden vzor a všechny ostatní se od něj liší přičtením nějakého prvku $\operatorname{Ker} f_A$. Podle toho, co jsme v minulé kapitole dokázali o řešení soustav rovnic, je $n(f_A) \equiv \dim \operatorname{Ker} f_A = n - h(A)$ a $h(f_A) \equiv \dim \operatorname{Im} f_A = h(A)$, celkově tedy $n(f_A) + h(f_A) = \dim \operatorname{Ker} f_A + \dim \operatorname{Im} f_A = n$. Toto tvrzení platí obecněji a říká se mu věta o dimenzi jádra a obrazu:

Věta 14. *Nechť $f : V_n \to V$ je homomorfizmus. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$$

Důkaz. Nechť $\{u_1, \dots, u_k\}$ je báze $\operatorname{Ker} f$ (připouštíme i $k = 0$, tedy prázdnou množinu), doplňme ji na bázi $\{u_1, \dots, u_n\}$ celého V_n. Označme $W = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$, pak $\operatorname{Ker} f \oplus W = V_n$ (přesvědčte se sami!), tedy $\dim \operatorname{Ker} f + \dim W = n$ podle věty o dimenzi spojení a průniku. Ukážeme, že $N' = \{f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)\}$ je báze $\operatorname{Im} f$. Každý vektor $u' \in \operatorname{Im} f$ je obrazem nějakého vektoru $u \in V_n$ v homomorfizmu f, a protože existují čísla r_i taková, že $u = \sum_{i=1}^n r_i u_i$, dostáváme

$$u' = f(u) = f\left(\sum_{i=1}^n r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i f(u_i) = \sum_{i=k+1}^n r_i f(u_i),$$

kde jsme využili toho, že $f(u_i) = 0$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$. Tedy N' generuje $\operatorname{Im} f$.

Pokud pro nějaká čísla s_i, $i \in \{k+1, \dots, n\}$ platí $\sum_{i=k+1}^n s_i f(u_i) = 0$, pak vektor $u = \sum_{i=k+1}^n s_i u_i$ patří do $\operatorname{Ker} f$. Patří ale zároveň do W, a protože $\operatorname{Ker} f \cap W = 0$, musí to být nulový vektor. Protože množina $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá, jsou všechny koeficienty $s_i = 0$, $i \in \{k+1, \dots, n\}$. To ale znamená, že množina N' je lineárně nezávislá. Je to tedy báze $\operatorname{Im} f$, tedy $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$ a jsme hotovi. □

Definice 20. Homomorfizmus, který je prostý, nazýváme **monomorfizmem**, pro homomorfizmus, který je „na“, budeme užívat pojem **epimorfizmus**. Vzájemně jednoznačný homomorfizmus, tedy lineární zobrazení, které je zároveň mono- a epimorfizmem, se nazývá **izomorfizmus**.

Že je zobrazení $f : V \to V'$ „na“ (nebo též **surjektivní**) znamená, že $\operatorname{Im} f = V'$, což nám dává charakterizaci epimorfizmů pomocí obrazu. Monomorfizmy je zase možné charakterizovat podmínkou na jádro $\operatorname{Ker} f = 0$. Pokud totiž f je prosté, pak nulový vektor z V' může mít pouze jeden vzor, a tím je nulový vektor z V, čili $\operatorname{Ker} f = 0$. Naopak, pokud $\operatorname{Ker} f = 0$ a pro dva vektory $u, v \in V$ platí $f(u) = f(v)$, pak $f(u - v) = 0$ a tedy $u - v \in \operatorname{Ker} f$, čili $u - v = 0$. Ověřili jsme tedy, že kdykoli $f(u) = f(v)$, musí už být $u = v$, což není nic jiného, než že f je prosté.

Z věty o dimenzi jádra a obrazu pak plynou další skutečnosti, platné v případě zobrazení na prostorech konečné dimenze. Pokud $f : V_n \to V'$ je monomorfizmus, pak $n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$. Odtud získáme následující vlastnost izomorfizmů:

Věta 15. *Nechť $f : V_n \to V'$ je izomorfizmus. Pak* $\dim V_n = \dim V'$.

Důkaz. Protože f je monomorfizmus na V_n, máme $\dim \operatorname{Im} f = n$. Je to také epimorfizmus, tedy $\operatorname{Im} f = V'$. Tedy $\dim V' = n$. □

Pokud mezi dvěma prostory existuje izomorfizmus, říkáme, že jsou **izomorfní**. Věta říká, že jsou-li dva prostory, z nichž jeden je konečné dimenze, izomorfní, pak mají stejnou dimenzi. Platí i opačná implikace, k jejímu důkazu ale budeme potřebovat zkonstruovat pro libovolné dva vektorové prostory stejné dimenze izomorfizmus mezi nimi. K tomu je nutné zavést pojem souřadnic, což učiníme ještě v této kapitole.

Zobrazení, jehož zdrojový i cílový prostor jsou stejné, $f : V \to V$, se nazývá **endomorfizmus**. Pokud je endomorfizmus zároveň izomorfizmem, říkáme mu **automorfizmus**. Všimněte si, že z věty o dimenzi jádra a obrazu plyne, že pokud je V konečné dimenze, pak stačí, aby byl endomorfizmus jedním z dvojice monomorfizmus, epimorfizmus, a automaticky už musí být i tím druhým z dvojice, a tedy také automorfizmem. Prostory nekonečné dimenze tuto vlastnost ale nemají, zkuste najít protipříklad!

Uveďme si několik dalších příkladů homomorfizmů vektorových prostorů:

1. Pro $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je f_A monomorfizmus, právě když A má lineárně nezávislé sloupce, tedy $h(A) = n$. Je to epimorfizmus, právě když sloupce generují celé $\mathbb{F}^m$, tedy $h(A) = m$. Tedy f_A je izomorfizmem, právě když A je čtvercová matice hodnosti $n = m$, čili regulární matice.

2. $V = V' = \mathbb{F}^3$, $P : (a_1, a_2, a_3) \to (a_1, a_2, 0)$. Toto zobrazení se vyznačuje vlastností $P^2 = P$, což je vlastnost charakterizující **projekce**. Geometricky odpovídají projekce zobrazením V na podprostor ve V daným

nějakým geometrickým průmětem. Je to epimorfizmus, není to monomorfizmus.

3. Inkluze $\mathbb{F}^n \subset \mathbb{F}^m$, $n < m$ definuje monomorfizmus $i : (x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n, 0 \dots, 0)$, který není epimorfizmem.

4. $V = \{$ množina všech konvergentních posloupností $\}$, $V' = \mathbb{R}$. Zobrazení limita $\lim : V \to \mathbb{R}$ je epimorfizmus, který není monomorfizmem.

5. $V = \mathbb{R}$ se standardními operacemi a $V' = \mathbb{R}^+$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$, kde $u \oplus v = uv$ a $r \odot u = u^r$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Pak $\exp : u \to e^u$ je jejich izomorfizmus.

6. $V = C(-\infty, \infty)$, $V' = \mathbb{R}$. $E_a : f \to f(a)$ je epimorfizmus.

7. $V = P(x, \mathbb{F}) = V'$, $D^{(n)} : f \to f^{(n)}$ je endomorfizmus, který je epimorfizmem, ale není monomorfizmem: jeho jádrem je množina polynomů stupně menšího než n. Vidíme, že na prostorech nekonečné dimenze existují endomorfizmy, které jsou epimorfizmem, ale ne monomorfizmem.

8. $V = L(a, b)$ (množina všech funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$, které mají přes tento interval konečný integrál), $V' = \mathbb{R}$, $I_{(a,b)} : f \to \int_a^b f(x)dx$ je homomorfizmus.

Následující věta říká, že libovolné zobrazení báze vektorového prostoru do jiného prostoru lze jednoznačně rozšířit na lineární, jinými slovy, že homomorfizmus je jednoznačně určen svými hodnotami na nějaké bázi.

Věta 16. *Nechť V a V' jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, M je báze V a $F : M \to V'$ je zobrazení. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $f : V \to V'$ takové, že $\forall u \in M$, $f(u) = F(u)$.*

Důkaz. Dokážeme pouze pro V prostor konečné dimenze, pak lze psát $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ (obecný důkaz vyžaduje jen o trochu komplikovanější zápis). Libovolný vektor $v \in V$ lze zapsat jako $v = \sum_{i=1}^n r_i u_i$. Definujeme pak $f(v) = \sum_{i=1}^n r_i F(u_i)$. Je zřejmé, že takto definované f je lineární zobrazení. Tím je dokázána existence, zbývá jednoznačnost. Pokud by existovalo lineární zobrazení g takové, že $\forall u \in M$, $g(u) = F(u)$, pak pro libovolný vektor $v = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i$ máme

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i g(u_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i F(u_i) = f(v),$$

tedy musí být $g = f$. □

Jako cvičení si můžete zkusit zjistit a dokázat, co plyne pro homomorfizmus f z toho, že skupina vektorů $F(M)$ je lineárně nezávislá, případně generuje V', případně je bází V'. Také si rozmyslete, co se stane, když M bude lineárně nezávislá, ale nebude bází V, případně když M bude lineárně závislá. Jako jednoduché cvičení ponecháváme i důkaz následujícího lemmatu:

Lemma 11. *Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $f : V \to W$ je izomorfizmus a M skupina vektorů ve V. Pak M je lineárně nezávislá, právě když $f(M)$ je lineárně nezávislá, a M generuje V, právě když $f(M)$ generuje W.*

6.2 Operace s homomorfizmy

Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$. Označme $\mathrm{Hom}(V, W)$ množinu všech homomorfizmů z V do W a $\mathrm{End}(V)$ množinu všech endomorfizmů prostoru V, tedy $\mathrm{End}(V) \equiv \mathrm{Hom}(V, V)$. Na množině $\mathrm{Hom}(V, W)$ máme definováno sčítání homomorfizmů a násobení homomorfizmu číslem: pro libovolný vektor $v \in V$ a libovolné $r \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}(f + g)(v) &:= f(v) + g(v)\\ (rf)(v) &:= rf(v)\end{aligned}$$

Rozmyslete si, co tato definice znamená: na prvním řádku definujeme nové zobrazení $f+g$ tím, na co zobrazuje libovolný vektor, říkáme, že to má být na součet vektorů $f(v)$ a $g(v)$. Podobně na druhém řádku říkáme, že zobrazení rf má vektor v zobrazit na r-násobek vektoru $f(v)$. Sami ověřte, že definice je korektní, tedy že součet dvou homomorfizmů je homomorfizmus a násobek homomorfizmu je homomorfizmus. Také si rozmyslete, že $f_A + f_B$ je vlastně f_{A+B} a $rf_A = f_{rA}$.

Věta 17. *Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$. Množina* $\mathrm{Hom}(V,W)$ *s operacemi sčítání homomorfizmů a násobení homomorfizmu číslem je vektorový prostor. Pokud* $\dim V = n$ *a* $\dim W = m$*, pak* $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = mn$*.*

Důkaz. Ověření, že $\mathrm{Hom}(V,W)$ s danými operacemi splňuje axiomy vektorového prostoru, ponecháváme čtenáři za cvičení. Abychom určili dimenzi tohoto prostoru, musíme najít nějakou jeho bázi. Nechť $M = \{u_1, \ldots, u_n\}$ je báze V a $N = \{v_1, \ldots, v_m\}$ je báze W. Definujme pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ zobrazení $f_{ij} : V \to W$ takto:

$$f_{ij}(u_k) \begin{cases} = v_i & \text{pro } k = j \\ = 0 & \text{pro } k \neq j \end{cases}$$

Podle věty o určení homomorfizmu hodnotami na bázi tento předpis zadává pro dané indexy i, j jednoznačně určené lineární zobrazení z $\mathrm{Hom}(V,W)$. Těchto zobrazení je právě mn, potřebujeme tedy ověřit, že množina $K := \{f_{ij} | i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ je lineárně nezávislá a že každé zobrazení $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ lze zapsat jako lineární kombinaci prvků K.

Pro $V = \mathbb{F}^n$, $W = \mathbb{F}^m$ a M, N kanonické báze je f_{ij} zobrazení určené maticí E_{ij}, která má na pozici ij jedničku a jinde nuly.

Obraz bázového vektoru u_j v zobrazení f je prvkem W a lze ho rozepsat jako lineární kombinaci prvků báze N. Koeficienty této lineární kombinace jsou jednoznačně určené a označme je r_{ij} pomocí předpisu $f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} r_{ij} v_i$. Pak pro libovolný vektor $u_k \in M$ platí

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} f_{ij}(u_k) = \sum_{i=1}^{m} r_{ik} v_i = f(u_k)$$

Jinými slovy se zobrazení f a $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} f_{ij}$ rovnají na bázi M a tedy se musejí rovnat na celém V. Množina K tedy generuje $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Zbývá ověřit lineární nezávislost. Pokud $\sum_{ij} r_{ij} f_{ij}$ je nulové zobrazení, pak je nula i jeho aplikace na libovolný bázový vektor u_k a tedy

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} f_{ij}(u_k) = \sum_{i=1}^{m} r_{ik} v_i$$

Množina N je lineárně nezávislá, takže $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, $r_{ik} = 0$. To platí pro libovolné k, čili jsme dokázali $\sum r_{ij} f_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i, j,\ r_{ij} = 0$, jinými slovy lineární nezávislost množiny K. $\square$

Speciální situace nastává, když $W = \mathbb{F}$. Prostor $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ má stejnou dimenzi jako prostor V a říká se mu **duální prostor** k V. Blíže se duálním prostorem budeme zabývat v letním semestru.

Označme $1_V \in \mathrm{End}(V)$ identický endomorfizmus prostoru V, definovaný vztahem $\forall v \in V$, $1_V(v) = v$. Je zřejmé, že je to lineární zobrazení, prosté a na, tedy izomorfizmus. Pokud $V = \mathbb{F}^n$, pak $1_V \equiv f_E$, kde E je jednotková matice.

Věta 18. *Nechť V, V', V'' jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ jsou dva homomorfizmy. Pak*

1. *Složené zobrazení $gf : V \to V''$ je homomorfizmus.*
2. *Pokud g a f jsou monomorfizmy, pak gf je monomorfizmus.*
3. *Pokud g a f jsou epimorfizmy, pak gf je epimorfizums.*
4. *Pokud g a f jsou izomorfizmy, pak gf je izomorfizums.*
5. *Pokud gf je monomorfizmus, pak f je monomorfizums.*
6. *Pokud gf je epimorfizmus, pak g je epimorfizums.*
7. *Zobrazení f je izomorfizmus, právě když existuje homomorfizmus $f^{-1} : V' \to V$, pro který $ff^{-1} = 1_{V'}$ a $f^{-1}f = 1_V$. Homomorfizmus f^{-1} je těmito podmínkami určen jednoznačně a je to izomorfizmus.*

Důkaz. Nechť $r, s \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.

1. $gf(ru + sv) = g(rf(u) + sf(v)) = rgf(u) + sgf(v)$
2. Pokud g, f jsou prostá a $u \neq v$, pak $f(u) \neq f(v)$ a $g(f(u)) \neq g(f(v))$, tedy gf je prosté.
3. Pokud g, f jsou surjektivní a $u'' \in V''$, pak existuje $u' \in V'$ takové, že $g(u') = u''$ a $u \in V$, že $f(u) = u'$. Tedy $gf(u) = u''$, gf je na.
4. Plyne z předchozích dvou bodů.
5. Pokud $u \in \mathrm{Ker}\, f$, pak $gf(u) = g(0) = 0$. Protože gf je monomorfizmus, musí být $u = 0$. Tedy $\mathrm{Ker}\, f = 0$, čili f je monomorfizmus.
6. Pokud g není na, pak ani $g \circ f$ nemůže být na.

7. Pokud existuje f^{-1} splňující $ff^{-1} = 1_{V'}$, což je epimorfizmus, pak podle předchozího bodu musí být f také epimorfizmus. Podobně z $f^{-1}f = 1_V$ plyne, že f je monomorfizmus, celkově je tedy f izomorfizmus. Naopak, pokud f je izomorfizmus, pak je na, tedy pro každé $u' \in V'$ existuje $u \in V$, že $f(u) = u'$, a je prosté, tedy toto u existuje právě jedno. Definujme $f^{-1}(u') := u$. Snadno se ověří, že f^{-1} je lineární zobrazení, vlastnosti $ff^{-1} = 1_{V'}$ a $f^{-1}f = 1_V$ jsou zřejmé. Zbývá ověřit jednoznačnost: pokud by existovalo $g : V' \to V$, $fg = 1_{V'}$ a $gf = 1_V$, pak $g = gff^{-1} = f^{-1}$.

□

Zobrazení f^{-1} budeme samozřejmě nazývat **inverzní** homomorfizmus. Opět si rozmyslete, že $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$. Z věty jsme se dozvěděli, že všechny prvky množiny všech automorfizmů $\mathrm{Aut}(V)$ prostoru V mají inverzní prvek vzhledem k operaci skládání zobrazení. Spolu s asociativitou skládání a faktem, že identita je automorfizmus, dostáváme, že množina $\mathrm{Aut}(V)$ s operací skládání je grupa.

6.3 Homomorfizmy v souřadnicích

Zatím jsme vždy ilustrovali všechny pojmy týkající se homomorfizmů pomocí zobrazení typu f_A pro nějakou matici A. Nyní si ukážeme, že se všemi zobrazeními mezi prostory konečné dimenze se dá počítat jako se zobrazeními tohoto typu.

Definice 21. Nechť V_n je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ jeho báze a $u \in V$. **Souřadnicemi** vektoru u vzhledem k bázi M budeme rozumět sloupcový vektor $(u)_M := (x_1, \dots, x_n)^T$, kde x_i jsou koeficienty lineární kombinace $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$.

Koeficienty lineární kombinace vzhledem k bázi jsou určeny jednoznačně, definice je tedy korektní a navíc zadává bijekci $s_M : V_n \to \mathbb{F}^n$ definovanou předpisem $s_M(u) := (u)_M$. Ověřte sami, že je tato bijekce lineárním zobrazením, tedy izomorfizmem. Podle lemmatu 11 je skupina vektorů $v_1, \dots, v_k$ lineárně nezávislá, resp. generuje V_n právě tehdy, když je množina vektorů jejich souřadnic $(v_1)_M, \dots, (v_k)_M$ lineárně nezávislá, resp. generuje $\mathbb{F}^n$.

Tento izomorfizmus závisí na volbě báze M, máme jich tedy vlastně celou sadu: s každou bází jeden.

Pomocí souřadnic můžeme dokázat zesílení věty 15 na ekvivalenci:

Věta 19. *Nechť V a W jsou dva vektorové prostory konečné dimenze nad $\mathbb{F}$. Pak V a W jsou izomorfní právě když* $\dim V = \dim W$.

Důkaz. Zbývá sestrojit izomorfizmus mezi prostory V a W stejné dimenze. Zvolme M bázi V a N bázi W, existují izomorfizmy $s_M : V \to \mathbb{F}^n$, $s_N : W \to \mathbb{F}^n$ určené přiřazením vektoru jeho souřadnic vzhledem k dané bázi. Pak $s_N^{-1} s_M$ je izomorfizmus V a W. □

Definice 22. Nechť V_n je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $M = \{u_1, \dots, u_n\}$, $M' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ dvě báze v něm. Matici $R \in M_{nn}(\mathbb{F})$, jejíž i-tý sloupec pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ je vektorem souřadnic vektoru u'_i vzhledem k bázi M, nazýváme **maticí přechodu** od M k M'.

Podle definice tedy $\sum_{i=1}^n r_{ij} u_i = u'_j$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$. Označme souřadnice libovolného vektoru $u \in V$ vzhledem k M' jako $(u)_{M'} \equiv x' \equiv (x'_1, \dots, x'_n)^T$. Pak

$$u = \sum_{j=1}^n x'_j u'_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x'_j r_{ij} u_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} x'_j \right) u_i$$

Když označíme souřadnice u vzhledem k M jako $(u)_M \equiv x \equiv (x_1, \dots, x_n)^T$, pak $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ a protože souřadnice vzhledem k dané bázi jsou určeny jednoznačně, musí být $x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} x'_j$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Tedy matice přechodu umožňuje vypočítat „nečárkované“ souřadnice x jako součin Rx' matice přechodu od M k M' a „čárkovaných“ souřadnic.

To je trochu neintuitivní, ale je to prostě konvence. Matice přechodu od **nečárkované báze** k **čárkované** vyjadřuje **čárkovanou bázi** pomocí **nečárkované** a **nečárkované souřadnice** pomocí **čárkovaných**. Přechodem k opačné konvenci bychom si zas až tak nepomohli.

Praktický výpočet matice přechodu se nejlíp provede přímo z definice. Pokud $M = \{(1,1), (2,3)\}$ a $M' = \{(1,2), (3,4)\}$ v $\mathbb{R}^2$ pak soustava rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

právě řeší úlohu vyjádřit vektory z M' (pravé strany) pomocí vektorů báze M (sloupce matice soustavy). Tedy po úpravě na jednotkovou matici vlevo přečteme vpravo přímo matici R.

Definice 23. Nechť $f : V_n \to V_m$ je homomorfizmus vektorových prostorů nad $\mathbb{F}$. **Maticí homomorfizmu** f vzhledem k bázím $M = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V_n$ a $N = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V_m$ rozumíme matici $(f)_{NM} \in M_{mn}(\mathbb{F})$, jejíž i-tý sloupec je pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ roven $(f(u_i))_N$, tedy souřadnicím f-obrazu i-tého bázového vektoru báze M vzhledem k bázi N.

Označme opět souřadnice vektoru $u \in V$ vzhledem k M jako $(u)_M \equiv (x_1, \dots, x_n)^T$ a matici $(f)_{NM}$ jako A. Pak

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(u_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) v_i$$

Tedy souřadnice $f(u)$ vzhledem k N se dostanou jako součin matice homomorfizmu A a souřadnic u vzhledem k M:

$$(f(u))_N = (f)_{NM}(u)_M$$

Naopak, pro libovolnou matici $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ má zobrazení f, definované na bázi M předpisem $f(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j$, matici $(f)_{NM}$ rovnou A. Libovolnému homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(V_n, V_m)$ je tedy přiřazena matice $(f)_{NM} \in M_{mn}(\mathbb{F})$, a to bijektivně. Nedá příliš práce ověřit, že toto zobrazení $F : \mathrm{Hom}(V_n, V_m) \to M_{mn}(\mathbb{F})$ je homomorfizmus vektorových prostorů. Tedy prostory $\mathrm{Hom}(V_n, V_m)$ a $M_{mn}(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^{mn}$ jsou izomorfní a mají tudíž stejnou dimenzi, čímž jsme znovu ověřili, že $\dim \mathrm{Hom}(V_n, V_m) = mn$. Zároveň vidíme, že pojem matice homomorfizmu můžeme chápat jako způsob, jak zavést souřadnice na prostoru $\mathrm{Hom}(V_n, V_m)$, které budou v nějakém smyslu kompatibilní s již zavedenými souřadnicemi na prostorech V_n a V_m.

Vrátíme-li se k našemu příkladu zobrazení typu $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definovanému předpisem $f_A(x) = Ax$, vidíme, že matice A je rovna matici $(f_A)_{K'K}$ homomorfizmu f_A vzhledem ke kanonickým bázím v $K \subset \mathbb{R}^n$ a $K' \subset \mathbb{R}^m$. Proto se dají všechna lineární zobrazení mezi dvěma aritmetickými vektorovými prostoru zapsat jako f_A pro nějakou matici A.

Lemma 12. *Nechť U, V, W jsou tři vektorové prostory nad $\mathbb{F}$ a M, N, P po řadě báze v nich, $f : U \to V$, $g : V \to W$ homomorfizmy. Pak*

1. $(1_U)_{MM} = E$
2. $(gf)_{PM} = (g)_{PN}(f)_{NM}$
3. *Pokud f je izomorfizmus, pak* $(f^{-1})_{MN} = (f)^{-1}_{NM}$.

Důkaz. První tvrzení je zřejmé z definice. Pro druhé stačí vzít libovolný vektor $u \in U$ a rozepsat

$$(g)_{PN}(f)_{NM}(u)_M = (g)_{PN}(f(u))_N = (g(f(u)))_P = (gf)_{PM}(u)_M.$$

To musí platit pro libovolný vektor $(u)_M$. Vezmeme-li $(u)_M = e_i$, i-tý prvek kanonické báze, pak rovnost říká, že i-tý sloupec matice $(g)_{PN}(f)_{NM}$ a matice $(gf)_{PN}$ se rovnají. Protože i je libovolné, rovnají se matice jako celek.

Třetí tvrzení je důsledkem prvních dvou a vztahu $f^{-1}f = 1_U$. □

Třetí tvrzení říká, že pokud je f izomorfizmus, pak je jeho matice vzhledem k libovolným bázím regulární. Naopak, pro regulární matici A a dané dvě báze M a N lze sestrojit homomorfizmy $f : U \to V$ a $g : V \to U$ takové, že $(f)_{NM} = A$ a $(g)_{MN} = A^{-1}$. Pak ale podle druhého bodu lemmatu $(gf)_{MM} = E$ a $(fg)_{NN} = E$, tedy $gf = 1_U$ a $fg = 1_V$ a tedy $g = f^{-1}$, protože inverzní izomorfizmus je určen jednoznačně.

Věta 20. *Nechť V, W jsou dva vektorové prostory konečné dimenze nad $\mathbb{F}$, $M \subset V$, $N \subset W$ báze v nich, $f : V \to W$ homomorfizmus. Pak $h(f) = h\left((f)_{NM}\right)$.*

Důkaz. Označme $M = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Pak

$$h(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim\langle f(u_1), \ldots f(u_n)\rangle = \dim\langle f(u_1)_N, \ldots, f(u_n)_N\rangle = h\left((f)_{NM}\right)$$

□

Lemma 13. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze a M, M' jsou dvě báze v něm. Pak matice $(1_V)_{MM'}$ je rovna matici přechodu od báze M k bázi M'.*

Důkaz. Pokud aplikujeme homomorfizmus 1_V na libovolný vektor $u \in V$, dostaneme z definice matice homomorfizmu

$$(u)_M = (1_V(u))_M = (1_V)_{MM'} (u)_{M'}$$

To znamená, že pokud vynásobíme maticí přechodu od M k M' „čárkované“ souřadnice vektoru u, získáme jeho „nečárkované“ souřadnice, což je přesně způsob, jak transformuje souřadnice matice přechodu od M k M'. □

Věta 21. *Nechť V, W jsou dva vektorové prostory konečné dimenze nad $\mathbb{F}$, M, M' báze V, N, N' báze W a $f : V \to W$ homomorfizmus. Pak*

$$(f)_{N'M'} = (1_W)_{N'N} (f)_{NM} (1_V)_{MM'}$$

Důkaz. Jde jen o přímočaré užití druhého bodu lemmatu 12 na f zapsané jako složení $1_W \circ f \circ 1_V$. □

Protože matici homomorfizmu můžeme chápat jako zavedení souřadnic na prostoru $\mathrm{Hom}(V, W)$, které jsou v nějakém smyslu kompatibilní se zvolenými souřadnicemi na V a W, popisuje tato věta vlastně pravidlo, jak se tyto souřadnice transformují. V druhém semestru podobným způsobem odvodíme pravidla transformace libovolných tenzorů.

Věta se nejčastěji používá v případě $V = W$, $M = N$, $M' = N'$. Pak s využitím $(1_V)^{-1}_{M'M} = (1_V)_{MM'}$ dostáváme

$$(f)_{M'M'} = (1_V)_{M'M}\,(f)_{MM}\,(1_V)^{-1}_{M'M}$$

Operaci, kdy se matici A přiřadí matice RAR^{-1} nazýváme **konjugováním** matice A maticí R. Víme již, že konjugování zachovává hodnost a podle poslední věty vlastně odpovídá vyjadřování endomorfizmu v různých bázích. O maticích A a B, pro něž existuje regulární matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$, řekneme, že jsou **podobné**, značíme $A \sim B$.

Příklad. Spočtěme matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které je definováno předpisem $f(x, y, z) = (x + z, x - 2y)$ vzhledem ke kanonickým bázím, k bázím $M = \{(2, 3, 0), (3, 4, 0), (0, 0, 1)\}$, $N = \{(1, 2), (1, 3)\}$ a k bázím $M' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 0)\}$, $N' = \{(1, 1), (2, 1)\}$. Určeme jádro zobrazení gf, kde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ je lineární zobrazení přiřazující vektoru $(3, 1)$ vektor $(1, -1, 0, 1)$ a vektoru $(2, 1)$ vektor $(-1, 1, 0, -1)$.

Nejjednodušší je určit matici

$$(f)_{KK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sloupce matice $(f)_{NM}$ jsou souřadnice obrazů báze M vzhledem k bázi N. Stačí tedy řešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 10 & 14 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & -11 & -2 \end{array}\right),$$

čili

$$(f)_{NM} = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 3 \\ -8 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

Matici $(f)_{N'M'}$ můžeme spočítat podobně, ale pojďme si vyzkoušet použít matice přechodu $(1)_{N'N}$ a $(1)_{MM'}$. Ty se dostanou vyjádřením vektorů báze N vůči N'

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

a vektorů báze M' vzhledem k M

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Tedy

$$(f)_{N'M'} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 14 & 3 \\ -8 & -11 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Snadno ověříme, že přímý výpočet dává stejný výsledek:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Zobrazení g jsme dostali definované hodnotami na bázi $P = \{(3,1),(2,1)\}$. Tedy matice g vzhledem k bázi P a kanonické bázi v $\mathbb{R}^4$ je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matice složeného homomorfizmu je součin matic jednotlivých homomorfizmů, pokud je báze v prostředním prostoru pro oba homomorfizmy stejná. Známe matici $(f)_{N'M'}$ a matici $(g)_{KP}$. Potřebujeme tedy ještě vložit matici přechodu od báze P k bázi N'. Nejprve tuto matici vypočteme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

a následně použijeme ve vyjádření

$$(gf)_{KM'} = (g)_{KP}(1)_{PN'}(f)_{N'M'} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 10 \\ 1 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Jádrem homomorfizmu gf jsou všechny vektory, pro něž $gf(u) = 0$, čili pro jejichž souřadnice $(u)_{M'} \equiv (x, y, z)$ vzhledem k M' platí $(gf)_{KM'}(u)_{M'} = 0$. Tedy $(u)_{M'} \in \langle(10, 0, 1), (11, 1, 0)\rangle$. Ze souřadnic vypočteme samotné bázové vektory jádra $10(1, 0, 1) + (0, 1, 0)$ a $11(1, 0, 1) + (1, 1, 2)$ a máme

$$\operatorname{Ker} gf = \langle(10, 1, 10), (12, 1, 13)\rangle.$$

Bylo by samozřejmě možné postupovat i jinými způsoby, například vypočítat

$$(gf)_{KK} = (g)_{KK}(f)_{KK} = (g)_{KP}(1)_{PK}(f)_{KK},$$

k čemuž nám ještě chybí matice přechodu od P ke K, a řešit soustavu rovnic s maticí $(gf)_{KK}$. Pak bychom ušetřili poslední krok, protože výsledek by vyšel v souřadnicích vzhledem ke kanonické bázi.

Cvičení

1. **(4)** Nechť V je vektorový prostor všech funkcí z intervalu I do $\mathbb{R}$. Dokažte, že zobrazení $F : V \to V$, definované pro $f \in V$ vztahem $\forall x \in I$, $[F(f)](x) = xf(x)$, je lineární zobrazení.

2. **(4)** Nechť $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jsou lineární:

   (a) $(x, y, z, u) \to (xy, y - x, z, u)$

   (b) $(x, y, z, u) \to (ry, y - x, z, u)$

   (c) $(x, y, z, u) \to (0, z, y, x + y + z + u)$

   (d) $(x, y, z, u) \to (1, z + y, z + x, z + u)$

   Zdůvodněte.

3. **(3)** Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $f : V \to W$ jsou lineární:

   (a) $V = W = \mathbb{C}$ a f je komplexní sdružení $f(v) = \bar{v}$

   (b) V je prostor všech reálných čtvercových matic stupně n, $W = \mathbb{R}$, $f(A) = \operatorname{Tr} A$.

   (c) $V = W$ je prostor všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$ a f je zobrazení přiřazující funkci její absolutní hodnotu $f(g) = |g|$.

(d) V je prostor všech komplexních polynomů stupně nejvýše n, $W = \mathbb{C}^n$ a f je zobrazení přiřazující polynomu p vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jeho kořenů (včetně násobností).

(e) $V = W$ je prostor všech komplexních polynomů stupně nejvýše n a f je zobrazení přiřazující polynomu p jeho derivaci $f(p) = p'$.

4. **(3)** Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadaného vztahem $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, 4x_1 + x_3)$.

5. **(3)** Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadaného vztahem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4, x_2 - 2x_3, x_1 + 4x_3 + x_4)$.

6. **(3)** Nechť V je vektorový prostor všech reálných čtvercových matic řádu n. Popište jádro a obraz zobrazení F které matici $A = (a_{ij})$ přiřazuje matici, jejíž ij-tý prvek je $a_{ij} + a_{ji}$.

7. **(3)** Popište jádro a obraz endomorfizmu F množiny M všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$, který je definován vztahem $\forall f \in M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(F(f))(x) = f(x) - f(-x)$.

8. **(3)** Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ splňuje

$$\begin{aligned} f_A((1,1,1)) &= (0,1,1) \\ f_A((1,1,0)) &= (1,0,2) \\ f_A((1,0,0)) &= (3,1,-2) \end{aligned}$$

9. **(3)** Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ splňuje

$$\begin{aligned} f_A((2,3,5)) &= (1,1,1) \\ f_A((0,1,2)) &= (1,1,-1) \\ f_A((1,0,0)) &= (2,1,2) \end{aligned}$$

10. **(3)** Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ splňuje

$$\begin{aligned} f_A((2,0,3)) &= (1,2,-1) \\ f_A((4,1,5)) &= (4,5,-2) \\ f_A((3,1,2)) &= (1,-1,1) \end{aligned}$$

11. **(4)** Rozhodněte, zda je zobrazení $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to P_3(x, \mathbb{R})$, definované vztahem
$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d + (c + 2b)x^2 - x^3,$$
lineární.

12. **(4)** Rozhodněte, zda je zobrazení $f : P(x, \mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$
$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(2) & p(3) \end{pmatrix}$$
lineární.

13. **(4)** Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ přiřazuje vektoru (x, y, z) vektor (z, y).

14. **(4)** Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ přiřazuje vektoru jeho c-násobek.

15. **(4)** Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přiřazuje vektoru (x, y, z) vektor osově souměrný podle roviny xz.

16. **(3)** Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přiřazuje vektoru (x, y, z) vektor pootočený okolo osy x o úhel α.

17. **(3)** Nechť $u \in \mathbb{R}^3$. Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přiřazuje vektoru x vektorový součin $x \times u$. Určete jádro a obraz tohoto zobrazení.

18. **(3)** Dokažte, že zobrazení $f : P(x, \mathbb{R}) \to P(x, \mathbb{R})$, které polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $p(x - 1)$, je izomorfizmus vektorových prostorů.

19. **(3)** Najděte dva různé izomorfizmy mezi prostory $P_n(x, \mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{n+1}$.

20. **(3)** Najděte dva různé izomorfizmy mezi prostory $M_{mn}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{mn}$.

21. **(3)** Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
Najděte jádro a obraz zobrazení $f : M_{32}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$, které matici X přiřazuje matici AX.

22. **(3)** Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Najděte jádro a obraz zobrazení $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{23}(\mathbb{R})$, které matici X přiřazuje matici XA.

23. **(3)** Najděte jádro a obraz zobrazení $f : P_n(x,\mathbb{R}) \to P_n(x,\mathbb{R})$, které polynomu přiřazuje jeho první derivaci.

24. **(2)** Jakou podmínku musí splňovat lineární zobrazení, aby zobrazovalo lineárně nezávislé množiny na lineárně nezávislé množiny? Dokažte.

25. **(2)** Jakou podmínku musí splňovat lineární zobrazení, aby zobrazovalo množiny generátorů na množiny generátorů? Dokažte.

26. **(2)** Jakou podmínku musí splňovat lineární zobrazení, aby zobrazovalo báze na báze? Dokažte.

27. **(4)** Nechť $f, g : V \to W$ jsou dvě lineární zobrazení. Dokažte, že množina vektorů z V, na nichž se zobrazení f a g rovnají, je vektorový podprostor.

28. **(2)** Najděte endomorfizmus, který je monomorfizmem, ale není epimorfizmem.

29. **(2)** Najděte endomorfizmus, které je epimorfizmem, ale není izomorfizmem.

30. **(2)** Dokažte, že $f : V \to V'$ je monomorfizmus, právě když existuje homomorfizmus $g : V' \to V$ takové, že $gf = 1_V$.

31. **(2)** Dokažte, že $f : V \to V'$ je epimorfizmus, právě když existuje homomorfizmus $g : V' \to V$ takové, že $fg = 1_{V'}$.

32. **(2)** Dokažte, že pro libovolné dva homomorfizmy $f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ pro jádra platí $\operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Ker}(g \circ f)$ a formulujte a dokažte obdobné tvrzení pro obrazy.

34. **(3)** Jaké je jádro endomorfizmu konečně dimenzionálního vektorového prostoru, který je epimorfizmem? Odpověď zdůvodněte.

35. **(3)** Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{np}(\mathbb{F})$. Rozhodněte, které z následujících výroků platí a odpověď zdůvodněte:

   (a) $\operatorname{Im} f_{AB} = \operatorname{Im} f_B$

   (b) $\operatorname{Im} f_{AB} \supset \operatorname{Im} f_B$

   (c) $\operatorname{Im} f_{AB} \subset \operatorname{Im} f_A$

   (d) $\operatorname{Im} f_{AB} = \operatorname{Ker} f_{B^T}$

   (e) $\operatorname{Im} f_{AB} = \operatorname{Im} f_A$

36. **(2)** Nechť V_1, V_2 jsou vektorové prostory konečné dimenze, $g : V_1 \to V_2$ a $f : V_2 \to V_1$ jsou homomorfizmy. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Je-li gf izomorfizmus a fg izomorfizmus, pak g je izomorfizmus a f je izomorfizmus. Odpověď zdůvodněte. Rozhodněte, zda tvrzení platí i bez požadavku konečné dimenze.

37. **(3)** Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{np}(\mathbb{F})$. Rozhodněte, které z následujících výroků platí a odpověď zdůvodněte:

   (a) $\operatorname{Ker} f_{AB} = \operatorname{Ker} f_A$

   (b) $\operatorname{Ker} f_{AB} \subset \operatorname{Ker} f_A$

   (c) $\operatorname{Ker} f_{AB} \supset \operatorname{Ker} f_B$

   (d) $\operatorname{Ker} f_{AB} = \operatorname{Im} f_{A^T}$

   (e) $\operatorname{Ker} f_{AB} = \operatorname{Ker} f_B$

38. **(2)** Nechť $f : V_2 \to V_3$, $g : V_1 \to V_2$, $h : V_1 \to V_3$, $h = fg$ jsou tři homomorfizmy vektorových prostorů. Rozhodněte, které z následujících výroků jsou pravdivé, a své rozhodnutí zdůvodněte.

   (a) h, f jsou monomorfizmy $\Rightarrow$ g je monomorfizmus

   (b) f, g jsou monomorfizmy $\Rightarrow$ h je monomorfizmus

   (c) h, g jsou monomorfizmy $\Rightarrow$ f je monomorfizmus

   (d) h je monomorfizmus $\Rightarrow$ g je monomorfizmus

   (e) g je monomorfizmus $\Rightarrow$ h je monomorfizmus

   (f) h je monomorfizmus $\Rightarrow$ f je monomorfizmus

39. **(3)** Najděte příklad dvou homomorfizmů f a g takových, že ani f ani g nejsou izomorfizmy, ale gf izomorfizmus je. Mohou být f a g endomorfizmy?

40. **(4)** Najděte nenulový endomorfizmus f, pro nějž $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

41. **(4)** Jaké je jádro endomorfizmu konečně dimenzionálního vektorového prostoru, který je epimorfizmem?

42. **(4)** Jaký je obraz endomorfizmu konečnědimenzionálního vektorového prostoru, který je zároveň monomorfizmem?

43. **(2)** Nechť V_1, V_2 jsou vektorové prostory, $M = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je báze V_1 a $F : M \to V_2$ je libovolná funkce. Dokažte, že existuje právě jeden homomorfizmus $f : V_1 \to V_2$ splňující $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $f(u_i) = F(u_i)$.

44. **(2)** Dokažte, že jsou-li f a g homomorfizmy a gf je monomorfizmus, pak f je monomorfizmus. Ukažte také, že g monomorfizmus být nemusí.

45. **(2)** Uvažujme homomorfizmy $f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ takové, že f je monomorfizmus, g je epimorfizmus a $gf = 0$. Dokažte, že potom $\dim V_2 \geq \dim V_1 + \dim V_3$.

46. **(1)** Nechť V je vektorový prostor dimenze $2n$ a f endomorfizmus na M. Dokažte, že $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ právě když $f^2 = 0$ a současně hodnost f je rovna n.

47. **(3)** Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ splňuje

$$f_A((1,1)) = (0,1,2)$$
$$f_A((1,-1)) = (2,0,-1)$$

48. **(4)** Dokažte, že $f_A + f_B = f_{A+B}$.

49. **(3)** Dokažte, že pro A regulární je f_A izomorfizmus a $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

50. **(3)** Nechť V, V' je vektorové prostory, $M \subset V$ a $f : V \to V'$ lineární zobrazení. Dokažte, že $f(\langle M \rangle) = \langle f(M) \rangle$.

51. **(3)** Nechť V, V' je vektorové prostory, M je množina generátorů V a $f : V \to V'$ epimorfizmus. Dokažte, že $f(M)$ generuje V'.

52. **(2)** Nechť V, V' jsou vektorové prostory, $M \subset V$, $f : V \to V'$ lineární zobrazení takové, že $f|M$ je prosté zobrazení a $f(M)$ je lineárně nezávislá množina. Dokažte, že pak M je lineárně nezávislá.

53. **(2)** Nechť V, V' jsou vektorové prostory, M je báze V, $F : M \to V'$ je zobrazení a $f : V \to V'$ jednoznačně určený homomorfizmus, pro který $f|M = F$. Dokažte, že f je monomorfizmus právě když $F(M)$ je lineárně nezávislá množina.

54. **(2)** Nechť V, V' jsou vektorové prostory, M je báze V, $F : M \to V'$ je zobrazení a $f : V \to V'$ jednoznačně určený homomorfizmus, pro který $f|M = F$. Dokažte, že f je epimorfizmus právě když $F(M)$ generuje V'.

55. **(3)** Nechť V, V' jsou vektorové prostory, M je lineárně nezávislá podmnožina ve V, která není bází, $F : M \to V'$ je zobrazení. Zkonstruujte dva různé homomorfizmy $f, g : V \to V'$, pro které $f|M = g|M = F$.

56. **(3)** Nechť V, V' jsou vektorové prostory, M je množina generující V, která není bází. Ukažte, že existuje zobrazení $F : M \to V'$ takové, že neexistuje žádný homomorfizmus $f : V \to V'$, pro který $f|M = F$.

57. **(4)** Najděte souřadnice vektoru $u = (7, -3, 4, 12)$ vzhledem k bázi $M = \{(2, 3, 1, 4), (1, -2, 2, 3), (-3, 2, 1, -2)\}$ podprostoru $\langle M \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

58. Určete matici homomorfizmu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_1, x_2, x_3)$ vzhledem ke kanonickým bázím $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ a vzhledem k bázím $M = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ a $M' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$. Určete jádro a obraz f.

59. **(3)** Homomorfizmus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázím $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ a $\{(1, 1), (2, 0)\}$ matici
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Určete obraz vektoru (x, y, z).

60. **(3)** Určete matici homomorfizmu $f : P_2(x, \mathbb{R}) \to P_2(x, \mathbb{R})$ přiřazujícího polynomu $p(x)$ polynom $p'(x) - 2p(x)$, kde $p'(x)$ je první derivace $p(x)$, vzhledem k bázím $M = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$ a $N = \{x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$.

1. **(3)** Určete matici přechodu od báze $M = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$ k bázi $N = \{x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$ v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2.

61. **(3)** Je dán homomorfizmus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$f\left(a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$
$$= a\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Rozhodněte, jestli je f automorfizmus a pokud ano, najděte matici inverzního automorfizmu vzhledem ke kanonickým bázím.

62. **(3)** Nechť $v \in \mathbb{R}^3$. Určete matici homomorfizmu $f_v(x) = v \times x$ daného vektorovým součinem s v vůči kanonickým bázím. Určete jádro a obraz tohoto homomorfizmu.

63. **(2)** Nechť $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ je homomorfizmus určený vztahem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_3 - 2x_4)$$

Najděte nějakou bázi M jádra zobrazení f a nějakou bázi N obrazu zobrazení f. Dále najděte nějaký doplněk W podprostoru $\operatorname{Ker} f$ v $\mathbb{R}^4$ a takovou jeho bázi P, aby matice zúženého zobrazení $f|W$ vzhledem k bázím P a N byla jednotková matice.

64. **(3)** Nechť $v \in \mathbb{R}^n$ a $p_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení dané pro libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^n$ vztahem $(p_v(x))_i = (\sum_{j=1}^n v_j x_j) v_i$. Ověřte, že p_v je lineární zobrazení, najděte matici zobrazení p_v vzhledem ke kanonickým bázím a určete jádro, obraz a hodnost zobrazení p_v.

65. **(3)** Nechť V je prostor všech reálných čtvercových matic stupně 2 a definujme zobrazení $f : V \to V$ vztahem $f_B(X) = BXB^{-1}$, kde

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Určete matici zobrazení f_B vzhledem k bázi

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

66. **(2)** Ukažte, že pokud $A \sim B$, pak $A^k \sim B^k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a pokud A je regulární, pak $A^k \sim B^k$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

67. **(2)** Dokažte, že zobrazení $f : P_n(x, \mathbb{R}) \to P_n(x, \mathbb{R})$ přiřazující polynomu $p(x)$ polynom $p(x-1)$ je automorfizmus a najděte jeho matici vzhledem k bázi $\{1, x, \dots, x^n\}$.

68. **(2)** Nechť $a \in \mathbb{R}$. Najděte matici přechodu od báze $\{1, x, x^2 \dots, x^n\}$ k bázi $\{1, x-a, (x-a)^2 \dots, (x-a)^n\}$ a naopak v $P_n(x, \mathbb{R})$.

69. **(2)** Dokažte, že relace „býti izomorfní“ je relace ekvivalence na množině všech vektorových prostorů.

70. **(2)** Řekneme, že podmnožina M vektorového prostoru V je konvexní, pokud pro libovolné dva body $u, v \in M$ je v M i jejich spojnice, tedy množina vektorů $\{tu+(1-t)v | t \in \langle 0, 1\rangle\}$. Dokažte, že lineární zobrazení zachovávají konvexitu množin.

71. **(2)** Dokažte, že duální prostor V_n^* je izomorfní prostoru V_n.

72. **(1)** Dokažte, že pro každý homomorfizmus $f : V_n \to W_m$ existují báze V_n a W_m takové, že matice f vůči těmto bázím je horní trojúhelníková.

73. **(1)** Pokud A a B jsou dvě čtvercové matice stejné velikosti, pro něž $ABAB = 0$, plyne z toho již $BABA = 0$?

74. **(1)** Nechť $f \in \mathrm{End}(V_n)$. Dokažte, že

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = h(f) - h(f^2)$$

Kapitola 7

Skalární součin

V této kapitole se podíváme na příklad dodatečné struktury, kterou je možné definovat na vektorovém prostou, na skalární součin. Zavedením skalárního součinu získává čistě algebraický objekt geometrické vlastnosti - umíme říct, kdy jsou vektory kolmé, změřit jejich velikost, definovat úhel mezi nimi. Některé báze se stanou význačnými - ortogonální a ortonormální báze. Mezi lineárními zobrazeními, která byla definována jako podmnožina všech zobrazení, která se chovají „hezky“ k algebraické struktuře vektorového prostoru, budeme moci vybrat menší podmnožinu lineárních zobrazení, která se chovají „hezky“ i k dodatečné struktuře geometrické, kterou s sebou přináší skalární součin.

Definice 24. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, přičemž $\mathbb{F}$ je $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Zobrazení $g : V \times V \to \mathbb{F}$, které splňuje $\forall u, v, w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$

1. $g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v) = g(u, \bar{\lambda} v)$,
2. $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$, $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$,
3. $g(u, v) = \overline{g(v, u)}$,
4. $g(u, u) \geq 0$, přičemž $g(u, u) = 0$ nastává pouze pro $u = 0$,

nazýváme **skalární součin** na V.

Jsou to vlastně dvě definice v jedné. V reálném případě je $\bar{\lambda} = \lambda$, tedy první dvě podmínky vlastně říkají, že pokud do prvního nebo druhého argumentu zobrazení $g(\cdot, \cdot)$ dosadíme libovolný vektor, pak vzniklé zobrazení z V

do $\mathbb{R}$ je lineární. Takové zobrazení z $V \times V$ do $\mathbb{R}$ se nazývá **bilineární forma**. Podobně lze definovat pojem trilineární, kvadrilineární nebo obecně **multilineární formy**. V komplexním případě je situace jiná, při „vytknutí“ konstanty z druhého argumentu přibere tato konstanta komplexní sdružení. Taková vlastnost se nazývá **antilinearitou**, dobrým příkladem antilineárního zobrazení je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \bar{z}$. Pro zobrazení z $V \times V$ do $\mathbb{C}$, které je v jednom argumentu lineární a v druhé antilineární, se používá pojem **seskvilineární forma**.

Třetí podmínka opět říká něco trochu jiného na reálném a na komplexním vektorovém prostoru. Mluvíme o **symetrické** bilineární, resp. **hermitovské** seskvilineární formě. Poslední podmínka má smysl v reálném i komplexním případě, protože z předchozí podmínky plyne, že $g(u,u)$ je vždy reálné číslo a má tedy smysl ho porovnávat s nulou. O bilineární formě, splňující čtvrtou podmínku říkáme, že je **pozitivně definitní**. Funkce $\|u\|_g := \sqrt{g(u,u)}$ se nazývá **norma** příslušná skalárnímu součinu g. Pozitivní definitnost zaručuje, že norma je dobře definovaná a že nulovou normu má pouze nulový vektor.

Pokud bude jasné, s jakým skalárním součinem na prostoru pracujeme, budeme jej značit místo $g(u,v)$ jen (u,v) a jeho normu $\|u\|$. Naopak, pokud budeme chtít explicitně vyznačit, že na prostoru V používáme skalární součin g, budeme prostor a skalární součin psát jako dvojici (V,g).

7.1 Geometrie definovaná skalárním součinem

Skalární součin umožňuje definovat na vektorovém prostoru pojem vzdálenosti. Abstraktně se vzdálenost na nějaké množině zavádí pomocí pojmu **metriky**:

Definice 25. Nechť M je množina. Funkci $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ nazýváme metrikou na M, pakliže splňuje pro všechny body $x, y, z \in M$ následující axiomy:

1. $\rho(x,y) \geq 0$ a $\rho(x,y) = 0$ právě když $x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$

Dvojici (M,ρ) pak nazýváme **metrický prostor**.

První axiom říká, že vzdálenost je vždy nezáporná a žádné dva různé body nemohou mít nulovou vzdálenost. Druhý axiom vyjadřuje symetrii pojmu vzdálenosti a třetímu se říká **trojúhelníková nerovnost**.

Příklad. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ lze zavést metriku různými způsoby. Tradiční je metrika euklidovská, $\rho_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Jsou ale i jiné způsoby, například metrika manhattanská, $\rho_1(x,y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, nebo metrika maximová, $\rho_\infty(x,y) := \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$. Zkuste si u každé z nich ověřit platnost axiomů.

Věta 22. *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Pak pro libovolné vektory $u, v \in V$ platí*

1. $|(u,v)| \le \|u\|\|v\|$
2. $\|u - v\| \le \|u\| + \|v\|$
3. *Dvojice (V, ρ), kde $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ je definována $\rho(u,v) := \|u - v\|$, tvoří metrický prostor.*

Důkaz. Pro $v = 0$ je první tvrzení zřejmé. Pokud $v \neq 0$, pak

$$
\begin{aligned}
0 \le \left\| u - \frac{(u,v)}{\|v\|^2} v \right\|^2 &= \left(u - \frac{(u,v)}{\|v\|^2} v, u - \frac{(u,v)}{\|v\|^2} v \right) \\
&= \|u\|^2 - \frac{(u,v)}{\|v\|^2}(v,u) - \frac{\overline{(u,v)}}{\|v\|^2}(u,v) + \frac{|(u,v)|^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 - 2\frac{|(u,v)|^2}{\|v\|^2} + \frac{|(u,v)|^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{|(u,v)|^2}{\|v\|^2},
\end{aligned}
$$

což vede po úpravě na dokazovanou nerovnost. Tu pak využijeme na dokázání druhého tvrzení:

$$
\begin{aligned}
\|u - v\|^2 = (u - v, u - v) &= \|u\|^2 - (u,v) - (v,u) + \|v\|^2 = \\
&= \|u\|^2 - 2\operatorname{Re}(u,v) + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2|(u,v)| + \|v\|^2 \\
&\le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2
\end{aligned}
$$

Třetí tvrzení je zřejmé: první axiom metriky je důsledkem čtvrté vlastnosti skalárního součinu, druhý axiom plyne z první vlastnosti a trojúhelníková nerovnost je důsledkem druhého tvrzení této věty. □

Prvnímu tvrzení se říká Cauchyova nerovnost (někdy též Schwarzova nebo Buňakovského). Věta vlastně ověřuje korektnost následující definice, která zavádí na vektorovém prostoru se skalárním součinem nejdůležitější geometrické pojmy:

Definice 26. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $u, v \in V$. Pak číslo $\|u-v\|$ nazýváme **vzdáleností vektorů** u a v. Řekneme, že $u, v \in V$ jsou **kolmé**, pokud $(u, v) = 0$, značíme $u \perp v$. Pokud V je reálný vektorový prostor, pak číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které platí $\cos \varphi = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$, nazýváme **úhlem mezi vektory** u a v.

Metrice $\rho(u, v) := \|u-v\|$ se říká metrika indukovaná skalárním součinem. Pokud V je reálný vektorový prostor, splňuje tato metrika vztah

$$(u, v) = \frac{1}{4} \left(\rho(u, -v)^2 - \rho(u, v)^2 \right) ,$$

kterému se někdy říká **polarizační identita** a který se dá snadno dokázat z definic (zkuste si a pokuste se také napsat verzi pro komplexní vektorový prostor). Je to vlastně rekonstrukce skalárního součinu z jím indukované metriky.

Pokud (M, ρ) a (N, σ) jsou dva metrické prostory a $f : M \to N$ je zobrazení, které $\forall x, y \in M$ splňuje $\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y))$, pak se toto f nazývá **izometrie**. Z polarizační identity plyne, že homomorfizmus $f : (V, g) \to (W, h)$ dvou vektorových prostorů se skalárním součinem je izometrie, právě tehdy když $\forall u, v \in V$ platí $g(u, v) = h(f(u), f(v))$. Lineární zobrazení s touto vlastností se nazývají v reálném, resp. komplexním případě **ortogonální**, resp. **unitární**. Ze čtvrté vlastnosti skalárního součinu plyne, že takové zobrazení musí být monomorfizmus. Pokud je $(V, g) = (W, h)$ vektorový prostor konečné dimenze, a jde tedy o endomorfizmus, musí být f izomorfizmem. Je jednoduché ověřit, že množina všech ortogonálních endomorfizmů prostoru (V, g) tvoří grupu, a stejně tak i množina všech unitárních endomorfizmů.

7.2 Skalární součin v souřadnicích

Je-li V vektorový prostor konečné dimenze se skalárním součinem, $M = \{u_1, \ldots, u_n\}$ jeho báze, u, v dva vektory z V a $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)^T = (u)_M$,

$y \equiv (y_1, \ldots, y_n)^T = (v)_M$ jejich souřadnice, potom

$$(u,v) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j u_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j (u_i, u_j) = x^T Q \bar{y},$$

kde jsme číslo (u_i, u_j) identifikovali jako ij-tý element matice Q. Ta se nazývá **maticí skalárního součinu** vzhledem k bázi M. Je to symetrická, resp. hermitovská matice, neboť $(u_i, u_j) = \overline{(u_j, u_i)}$, tedy $Q = Q^+$. Jak se na matici Q projeví podmínka pozitivní definitnosti, to je trochu složitější a více o tom budeme moci říct až v příštím semestru, kdy budeme studovat bilineární formy podrobněji. Zde se omezíme jen na pozorování, že pro $Q = E$ je

$$(u,v) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$
$$\|u\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

a pozitivní definitnost je zjevně zaručena. Skalárnímu součinu na $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, jehož matice vzhledem ke kanonické bázi je E, se říká **standardní skalární součin**. Vidíme, že standardní skalární součin je právě ten, který indukuje na $\mathbb{R}^n$ euklidovskou metriku.

Co se stane s maticí Q při změně báze? Pokud M' je další báze ve V a R je matice přechodu od M k M', tedy pro souřadnice platí $x = Rx'$, pak také $x^T = x'^T R^T$, $\bar{y} = \bar{R}\bar{y}'$, a tudíž

$$(u,v) = x^T Q \bar{y} = x'^T R^T Q \bar{R} \bar{y}', \tag{7.1}$$

čili maticí skalárního součinu vzhledem k M' je $R^T Q \bar{R}$. Pokud chceme, aby matice skalárního součinu vzhledem k bázi M' byla stejná jako k M, dostáváme podmínku $Q = R^T Q \bar{R}$. Všechny matice R, které pro dané pevné Q tuto podmínku splňují, tvoří grupu vzhledem k násobení (ověřte sami!). Speciálně pokud $Q = E$, zjednoduší se podmínka na $R^+ R = E$ v komplexním případě, resp. na $R^T R = E$ v reálném případě. Takovým maticím R se pak říká **unitární**, resp. **ortogonální**, a příslušná grupa matic stupně n se značí $U(n)$, resp. $O(n)$.

Jaký je vztah mezi unitárními maticemi a unitárními endomorfizmy? Pokud V_n je prostor se skalárním součinem, $f \in \mathrm{End}(V)$ je unitární endomorfizmus, M je báze V_n, vůči níž mají vektory $u, v \in V$ souřadnice $(u)_M = x$, $(v)_M = y$, f matici A a skalární součin matici Q, pak

$$x^T Q \bar{y} = (u,v) = (f(u), f(v)) = x^T A^T Q \bar{A} \bar{y}$$

Pokud $Q = E$, dostáváme $A^+A = E$. Tedy vzhledem k bázi, vůči níž je matice skalárního součinu jednotková, má unitární endomorfizmus unitární matici a podobně ortogonální endomorfizmus má vůči takové bázi ortogonální matic. Pojďme se nyní přesvědčit, že takovou bázi je možné vždy najít.

7.3 Ortonormální báze

Definice 27. Nechť V je prostor se skalárním součinem. Bázi prostoru V, v níž je každý vektor kolmý na všechny ostatní, nazýváme **ortogonální báze**, pokud navíc je norma všech vektorů rovna jedné, mluvíme o **ortonormální bázi**.

Pokud V_n je vektorový prostor konečné dimenze, pak matice skalárního součinu vzhledem k ortogonální bázi je diagonální s kladnými hodnotami na diagonále a vzhledem k ortonormální bázi je to jednotková matice E. Vidíme tedy, že je-li M ortonormální báze, pak M' je také ortonormální právě když matice přechodu od M k M' je ortogonální, resp. unitární matice. Pokud najdeme jednu ortonormální bázi, pak už se dokážeme alespoň teoreticky dostat ke všem ostatním prostřednictvím elementů $O(n)$ resp. $U(n)$. Postup, jak ortonormální bázi získat postupnými úpravami libovolné báze, nese název **Gramova-Schmidtova ortogonalizace**. Uvažujme $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ bázi V_n a definujme $v_1 := u_1$. Vektor

$$v_2 := u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1,$$

je kolmý na v_1, stačí dosadit. Dále definujme

$$v_3 := u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{\|v_2\|^2} v_2,$$

opět vidíme, že v_3 je kolmé na v_1 i na v_2. Pokračováním tohoto postupu získáme ortogonální bázi a vydělením každého vektoru jeho normou bázi ortonormální. Přesněji to formuluje následující věta:

Věta 23. *Nechť V_n je vektorový prostor se skalárním součinem a $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ jeho báze. Pak existuje ortonormální báze $M' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ prostoru V_n taková, že $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u'_1, \dots, u'_k \rangle$.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle n. Pokud $n = 1$, pak definujme $v_1 := u_1$, $u_1' := \frac{v_1}{\|v_1\|}$, tvrzení věty platí. Nechť nyní $n > 1$ a předpokládejme platnost tvrzení pro všechny prostory dimenze menší nebo rovné n. Takovým prostorem je i $\langle u_1, \dots, u_n\rangle$, takže podle indukčního předpokladu v něm máme ortonormální bázi $\{u_1', \dots, u_n'\}$, pro kterou $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\langle u_1, \dots, u_k\rangle = \langle u_1', \dots, u_k'\rangle$. Definujme nyní

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (u_{n+1}, u_i')u_i'.$$

Tento vektor je kolmý na u_i', $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Dále po úpravě vidíme, že u_{n+1} je lineární kombinací vektorů u_i' a v_{n+1}, čili $u_{n+1} \in \langle v_{n+1}\rangle \vee \langle u_1', \dots, u_n'\rangle = \langle v_{n+1}\rangle \vee \langle u_1, \dots, u_n\rangle$, tedy v_{n+1} nemůže být nulový vektor. Proto má smysl definovat $u_{n+1}' := \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|}$. Je pak zjevné, že $\|u_{n+1}'\| = 1$, u_{n+1}' je kolmý na všechny vektory $u_1', \dots, u_n'$ a $\langle u_1', \dots, u_{n+1}'\rangle = \langle u_1, \dots, u_{n+1}\rangle$. Tím je věta dokázána. □

Triviálním důsledkem věty je, že v každém vektorovém prostoru (V_n, g) nad $\mathbb{F}$ existuje ortonormální báze. Je zřejmé, že lineární zobrazení, které i-tému bázovému vektoru této báze přiřadí i-tý prvek kanonické báze $\mathbb{F}^n$, je izometrie prostoru (V_n, g) a prostoru $\mathbb{F}^n$ se standardním skalárním součinem. Dostáváme tedy zesílení dříve dokázaného tvrzení, že každý vektorový prostor konečné dimenze je izomorfní nějakému $\mathbb{F}^n$, nyní již víme, že je mu dokonce izometrický (ať už je skalární součin na V jakýkoli).

Zastavme se ještě u klíčového kroku v důkazu věty. Máme ortonormální množinu $M = \{u_1', \dots, u_n'\}$, jejímž lineárním obalem je $W := \langle M\rangle$. Zobrazení $P_W : V \to V$, které vektoru u přiřazuje vektor $\sum_{i=1}^{n} (u, u_i')u_i'$ je zjevně homomorfizmus, jehož obrazem je právě W. Navíc platí, že $P_W P_W = P_W$ (ověřte sami) a všechny vektory kolmé na W zobrazuje P_W na nulu. Je to tudíž **ortogonální projekce** na podprostor W. V důkazu věty tedy vlastně konstruujeme v_{n+1} tak, že odečítáme od u_{n+1} jeho kolmý průmět na W. Vzniklý rozdíl je kolmý na W a tedy i na všechny vektory z M.

Mezi ortogonálními maticemi a ortonormálními bázemi je ještě jeden zajímavý vztah. Podmínka ortogonality matice R se dá přepsat jako $R^T R = E$. Prvek na pozici ij součinu matic na levé straně je vlastně euklidovským skalárním součinem i-tého a j-tého řádku matice R^T, takže podmínka ortogonality znamená, že sloupce matice R tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Podobně sloupce unitární matice tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$. Vynásobením rovnosti

$R^T R = E$, resp. $R^+ R = E$ zleva R a zprava R^{-1} dostáváme $RR^T = E$, resp. $RR^+ = E$, tedy že ortonormální bázi tvoří i řádky.

Příklad. Nalezněme ortonormální bázi podprostoru $\langle (1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)\rangle$ v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Označme vektory po řadě u_1, u_2, u_3 a vezměme $v_1 := u_1$. Platí $\|v_1\|^2 = 10$ a $(u_2, v_1) = 1+2-10-3 = -10$. Tedy

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 = (1,1,-5,3) - \frac{-10}{10}(1,2,2,-1) = (2,3,-3,2)$$

Vidíme, že skutečně $v_2 \perp v_1$. Spočteme $\|v_2\|^2 = 26$, $(u_3, v_1) = 30$ a $(u_3, v_2) = -26$, takže

$$v_3 = (3,2,8,-7) - \frac{30}{10}(1,2,2,-1) - \frac{-26}{26}(2,3,-3,2) = (2,-1,-1,-2),$$

což je opět vektor kolmý na v_2 i v_1, $\|v_3\|^2 = 10$. Nakonec vydělíme každý vektor jeho normou a získáváme ortonormální bázi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,-1), \frac{1}{\sqrt{26}}(2,3,-3,2), \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,-2) \right\}$$

Zbytek oddílu má bonusový charakter.

Pokud $M = \{u_1, \ldots, u_n\}$ je báze $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, pak můžeme sestavit matici B, jejímž i-tým řádkem bude vektor u_i. Pokud se budeme dívat na algoritmus GS-ortogonalizace jako na posloupnost úprav matice B, pak v prvním kroku neděláme nic, ve druhém přičteme do druhého řádku nějaký násobek prvního, ve třetím do třetího nějakou lineární kombinaci prvních dvou a obecně v každém kroku do řádku lineární kombinaci předchozích řádků. Matice takové úpravy je dolní trojúhelníková a součin dolních trojúhelníkových matic je dolní trojúhelníková matice. Posledním krokem GS-ortogonalizace je normalizace každého vektoru na jedničku, což odpovídá násobení diagonální maticí. Výsledná matice už má ortonormální řádky a je to tudíž ortogonální matice. Celkově tedy pro libovolnou regulární matici B existuje dolní trojúhelníková matice L, diagonální matice D a ortogonální matice O, takové, že platí

$$O = DLB$$

Pokud tuto rovnost transponujeme, označíme $K := O^T$ a násobíme zprava maticemi $A := D^{-1}$ a $N := (L^T)^{-1}$, dostáváme, že libovolná regulární matice B^T se dá (jednoznačně) zapsat jako součin KAN ortogonální, diagonální a horní trojúhelníkové matice s jednotkami na diagonále, tzv. KAN-**rozklad**. Je možné jej modifikovat i pro případ komplexní matice a také lze zahrnout matice singulární. Při označení $Q = K$ a $R = AN$ rovnou dostáváme speciální případ tzv. QR-**rozkladu** libovolné matice na součin ortogonální a horní trojúhelníkové matice. Obecný QR-rozklad funguje i pro matice, které nejsou čtvercové.

Další zajímavý rozklad matice, který plyne z GS-ortogonalizace, je Choleského rozklad libovolné čtvercové symetrické pozitivně definitní matice A na součin $U^T U$, kde U je horní trojúhelníková matice s kladnými čísly na diagonále. Zde stačí definovat na $\mathbb{R}^n$ skalární součin, který má vzhledem ke kanonické bázi matici A, a pak provést GS-ortogonalizaci kanonické báze. V takto vzniklé bázi M má skalární součin matici E a stačí vzít za U matici přechodu od K k M.

7.4 Ortogonální doplněk a dualita

Množinu všech vektorů kolmých na všechny prvky množiny $M \subset V$ nazýváme **ortogonální doplněk** M, značíme $M^\perp$. Jak souvisí tento pojem s doplňkem podprostoru definovaným v kapitole o vektorových prostorech?

Věta 24. *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, W jeho podprostor konečné dimenze. Pak ortogonální doplněk $W^\perp$ podprostoru W je doplňkem podprostoru W ve V_n, tedy $W \oplus W^\perp = V_n$.*

Ale samozřejmě každý doplněk není ortogonální doplněk

Důkaz. Dokazujeme vlastně dvě tvrzení: $W \cap W^\perp = 0$ a $W \vee W^\perp = V$. Pokud $u \in W \cap W^\perp$, pak $u \perp u$, čili $(u, u) = 0$ a tudíž $u = 0$. Pro druhé tvrzení předpokládejme, že existuje $u \in V_n$, $u \notin W \oplus W^\perp$. Zvolme ve W ortonormální bázi $\{u_1, \dots, u_k\}$ a položme $v := u - \sum_{i=1}^k (u, u_i) u_i$. Pak také $v \notin W \oplus W^\perp$ a tedy i $v \notin W^\perp$. Na druhou stranu pro libovolný vektor $w = \sum_{j=1}^k r_j u_j$ z W platí

$$(v, w) = \left(u - \sum_{i=1}^k (u, u_i) u_i, \sum_{j=1}^k r_j u_j \right) = \\ = \sum_{j=1}^k \bar{r}_j (u, u_j) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \bar{r}_j (u, u_i)(u_i, u_j) = 0,$$

tedy $v \in W^\perp$, což je spor. $\square$

Ortogonální doplněk podmnožiny ve V je podprostorem V. Stačí ověřit, že $u^\perp \equiv \{u\}^\perp$ je podprostor, pak již musí být $M^\perp = \bigcap_{u \in M} u^\perp$ jakožto průnik podprostorů také. Platí též, že $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$, neboť pokud je vektor kolmý na všechny prvky z M, je kolmý i na každou jejich lineární kombinaci a naopak, pokud je kolmý na všechny lineární kombinace, pak je speciálně kolmý i na ty z nich, které jsou rovny přímo vektorům z M. Operace ortogonálního doplňku tedy přiřazuje podprostorům ve V jiné podprostory. Pokud navíc V je prostorem konečné dimenze n a W jeho podprostor, pak z předchozí věty plyne $\dim W^\perp = n - \dim W$. Použijeme-li operaci ortogonálního doplňku dvakrát, vidíme jednak, že $\forall w \in W$ je w kolmé na všechny prvky z $W^\perp$, tedy $W \le (W^\perp)^\perp$. Zároveň $\dim (W^\perp)^\perp = n - \dim W^\perp = \dim W$, tudíž musí být $(W^\perp)^\perp = W$. Operacím, které jsou stejně jako „vzetí ortogonálního doplňku k podprostoru“ samy sobě inverzní, se obecně říká **involuce** nebo **duality**, dalšími příklady jsou třeba komplexní sdružení nebo středová či osová souměrnost v prostoru. Dualita zprostředkovaná skalárním součinem páruje podprostory do dvojic, jejichž členové jsou si navzájem ortogonálním doplňkem. Podobně jsou párována do dvojic i lineární zobrazení:

Definice 28. Nechť $(V, g), (W, h)$ jsou dva prostory nad $\mathbb{F}$ se skalárním součinem a $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Pak homomorfizmus $f^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$, který $\forall v \in V$, $\forall w \in W$ splňuje

$$h(w, f(v)) = g(f^*(w), v),$$

nazýváme **duálním** nebo též **adjungovaným homomorfizmem** k f.

Nechť M je ortonormální báze (V_m, g), N je ortonormální báze (W_n, h), $f \in \mathrm{Hom}(V_m, W_n)$, $(v)_M \equiv x \equiv (x_1, \dots, x_m)^T$, $(w)_N \equiv y \equiv (y_1, \dots, y_n)^T$ a $A := (f)_{NM}$, $B := (f^*)_{MN}$. Matice skalárního součinu g i h je vzhledem k libovolné ortonormální bázi jednotková. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \overline{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)} = (w, f(v)) = (f^*(w), v) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji} y_i \right) \bar{x}_j$$

Porovnáme-li obě strany, vidíme, že rovnost pro libovolná v a w vyžaduje, aby $\bar{a}_{ij} = b_{ji}$ pro libovolné indexy i, j, čili $B = A^+$ nebo v reálném případě $B = A^T$. Pokud tedy A je matice zobrazení f, pak matice transponovaná, resp. hermitovsky sdružená, je maticí zobrazení adjungovaného. Odtud je konečně vidět, čím je zavedení operací transponování a hermitovského sdružení matice motivováno. Protože jsou tyto operace definovány pro libovolnou matici, je zřejmé, že na prostoru konečné dimenze má každý homomorfizmus k sobě homomorfizmus adjungovaný. Z $(A^T)^T = A$ a $(A^+)^+ = A$ plyne, že $(f^*)^* = f$, jedná se tedy skutečně o dualitu.

Konečně se dostáváme do bodu, kdy můžeme nově interpretovat a elegantněji dokázat tvrzení $h(A) = h(A^T)$ a $h(B) = h(B^+)$ z kapitoly o hodnosti matice. Tvrzení vlastně říká, že obraz homomorfizmu f z $\mathbb{F}^m$ do $\mathbb{F}^n$ má stejnou dimenzi jako obraz jeho duálního homomorfizmu f^*. Vektor $w \in \mathbb{F}^n$ je prvkem $(\operatorname{Im} f)^\perp$, právě když $\forall v \in \mathbb{F}^m$ platí $h(w, f(v)) = 0$. To nastane právě když $g(f^*(w), v) = 0$, tedy $f^*(w) \in (\mathbb{F}^m)^\perp \equiv 0$ neboli $w \in \operatorname{Ker} f^*$. Tedy $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f^* \leq \mathbb{F}^n$, čili

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f^* = n$$

Podle věty o dimenzi jádra a obrazu ale také

$$\dim \operatorname{Im} f^* + \dim \operatorname{Ker} f^* = n$$

Tedy $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^*$.

Cvičení

1. **(3)** Dokažte alternativní verzi polarizační identity na reálném vektorovém prostoru

$$(u, v) = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$

2. **(3)** Dokažte tzv. rovnoběžníkové pravidlo

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

   Platí toto pravidlo pouze na reálném vektorovém prostoru, nebo i na komplexním?

3. **(3)** Dokažte na reálném vektorovém prostoru tzv. cosinovou větu

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\varphi,$$

   kde φ je úhel mezi vektory u a v.

4. **(4)** Je matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
maticí skalárního součinu na $\mathbb{R}^2$?

5. **(4)** Je matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
maticí skalárního součinu na $\mathbb{R}^2$?

6. **(3)** Je matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
maticí skalárního součinu na $\mathbb{R}^2$?

7. **(1)** Odvoďte polarizační identitu pro komplexní vektorový prostor.

8. **(3)** Buď $(\mathbb{R}^3, g)$ prostor se skalárním součinem daným předpisem $g(u, v) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_2 + x_2y_3$. Najděte ortogonální bázi $\{u_1, u_2, u_3\}$ prostoru (V_3, g), která obsahuje vektor $u_1 = (1, 2, 0)$. Najděte příslušnou ortonormální bázi.

9. **(3)** Na stejném prostoru se stejným skalárním součinem najděte ortonormální bázi podprostoru $\langle u, v\rangle$, $u = (5, 1, -1)$, $v = (0, 1, -1)$ a rozšiřte ji na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^3$

10. **(3)** V $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte ortonormální bázi podprostoru $\langle(1, -1, 2, 4), (1, -2, 2, 3), (2, -2, 5, 7)\rangle$ obsahující kladný násobek vektoru $(1, 0, 2, 5)$. Najděte ortogonální doplněk tohoto podprostoru.

11. **(3)** Najděte všechny různé úhly a délky vyskytující se mezi hranami, stěnovými úhlopříčkami a tělesovými úhlopříčkami krychle v $\mathbb{R}^3$. Řešte analogickou úlohu v $\mathbb{R}^4$.

12. **(4)** Najděte v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem ortogonální doplněk prostoru $\langle(1, 1, 2, 3), (3, 1, 1, 0)\rangle$

13. **(3)** Najděte v $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem ortogonální doplněk prostoru $\langle(2,0,1,0,1),(1,-1,1,0,1),(1,1,0,0,1)\rangle$ a najděte v tomto doplňku ortonormální bázi.

14. **(2)** Označme P^n prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n na intervalu $\langle -1,1\rangle$. Dokažte, že zobrazení

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot) :& P^n \times P^n \to \mathbb{R}\\ p \times q \to & \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx\end{aligned}$$

je skalární součin na P^n. Ortogonalizací báze $\{1, x, x^2\}$ najděte ortonormální bázi prostoru P^2 s tímto skalárním součinem.

15. **(1)** Pro všechna $n \in \mathbb{Z}_0^+$ zaveďme polynomy

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

Dokažte, že množina $\{P_0, P_1, \dots P_n\}$ tvoří ortogonální bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýše n. Dokažte, že jsou to až na násobek právě ty polynomy, které získáte ortogonalizací báze $\{1, x, \dots, x^n\}$.

16. **(1)** Dokažte, že pro libovolnou symetrickou matici Q existuje regulární matice R taková, že R^TQR je diagonální. Návod: interpretujte matici R^T, resp. R jako součin matic řádkových, resp. sloupcových úprav. Odvoďte z toho postup, jak poznat, že matice Q je pozitivně definitní.

17. **(2)** Nechť W je podprostor ve vektorovém prostoru V_n se skalárním součinem, M ortonormální báze v něm a N ortonormální báze $W^\perp$. Dokažte, že $M \cup N$ je ortonormální báze prostoru V_n a najděte matici projekcí P_W a $P_{W^\perp}$ vzhledem k této bázi.

18. **(2)** Dokažte, že matice rotace v $\mathbb{R}^2$ je ortogonální matice. Platí, že každá ortogonální matice je maticí rotace?

19. **(2)** Nechť u je vektor v $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Dokažte, že libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je možné jednoznačně rozložit na součet $x_\parallel + x_\perp$, kde $x_\parallel$ je násobkem u a $x_\perp$ je kolmý na u. Ukažte, že zobrazení přiřazující vektoru x vektor $x_\parallel$, resp. $x_\perp$ jsou homomorfizmy a najděte jejich matici vzhledem ke kanonické bázi a matici vzhledem k nějaké ortonormální bázi $\mathbb{R}^2$ obsahující násobek vektoru u.

20. **(1)** Dokažte, že pokud je W podprostorem V_n se skalárním součinem, pak pro libovolný vektor $u \in V_n$ má vektor $P_W(u)$ menší vzdálenost od u než všechny ostatní vektory W.

21. **(1)** Metoda nejmenších čtverců je speciálním případem počítání projekce na podprostor. Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ naměřené hodnoty nějaké veličiny v bodech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Chceme tuto závislost y na x co nejlépe aproximovat lineární funkcí, tedy najít taková čísla $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ bylo co nejmenší. Interpretujeme proto $y = (y_1, \dots, y_n)$ jako prvek vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Množina všech vektorů z $\mathbb{R}^n$, které se dostanou jako $(ax_1 + b, \dots, ax_n + b)$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$ je vlastně podprostor $W := \langle (1, \dots, 1), (x_1, \dots, x_n) \rangle$ v tomto prostoru. Pak projekce $P_W(y)$ je hledaný vektor, protože podmínka minimality součtu čtverců je vlastně podmínka nejmenší vzdálenosti v euklidovské normě. Tato projekce je vektor W, který je určený konkrétními hodnotami a a b v závislosti na x_i, y_i. Najděte vztahy vyjadřující tuto závislost.

22. **(3)** Určete délku úhlopříčky n-rozměrné jednotkové krychle, její úhel s libovolnou hranou a délku průmětu hrany do směru úhlopříčky. Dokažte, že ortogonální průměty vrcholů dělí úhlopříčku na n stejných částí.

23. **(2)** Nechť V_n je vektorový prostor se skalárním součinem a $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ jeho báze. Dokažte, že pak existuje $M^* = \{v_1, \dots, v_n\}$, tzv. báze duální k M, splňující podmínky (u_i, v_j) je rovno 1 pro $i = j$ a 0 jindy. Jaká je duální báze k ortogonální bázi? A k ortonormální? Jak souvisí matice přechodu od báze M k M' s maticí přechodu od M'^* k M^*?

Kapitola 8

Determinant matice

V kapitole o maticích jsme definovali pojem stopy čtvercové matice A stupně n, $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Jednou z jejích vlastností je, že pro tři matice $A, B, C \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je $\operatorname{Tr} ABC = \operatorname{Tr} CAB$. Speciálně pro R regulární platí $\operatorname{Tr} R^{-1}AR = \operatorname{Tr} RR^{-1}A = \operatorname{Tr} A$. Pokud A je matice endomorfizmu $f \in \operatorname{End} V_n$ vzhledem k bázi M, pak matice tohoto endomorfizmu vzhledem k jakékoli jiné bázi M' má tvar $R^{-1}AR$, kde R je matice přechodu od M k M', a tedy má i stejnou stopu. Lze tedy definovat $\operatorname{Tr} f$ stopu endomorfizmu f. Je to číslo, které je třeba spočítat z vyjádření f vzhledem k nějaké bázi, ale výsledek na volbě této báze nezávisí. Takovému číslu se v matematice říká **invariant**. V této kapitole se budeme zabývat jiným invariantem, kterému se říká **determinant matice**. Determinant má oproti stopě názornější geometrický význam, jeho definice je ale komplikovanější, a než ji budeme moci napsat, musíme se nějaký čas zabývat něčím, co samo o sobě s lineární algebrou nemá příliš společného.

8.1 Permutace

Permutace je bijektivní zobrazení konečné množiny na sebe. Množina může být jakákoliv, ale obvykle se bere prostě $\{1, \ldots, n\}$. Množinu všech permutací této množiny značíme S_n. Složení dvou permutací je permutace, identické zobrazení je permutace a inverzní zobrazení k permutaci je také permutace. Tedy S_n s operací skládání tvoří grupu, tzv. **symetrickou grupu** na n prvcích. Místo skládání někdy mluvíme o součinu permutací. Obvyklý zápis permutace π je pomocí dvou řádků

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

a pokud nehrozí nedorozumění, můžeme psát jenom řádek obrazů $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$. Pozor, nepleťte si tento zápis s podobným zápisem pro vektory a matice. Je snadné dokázat indukcí, že na n prvcích existuje právě $n!$ permutací.

Příklad. Grupa S_3 sestává právě z šesti prvků: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ a $(3,2,1)$. Inverzní prvek k $\pi = (2,3,1)$ je $\pi^{-1} = (3,1,2)$, protože $\pi(1) = 2$, takže musí být $\pi^{-1}(2) = 1$, atd. Příklad složení dvou permutací zapíšeme pro přehlednost ve dvouřádkovém zápise:

$$\pi \circ \rho \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Levá strana je složení dvou permutací, takže nejprve je třeba zobrazit každý prvek permutací ρ a poté permutací π, např.

$$(\pi \circ \rho)(1) = \pi(\rho(1)) = \pi(3) = 1$$

Definice 29. Nechť $\pi \in S_n$ a (i,j), $i < j$ je dvojice indexů z $\{1, \dots, n\}$ Řekneme, že $(\pi(i), \pi(j))$ **tvoří inverzi** v π, pakliže $\pi(i) > \pi(j)$. Počet všech takových dvojic nazveme $I(\pi)$, **počet inverzí** permutace π.

Pozor, pojmy tvořit inverzi a počet inverzí nemají žádnou souvislost s inverzní permutací, jsou to prostě ty dvojice čísel, které se na druhém řádku zápisu permutace vyskytují v opačném pořadí než na prvním. Například pro permutaci $(4,2,1,3)$ tvoří inverzi dvojice $(4,2)$, $(4,1)$, $(4,3)$ a $(2,1)$.

Lemma 14. *Nechť $\pi, \rho \in S_n$. Pak existuje celé číslo k takové, že $I(\pi \circ \rho) = I(\pi) + I(\rho) + 2k$.*

Důkaz. Nechť $i < j$, pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$\begin{aligned} (--): &\quad \rho(i) < \rho(j), \pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j)) \\ (-+): &\quad \rho(i) < \rho(j), \pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j)) \\ (+-): &\quad \rho(i) > \rho(j), \pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j)) \\ (++): &\quad \rho(i) > \rho(j), \pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j)) \end{aligned}$$

Označme počty dvojic odpovídající těmto variantám jako I_{--}, I_{-+}, I_{+-} a I_{++}. Varianty $(+-)$ a $(++)$ dávají inverzi permutace ρ, varianty $(-+)$ a $(++)$ inverzi permutace π a varianty $(-+)$ a $(+-)$ inverzi permutace $\pi \circ \rho$. Tedy

$$I(\pi \circ \rho) = I_{-+} + I_{+-} = (I_{-+} + I_{++}) + (I_{+-} + I_{++}) - 2I_{++} = I(\pi) + I(\rho) + 2k,$$

kde $k = -I_{++}$. $\square$

Definice 30. Nechť $\pi \in S_n$. **Znaménkem permutace** budeme rozumět číslo $\operatorname{sgn}(\pi) := (-1)^{I(\pi)}$.

Identická permutace id neobsahuje žádnou inverzi, tedy její znaménko je $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$. Z lemmatu plyne, že $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho)$, a z těchto dvou vlastností dohromady, že $\operatorname{sgn}(\pi^{-1} \circ \pi) = 1$, tedy $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$. Označíme-li $\mathbb{Z}_2$ grupu tvořenou množinou $\{1, -1\}$ s operací násobení, znamenají tyto vlastnosti, že zobrazení $\operatorname{sgn} : S_n \to \mathbb{Z}_2$ je **grupový homomorfizmus**.

Definice 31. Nechť G je grupa s operací $*$ a neutrálním prvkem e_G a H je grupa s operací $\circ$ a neutrálním prvkem e_H. Zobrazení $f : G \to H$, které splňuje pro všechna $g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned} f(e_G) &= e_H \\ f(g_1 * g_2) &= f(g_1) \circ f(g_2) \end{aligned}$$

nazýváme homomorfizmem grup G a H.

V našem případě je tedy operace $*$ skládání permutací a operace $\circ$ násobení na $\mathbb{Z}_2$. Podobně jako u vektorových prostorů, i u grup pojem homomorfizmus vyjadřuje, že se zobrazení „chová hezky“ k dané struktuře, v tomto případě struktuře grupy. Můžeme definovat **jádro grupového homomorfizmu** $\operatorname{Ker} f$ jako množinu všech $g \in G$, pro něž $f(g) = e_H$, ověřte sami, že to je také grupa (s operací $*$). V našem případě označujeme $\operatorname{Ker}\operatorname{sgn} =: A_n$, je to množina všech $\pi \in S_n$ takových, že $\operatorname{sgn}\pi = 1$. Mluvíme o grupě všech **sudých permutací** nebo též **alternující grupě**. Permutace, pro které $\operatorname{sgn}\pi = -1$ se nazývají **liché** a zjevně grupu netvoří.

Příklad. Máme-li definován grupový homomorfizmus, jeho jádro a obraz (to je prostě obraz zobrazení f), můžeme definovat grupový monomorfizmus, epimorfizmus, mluvit o izomorfních grupách. Například grupa S_3 je izomorfní grupě všech symetrií rovnostranného trojúhelníka: stačí očíslovat vrcholy $1, 2, 3$ a přiřadit každé permutaci π shodné zobrazení, které převádí vrchol 1 na $\pi(1)$, 2 na $\pi(2)$ a 3 na $\pi(3)$. To je bijekce, která splňuje vlastnosti homomorfizmu, tedy je to izomorfizmus grup. Podobně je izomorfní S_4 s množinou všech symetrií pravidelného čtyřstěnu. Podgrupa A_3, resp. A_4 se pak v tomto izomorfizmu zobrazuje na podgrupu přímých shodností. Není těžké si rozmyslet, že ve skutečnosti každá konečná grupa G je izomorfní podgrupě v S_n, kde n je počet prvků G.

Označme $\operatorname{Supp}\pi$ **nosič permutace**, tedy množinu všech indexů $i \in \{1, \dots, n\}$ takových, že $\pi(i) \neq i$. Permutace s dvouprvkovým nosičem se nazývají **transpozice**, vlastně pouze vyměňují nějaký prvek i s jiným prvkem j. Takovou transpozici budeme značit $[i, j]$, například $(1, 4, 3, 2)$ je transpozice $[2, 4] \equiv [4, 2]$.

Transpozice $[1, 2]$ obsahuje právě jednu inverzi a je to tedy lichá permutace. Transpozici $[i, j]$, $i < j$ lze zapsat jako $\rho^{-1} \circ [1, 2] \circ \rho$, kde ρ je libovolná permutace, pro kterou $\rho(i) = 1$, $\rho(j) = 2$. Pak ale

$$\operatorname{sgn}([i, j]) = \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) \operatorname{sgn}([1, 2]) \operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}([1, 2]),$$

tedy každá transpozice je lichá permutace.

Transpozice je speciální případ **cyklu**, což je permutace s k-prvkovým nosičem $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ taková, že $\pi(i_j) = i_{j+1}$ pro všechna $j \in \{1, \dots, k-1\}$ a $\pi(i_k) = i_1$. Cyklus označíme $[i_1, i_2, \dots, i_k]$, číslo k se nazývá **délkou cyklu**. Dva cykly nazveme nezávislými, pokud jsou jejich nosiče disjunktní.

Věta 25. *Každou permutaci lze zapsat jako součin nezávislých cyklů. Každou permutaci lze zapsat jako součin transpozic.*

Důkaz. Stačí vzít libovolný prvek $i_{1,1} \in \operatorname{Supp}\pi$. Jeho obraz označíme $i_{1,2} := \pi(i_{1,1})$, dále $i_{1,3} := \pi(i_{1,2})$ atd. Množina je konečná, takže pro nějaké $k_1 \in N$ musí nastat $i_{1,k_1+1} = i_{1,1}$. Definujme π_1 permutaci, jejíž nosič je $\{i_{1,1}, \dots, i_{1,k_1}\}$ a na této množině má stejné hodnoty jako π, je to zjevně cyklus délky k_1. Zvolme $i_{2,1} \in \operatorname{Supp}\pi \setminus \operatorname{Supp}\pi_1$ a opakujme postup, získáme takto N cyklů π_j o délce k_j, které jsou nezávislé a platí $\pi = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_N$.

Cyklus $[i_1, \dots, i_k]$ je roven například součinu transpozic $[i_1, i_2][i_2, i_3] \dots [i_{k-1} i_k]$ (rozmyslete si podrobně). Pokud tento rozklad použijeme pro každý cyklus $\pi_1, \dots, \pi_N$, dostáváme zápis permutace jako součinu transpozic. $\square$

Z důkazu je zřejmé, že rozklad na nezávislé cykly je až na pořadí jednoznačný. Rozklad na transpozice jednoznačný zdaleka není, už cyklus lze rozložit na transpozice mnoha jinými způsoby (najděte nějaký) a také lze do kteréhokoli místa rozkladu vložit součin typu $[i, j][j, i]$, čímž dostaneme jiný rozklad s jiným počtem transpozic. Protože ale víme, že transpozice je lichá permutace a že sgn je grupový homomorfizmus, vidíme, že znaménko permutace lze také spočítat jako $(-1)^N$, kde N je počet transpozic v nějakém (a tedy libovolném) rozkladu na transpozice, nebo také $(-1)^C$, kde C je počet cyklů sudé délky v rozkladu na nezávislé cykly. To bývá obvykle rychlejší metoda výpočtu znaménka permutace než vypisování seznamu všech inverzí.

Příklad. Určeme znaménko permutace $\pi = (7, 3, 5, 1, 2, 4, 6, 8)$. Vidíme, že $\pi(1) = 7$, $\pi(7) = 6$, $\pi(6) = 4$ a $\pi(4) = 1$, což dává cyklus $[1, 7, 6, 4]$. Dále $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 5$ a $\pi(5) = 2$, dalším nezávislým cyklem je $[2, 3, 5]$. Tím jsme vyčerpali celý $\operatorname{Supp} \pi$, tedy $\pi = [1, 7, 6, 4][2, 3, 5]$ a znaménko je -1, protože v rozkladu je jeden cyklus sudé délky.

Věta 26. *Nechť $n > 1$. Grupa A_n má $\frac{n!}{2}$ prvků.*

Důkaz. Zvolme pevnou transpozici, například $[1, 2]$. Zobrazení $T : S_n \to S_n$ definované jako $T(\pi) = [1, 2] \circ \pi$ je bijekce na konečné množině, přičemž obrazem liché permutace je sudá a naopak. Pak ale množina lichých a sudých permutací musí být stejně velká, tedy sudých permutací je právě $\frac{n!}{2}$. $\square$

8.2 Determinant

Většina pojmů, které jsme dosud definovali, byla zavedena induktivně, tedy zdola. Existovala pro ně motivace v podobě příkladů, které bylo vhodné zobecnit, přesněji pojmenovávaly něco, co už bylo v dané situaci intuitivně přítomno, nebo odpovídaly na přirozené otázky, které by si člověk mohl klást, často v analogii s jinou podobnou situací. Determinant oproti tomu budeme budovat deduktivním způsobem. Definice bude na první pohled naprosto znebespadlá a teprve poté, až dokážeme, že z ní plynou pěkné vlastnosti, zjistíme, k čemu je nám ten determinant vlastně dobrý.

Definice 32. Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$. Determinantem matice A nazveme číslo

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{n\pi(n)}$$

Vidíme tedy, že determinant je součet $n!$ členů, z nichž každý je součinem n elementů matice vynásobeným znaménkem permutace. V každém takovém součinu se vyskytuje právě jeden element z každého řádku a právě jeden element z každého sloupce. Definice je tedy nejen znebespadlá, ale také prakticky nepříliš použitelná, protože s rostoucím n roste počet operací velmi rychle.

Místo $\det A$ budeme také používat označení $|A|$ nebo u konkrétní matice nahradíme závorky svislicemi. Pokud A je matice 2×2, pak

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(12) a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}(21) a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Podobně

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Označme řádky matice A jako $a_1, a_2, \ldots, a_n$, determinant matice A bude výhodné občas značit také jako $|a_1, \ldots, a_n|$.

Věta 27. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$, $a'_i \in \mathbb{F}^n$, $r \in \mathbb{F}$.*

1. $|A| = |A^T|$
2. $|a_1, \ldots, ra_i, \ldots, a_n| = r|a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n|$.
3. *Pokud $1 \le i \le n$, pak*

$$|a_1, \ldots, a_i + a'_i, \ldots, a_n| = |a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n| + |a_1, \ldots, a'_i, \ldots, a_n|$$

4. *Pokud $1 \le i < j \le n$, pak*

$$|a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n| = -|a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n|$$

Důkaz. Podle definice

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{n\pi(n)} = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) a_{1\rho^{-1}(1)} a_{2\rho^{-1}(2)} \ldots a_{n\rho^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} a_{\rho(2)2} \ldots a_{\rho(n)n} = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a^T_{1\rho(1)} a^T_{2\rho(2)} \ldots a^T_{n\rho(n)} = |A^T| \end{aligned}$$

Nejprve jsme využili toho, že pokud ρ běží přes celou S_n, pak ρ^{-1} také, pak jsme přeuspořádali činitele v součinu a použili $\operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\rho^{-1})$.

Druhé tvrzení plyne z

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots (r a_{i\pi(i)}) \dots a_{n\pi(n)} = r \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)}$$

a podobně zřejmé je i tvrzení třetí.

Zobrazení, které π přiřazuje $\pi' = \pi \circ [i, j]$, je bijekce S_n na S_n, takže

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\pi' \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi') a_{1\pi'(1)} \dots a_{i\pi'(i)} \dots a_{j\pi'(j)} \dots a_{n\pi'(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi \circ [i, j]) a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(j)} \dots a_{j\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} \\ &= -\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{j\pi(i)} \dots a_{i\pi(j)} \dots a_{n\pi(n)}, \end{aligned}$$

čímž je dokázáno i poslední tvrzení. $\square$

Tato věta má řadu důsledků. Z prvního tvrzení plyne, že druhé a třetí tvrzení platí i pro sloupce. Z druhého je jasné, že determinant matice, která obsahuje nulový řádek (nebo sloupec), je nulový. Druhé a třetí tvrzení dohromady znamenají, že pokud budeme determinant chápat jako zobrazení $\det : \mathbb{F}^n \times \dots \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$, které přiřazuje n-tici vektorů z $\mathbb{F}^n$ číslo, pak je toto zobrazení multilineární. Čtvrté tvrzení vlastně říká, že při transpozici na řádky se determinant vynásobí znaménkem transpozice, a protože libovolnou permutaci lze získat jako součin transpozic, permutace řádků způsobí vynásobení determinantu znaménkem permutace. Ze čtvrtého tvrzení také plyne, že pokud má matice dva stejné řádky, pak je její determinant nulový. Pokud tedy do i-tého řádku matice přičteme r-násobek j-tého řádku pro $i \neq j$, pak je ve druhém tvrzení s $a_i' = r a_j$ poslední člen nulový, takže se determinant nezmění. Přičítáním násobků ostatních řádků, přehazováním pořadí řádků a násobením řádku číslem je možné matici převést na horní trojúhelníkovou. Determinant horní trojúhelníkové matice je ale roven součinu diagonálních elementů, protože v definici determinantu všechny členy kromě členu příslušejícího $\pi = \mathrm{id}$ obsahují alespoň jeden prvek pod diagonálou, a ten je roven 0. Determinant matice lze tedy počítat Gaussovou eliminací, jen si musíme dát pozor, že změny pořadí řádků a násobení číslem determinant změní. Na druhou stranu ale můžeme využívat i sloupcové úpravy, pokud je to výhodné.

Věta 28. *Matice $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je regulární, právě když $|A| \neq 0$.*

Důkaz. Matice A je regulární právě když $h(A) = n$. Pokud matici převedeme Gaussovou eliminací na horní trojúhelníkovou, pak se hodnost zachová a nulovost či nenulovost determinantu také. Ale determinant horní trojúhelníkové matice je nenulový, právě když jsou nenulové všechny prvky na diagonále a právě tehdy je i hodnost matice rovna n. $\square$

To je tedy první důležitá věc, na kterou se determinant hodí: jeho nulovost či nenulovost detekuje regularitu matice. Součin dvou regulárních matic je regulární matice a součin dvou singulárních je singulární, takže nulovost determinantu se musí zachovávat i při součinech. Ve skutečnosti platí mnohem silnější tvrzení:

Věta 29. *Nechť $A, B \in M_{nn}(\mathbb{F})$. Pak $|AB| = |A||B|$.*

Důkaz. V matici AB je i-tý řádek lineární kombinací řádků matice B s koeficienty z i tého řádku matice A. Z multilinearity determinantu plyne

$$\begin{aligned} |AB| &= \left| \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} b_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} b_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n} b_{i_n} \right| \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} |b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}| \end{aligned}$$

Determinant $|b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}|$ je nulový, pokud jsou v něm dva řádky stejné, jinými slovy pokud zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe, přiřazující indexu k index i_k, není permutace. Stačí tedy zachovat jen ty členy, pro které to permutace je:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} |b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \dots, b_{\pi(n)}| \\ &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} \operatorname{sgn} \pi |b_1, b_2, \dots, b_n| = |A||B| \end{aligned}$$

Zde jsme využili toho, že přeuspořádání řádků permutací π má za následek vynásobení determinantu číslem $\operatorname{sgn}(\pi)$ a poslední krok už je jen definice determinantu. $\square$

Protože $|E| = 1$, plyne z této věty, že $|A^{-1}A| = 1$ neboli $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ a také že $|R^{-1}AR| = |A|$. To podobně jako u stopy znamená, že determinant matice endomorfizmu je invariantní vůči volbě báze a má tedy smysl definovat pro $f \in V_n$ veličinu $\det f$ jako determinant matice f vzhledem k libovolné bázi.

8.3 Aplikace determinantu

Definice 33. Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$. Nechť A_{IJ} je podmatice A vzniklá vynecháním řádků s indexy z množiny $I \subset \{1, \ldots, n\}$ a sloupců z množiny $J \subset \{1, \ldots, n\}$. Pokud I a J mají stejný počet prvků, pak lze spočítat $|A_{IJ}|$, takovému determinantu se říká IJ-tý **minor** matice A. Pokud $I = J$, mluvíme o **hlavním minoru** a pokud $I = \{i\}$ a $J = \{j\}$, je to **první minor**, značíme $|A_{ij}|$. Číslo $\hat{A}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ nazýváme ij-tým **kofaktorem** nebo též **algebraickým doplňkem** matice A.

Následující věta nám mimojiné dává rekurzivní formulku, jak spočítat determinant matice pomocí jejích algebraických doplňků.

Věta 30. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$, $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Pak*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\hat{A}_{ki} = \begin{cases} |A| & \textit{pro } j = k \\ 0 & \textit{pro } j \neq k \end{cases}$$

Důkaz. Dokazujme nejprve případ $j = k = n$. V definici determinantu vytkneme z každého členu prvek na n-tém řádku. Pak

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(n)=i}} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} \ldots a_{n-1,\pi(n-1)}$$

Pokud $i = n$, pak můžeme π chápat jako permutaci množiny $\{1, \ldots, n-1\}$ a n-tý sčítanec v sumě je roven $|A_{nn}| = \hat{A}_{nn}$. Pro ostatní členy π zobrazuje n na jiný index $i \neq n$. Složená permutace $\pi' := \pi_i \circ \pi$, kde $\pi_i := [n, n-1, \ldots, i+1, i]$ zobrazuje opět n na n a $\operatorname{sgn}(\pi') = (-1)^{n-i} \operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{n+i} \operatorname{sgn}(\pi)$. Tedy i-tý sčítanec lze přepsat jako

$$(-1)^{n+i} \sum_{\pi' \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\pi') a_{1,\pi(1)} \ldots a_{n-1,\pi(n-1)} = (-1)^{n+j}|A_{ni}| = \hat{A}_{ni},$$

protože prvek $a_{p,\pi(p)}$ je vlastně prvkem $a'_{p,\pi'(p)}$ matice $A' \equiv A_{ni}$ po přečíslování sloupců způsobeném vynecháním indexu i z $\{1,\ldots,n\}$. Tím je tvrzení dokázáno pro $j = k = n$.

Pokud $j = k \neq n$, pak stačí přeuspořádat řádky matice A permutací π_j, která převádí j-tý řádek na pozici n a posouvá všechny následující řádky beze změny jejich pořadí, platí $\operatorname{sgn}\pi_j = (-1)^{n-j}$. Označíme-li takto vzniklou matici $\tilde{A}$, pak

$$|A| = (-1)^{n-j}|\tilde{A}| = (-1)^{n+j}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_{ni}(-1)^{n+i}|\tilde{A}_{ni}| = \sum_{i=1}^{n}a_{ji}(-1)^{i+j}|A_{ji}|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Konečně pokud $j \neq k$, pak součet $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\hat{A}_{ki}$ vůbec nezávisí na hodnotách elementů na k-tém řádku matice A. Je proto stejný i pro matici A', která vznikne z A tím, že do k-tého řádku napíšeme j-tý řádek a jinak se matice nezmění. Pak je ale výraz $\sum_{i=1}^{n} a'_{ji}\hat{A}'_{ki} \equiv \sum_{i=1}^{n} a'_{ki}\hat{A}'_{ki}$ roven determinantu matice A', který je nulový, protože se jedná o matici mající dva stejné řádky. □

Věta nám také dává přímé vyjádření jednotlivých prvků inverzní matice. Definujeme-li $b_{jk} := \frac{1}{|A|}\hat{A}_{kj}$, pak je

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \equiv \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{kj}$$

rovno jedné pro $i = k$ a rovno 0 pro $i \neq k$, čili $AB = E$, $B = A^{-1}$. Pro matice 2×2 odtud dostáváme snadno zapamatovatelné **Čihákovo pravidlo:**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

tedy že inverzní matice se dostane prohozením prvků na hlavní diagonále, „omínuskováním“ prvků na vedlejší diagonále a vydělením determinantem.

Z výrazu pro inverzní matici můžeme také odvodit vztah pro řešení soustav rovnic, známý jako **Cramerovo pravidlo**. Pokud A je regulární matice, pak řešením soustavy rovnic $Ax = b$ je $x = A^{-1}b$. Dosazením vzorce pro inverzní matici dostáváme, že

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{A}_{ji}\frac{1}{|A|}b_j$$

Označme $A_{b,i}$ matici, která vznikne z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b, pak rozvoj podle tohoto sloupce dává $|A_{b,i}| = \sum_{j=1}^{n} \hat{A}_{ji} b_j$, protože kofaktory matic $A_{b,i}$ a A odpovídající vynechání i-tého sloupce jsou stejné. Dostáváme tedy

Věta 31. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je regulární matice a $b \in \mathbb{F}^n$. Pak hodnota i-té složky (jediného) řešení $x \in \mathbb{F}^n$ soustavy rovnic $Ax = b$ je rovna $\frac{|A_{b,i}|}{|A|}$.*

Podobně jako skalární součin nám umožňuje zavést pojmy úhlu a vzdálenosti, determinant s sebou nese mnohé vlastnosti objemu. Pokud $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_n$, pak výraz $|a_1, \ldots, a_n|$ splňuje téměř všechny přirozené vlastnosti, které by měl splňovat objem rovnoběžnostěnu určeného vektory a_i. Skutečně: pokud jeden z vektorů r-krát prodloužíme, pak determinant r-násobně vzroste, stejně se chová i objem. Pokud k vektoru přičteme lineární kombinaci ostatních vektorů, pak se „výška“ rovnoběžnostěnu nezmění, a tedy ani jeho objem. Stejně tak se nezmění ani determinant. Pokud a_i jsou prvky kanonické báze, je rovnoběžnostěnem krychlička o hraně jedna, která má objem také jedna a stejnou hodnotu má i determinant. Pokud jsou a_i lineárně závislé, pak jsou objem i determinant rovny nule. Jedinou vadou na kráse tedy zůstává, že determinant může narozdíl od objemu být i záporný. Ve skutečnosti to ale není vada, nýbrž vlastnost: znaménko determinantu nám umožňuje definovat, kdy je báze $\{a_1, \ldots, a_n\}$ kladně a kdy záporně orientovaná.

Pokud čtvercová matice R splňuje $R^T R = E$, znamená to, že je R ortogonální. Podle věty o determinantu součinu matic máme $1 = |E| = |R^T R| = |R^T||R| = |R|^2$, tedy determinant (reálné) matice R může být $+1$ nebo -1. Množina všech ortogonálních matic s determinantem 1 je grupa (ověřte), která se označuje $SO(n)$, **speciální ortogonální grupa**. Je to množina všech matic přechodu, které převádějí kladně orientované ortonormální báze na kladně orientované ortonormální báze. Je možné ukázat, že každá taková matice se dá napsat jako součin matic rotace kolem nějaké osy. Podobně můžeme definovat i grupu $SU(n)$ a také $SL(n)$ (množina všech regulárních matic s determinantem 1). Posledně jmenovanou je možné chápat jako množinu všech matic přechodu, které zachovávají orientaci báze a objem rovnoběžnostěnu vytýčeného bázovými vektory.

Cvičení

1. **(4)** Je součin permutací komutativní?

2. **(1)** Dokažte, že grupa všech symetrií čtyřstěnu je izomorfní (tedy existuje bijektivní grupový homomorfizmus) grupě S_4. Čemu v tomto izomorfizmu odpovídá grupa A_4?

3. **(1)** Patnácka je klasický hlavolam tvaru čtvercové mřížky 4×4, v níž je 15 pohyblivých dlaždic očíslovaných 1 až 15. V základní pozici je volné pravé dolní pole a dlaždice 1 až 15 jsou srovnány v pořadí odleva doprava a odshora dolů. Hlavolam se stal slavným v roce 1880, kdy Samuel Lloyd nabídl odměnu 1000 dolarů tomu, kdo se dokáže ze základní pozice dostat do pozice, v níž je volné pole na stejném místě, ale dlaždice 14 a 15 jsou vyměněny. Dokažte, že tato úloha nemá řešení.

4. **(HC)** Dokažte, že na Rubikově kostce není možné vyměnit dvě kostičky, zatímco všechny ostatní kostky zůstanou na svém místě.

5. **(3)** Permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 & 7 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

rozložte na součin transpozic dvěma způsoby.

6. **(4)** Rozložte následující permutaci na nezávislé cykly a určete znaménko:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 10 & 8 & 12 & 3 & 16 & 11 & 4 & 5 & 15 & 1 & 14 & 7 & 2 & 9 & 6 & 17 & 13 \end{pmatrix}$$

7. **(3)** U permutace z předchozí úlohy určete π^{2006} a nejmenší $k > 1000$ takové, že $\pi^k = \pi^{-1}$.

8. **(3)** Spočtěte převodem na trojúhelníkový tvar determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

9. **(4)** Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

10. **(4)** Vyčíslete determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

11. **(4)** Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

12. **(2)** Jak se změní determinant, pokud jeho elementy převrátíme vůči středu matice. Zdůvodněte.

13. **(4)** Ověřte, že pro matice

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

platí $\det R_z(\varphi)R_x(\psi) = \det R_z(\varphi)\det R_x(\psi)$.

14. **(4)** Řešte pomocí Cramerova pravidla

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 10 \\ 3x + 7y + 4z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

15. **(4)** Řešte rovnici
$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

16. **(3)** Vypočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$$

17. **(3)** Řešte rovnici
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

18. **(1)** Spočtěte tzv. Vandermondův determinant
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

19. **(2)** Vypočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

20. **(2)** Dokažte, že množina reálných čtvercových matic řádu n s nenulovým determinantem tvoří grupu vůči násobení (značíme $GL(n, \mathbb{R})$ - general linear group).

21. **(1)** Numerické přiblížení n-té derivace: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou volbu vesměs různých reálných čísel $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ najděte reálné koeficienty $q_0, q_1, \ldots, q_n$, aby

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} q_i f(x + h\alpha_i)}{h^n} = f^{(n)}.$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla převeďte tuto podmínku na soustavu $n+1$ lineárních rovnic a tu pak řešte Cramerovým pravidlem.

22. **(1)** Dokažte

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

23. **(2)** Dokažte, že pokud pro libovolné indexy $i_1, \ldots, i_k$; $j_1, \ldots, j_l$ platí $a_{i_a j_b} = 0$ a $k + l > n$, pak je determinant matice a_{ij} roven nule.

24. **(2)** Jak se změní determinant matice, pokud její (i, j)-tý element vynásobíme c^{i-j}, $c \in \mathbb{R}$? Zdůvodněte.

25. **(2)** Dokažte, že determinant antisymetrické matice lichého řádu je nula.

26. **(2)** Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \\ y & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$$

27. **(2)** Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

28. **(3)** Řešte pomocí Cramerova pravidla

$$\begin{aligned} (1+a)x + y + z &= 1 \\ x + (1+a)y + z &= a \\ x + y + (1+a)z &= a^2 \end{aligned}$$

29. **(3)** Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

30. **(3)** Jak se změní determinant, pokud od každého řádku odečteme následující řádek, jen od posledního řádku odečteme první řádek? Zdůvodněte.

31. **(2)** Jak se změní determinant, pokud matici potočíme o 90 stupňů okolo „středu“ matice? Zdůvodněte.

32. **(2)** Určete součet determinantů všech matic stupně n takových, že v každém sloupci a každém řádku je právě jeden element roven jedné a ostatní jsou nuly. Zdůvodněte.

33. **(3)** Řešte pomocí Cramerova pravidla pro ta $a \in \mathbb{R}$, pro něž se toto pravidlo dá použít:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

Jinou metodou pak dořešte pro ostatní hodnoty a.

34. **(3)** Určete pouze element na pozici 12 inverzní matice k

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

35. **(3)** Vypočtěte determinantovou metodou inverzní matici k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

36. **(2)** Dokažte, že množina $SO(n)$ je grupa vzhledem k násobení matic.

37. **(2)** Dokažte, že množina $SU(n)$ je grupa vzhledem k násobení matic.

38. **(2)** Dokažte, že množina $SL(n)$ je grupa vzhledem k násobení matic.

39. **(2)** Dokažte, že determinant blokově diagonální matice

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{lk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{l1} & \dots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

je roven $\det A \det B$.

40. **(1)** Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$$

41. **(2)** Dokažte, že inverzní matice k regulární antisymetrické matici je antisymetrická.

42. **(1)** Dokažte, že hodnost matice je rovna velikosti největšího jejího nenulového minoru.