Domácí úkoly

4.3. Buď X nekonečná množina. Dokažte, že existuje těleso kardinality stejné jakou má X. (Návod: Zkonstruujte okruh polynomů s neurčitými X nad konečným či spočetným tělesem jako monoidový okruh s monoidem $\mathbf{N}_0^{(X)}$, jehož prvky jsou skoro všude nulová zobrazení $X \to \mathbf{N}_0$, ukažte, že jde o obor integrity a vezměte jeho podílové těleso.)

11.3. Definujme „dosazovací" zobrazení $\psi : \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{C}$ vztahem $\psi(p) = p(i)$. Dokažte, že je ψ okruhový homomorfismus a rozhodněte (a své tvrzení dokažte), zda je ideál $\mathrm{Ker}\psi$ hlavní.

18.3. Dokažte, že je $\mathcal{F}(R) = (\mathbb{F}(R), +, -, 0, \cdot, 1)$ z příkladu 1.10 okruh.

25.3. Dokažte, že okruh $C_0(\mathbf{R})$ spojitých reálných funkcí (tj. podokruh $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ z cvičení) neni noetherovský.

8.4. Najděte takový prvoideál P okruhu $(\mathbf{Z}[x], +, -, 0, \cdot, 1)$, aby faktorový okruh $\mathbf{Z}[x]/P$ nesplňoval podmínku (D) (a tvrzení dokažte). (Návod: Uvažte například dosazovací homomorfismus prvku $\sqrt{5}$ a jeho jádro.)

15.4. Uvažujme okruh $(\mathbf{Z}[\sqrt{3}], +, -, 0, \cdot, 1)$, kde $\mathbf{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbf{R} |\ a, b \in \mathbf{Z}\}$ je podokruh tělesa reálných čísel. Dokažte, že je okruh $(\mathbf{Z}[\sqrt{3}], +, -, 0, \cdot, 1)$ eukleidovský s eukleidovskou normou $\mu(a + b\sqrt{3}) = |a^2 - 3b^2|$.

29.4. Dokažte, že je prvek $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}+\sqrt{35}}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}} \in \mathbf{R}$ algebraický nad $\mathbf{Q}$ a najděte nad $\mathbf{Q}$ jeho minimální polynom.

6.5. Najděte kořenové nadtěleso polynomu $x^2 + x + 2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_3$ a popište jeho prvky.