3. Spojení a průnik podprostorů

3.1. Je-li podprostor $\mathbf{U} = \langle (2,4,0,1,4),(1,2,1,0,3)\rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, najděte bázi nějakého takového podprostoru $\mathbf{V}$, aby $\mathbf{U}\vee\mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^5$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.

Uvážíme, že jsme úlohu fakticky vyřešili v Příkladu 2.8. Nejprve položme $\mathbf{V} = \langle (0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\rangle$ (tedy V je podprostor generovaný těmi vektory, jimiž jsme $(2,4,0,1,4)$, $(1,2,1,0,3)$ doplnili na bázi). Potom zřejmě $\mathbf{U}\vee\mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^5$. Buď dále $\mathbf{w}\in\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$, tedy existují takové prvky $a,b,c,x,y\in\mathbf{Z}_5$, že

$$\mathbf{w} = x\cdot(2,4,0,1,4)+y\cdot(1,2,1,0,3) = a\cdot(0,1,0,0,0)+b\cdot(0,0,0,1,0)+c\cdot(0,0,0,0,1),$$

proto

$$a\cdot(0,1,0,0,0)+b\cdot(0,0,0,1,0)+c\cdot(0,0,0,0,1)-x\cdot(2,4,0,1,4)-y\cdot(1,2,1,0,3) = \mathbf{0}.$$

Protože je všech pět vektorů lineárně nezávislých, dostáváme přímo z definice lineární nezávislosti, že $a=b=c=x=y=0$, tedy $\mathbf{w}=\mathbf{0}$. Dokázali jsme, že bází hledaného podprostoru $\mathbf{V}$ je tedy například posloupnost vektorů $((0,1,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,0,1))$. $\square$

3.2. Najděte nějakou bázi podprostorů $\mathbf{U} = \langle (2,1,1,1),(4,2,1,3),(3,4,3,0)\rangle$, $\mathbf{V} = \langle (2,0,3,4),(1,3,1,2),(1,4,0,2)\rangle$ a $\mathbf{U}\vee\mathbf{V}$. vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$. Určete dále dimenzi průniku $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$.

Nejprve obvyklým způsobem seřadíme generující vektory obou prostorů do řádků matic a upravíme je pomocí elementárních transformací:

$$\begin{pmatrix} 2&1&1&1\\ 4&2&1&3\\ 3&4&3&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&1&1&1\\ 0&0&4&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2&0&3&4\\ 1&3&1&2\\ 1&4&0&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&4&0&2\\ 0&3&2&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

Tedy například posloupnost vektorů $((2,1,1,1),(0,0,4,1))$ tvoří bázi podprostoru $\mathbf{U}$ a posloupnost $((1,0,4,2),(0,3,2,0))$ tvoří bázi poprostoru $\mathbf{V}$. Všimneme si, že žádné dva vektory v obou generujících množinách nejsou svými násobky, tedy nejsou lineárně závislé, proto každá dvojice vektorů z množiny $\{(2,1,1,1),(4,2,1,3),(3,4,3,0)\}$ tvoří bázi dvojdimenzionálního prostoru $\mathbf{U}$, stejně jako každá dvojice vektorů z množiny $\{(2,0,3,4),(1,3,1,2),(1,4,0,2)\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}$.

Dále si uvědomme, že $\mathbf{U}\vee\mathbf{V}$ je podprostor generovaný všemi vektory $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$. Stačí nám ovšem uvažovat jen báze $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$, které už jsme nalezli, tedy platí, že $\mathbf{U}\vee\mathbf{V} = \langle (2,1,1,1),(0,0,4,1),(1,0,4,2),(0,3,2,0)\rangle$. Bázi spojení $\mathbf{U}\vee\mathbf{V}$ najdeme obvyklým způsobem:

$$\begin{pmatrix} 2&1&1&1\\ 0&0&4&1\\ 1&4&0&2\\ 0&3&2&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&1&1&1\\ 0&0&4&1\\ 0&2&1&4\\ 0&3&2&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&1&1&1\\ 0&2&1&4\\ 0&0&4&1\\ 0&0&3&4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&1&1&1\\ 0&2&1&4\\ 0&0&4&1\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že bázi $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$ tvoří například posloupnost vektorů $(2,1,1,1)$, $(0,2,1,4)$, $(0,0,4,1)$ a $(0,0,0,2)$, tedy $\dim(\mathbf{U} \vee \mathbf{V}) = 4$. To ovšem znamená, že $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^4$ a mohli jsme tedy vzít jakoukoli jinou bázi $\mathbf{Z}_5^4$, například kanonickou bázi, která by byla bazí $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$. Konečně si zbývá uvědomit, že podle Věty 2.23 (o dimenzi spojení a průniku) je $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U} \vee \mathbf{V}) = 2 + 2 - 4 = 0$. $\square$

3.3. Určete dimenzi průniku podprostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ racionálního vektorového prostoru $\mathbf{Q}^3$, je-li $\mathbf{U} = \langle (1,2,1), (1,0,2) \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle (1,1,0), (1,-1,1) \rangle$.

Obvyklým způsobem zjistíme, že $\dim \mathbf{U} = \dim \mathbf{V} = 2$ a $\dim(\mathbf{U} \vee \mathbf{V}) = 3$, proto je podle Věty 2.23 $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = 1$. $\square$

3.4. Najděte nějakou bázi průniku podprostorů $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_3$, jestliže $\mathbf{U} = \langle (1,1,1,1), (0,2,1,1), (0,0,1,2) \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle (1,2,2,1)$, $(0,1,2,1)$, $(0,0,2,2) \rangle$.

Potřebujeme najít všechny vektory, které leží zároveň v $\mathbf{U}$ i ve $\mathbf{V}$, tedy které jsou zároveň lineárními kombinacemi generátorů $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$. Vyjádříme si vektor ležící v průniku rovnicí:

$$x_1 \cdot (1,1,1,1) + x_2 \cdot (0,2,1,1) + x_3 \cdot (0,0,1,2) =$$
$$= y_1 \cdot (1,2,2,1) + y_2 \cdot (0,1,2,1) + y_3 \cdot (0,0,2,2),$$

kterou upravíme do standardního tvaru

$$x_1 \cdot (1,1,1,1) + x_2 \cdot (0,2,1,1) + x_3 \cdot (0,0,1,2) + y_1 \cdot (2,1,1,2) + y_2 \cdot (0,2,1,2) + y_3 \cdot (0,0,1,1)$$
$$= (0,0,0,0).$$

Budeme hledat množinu všech řešení homogenní soustavy s maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Snadno nyní dopočítáme, že množina všech řešení soustavy je podprostor tvaru $\langle (1,2,2,1,0,0),\ (0,2,2,0,1,1) \rangle$, proto bázi prostoru všech řešení tvoří například dvojice $(1,2,2,1,0,0)$, $(0,2,2,0,1,1)$. Zjistili jsme, že:

$$1 \cdot (1,1,1,1) + 2 \cdot (0,2,1,1) + 2 \cdot (0,0,1,2) =$$
$$= 1 \cdot (1,2,2,1) + 0 \cdot (0,1,2,1) + 0 \cdot (0,0,2,2) = (1,2,2,1),$$

a

$$0 \cdot (1,1,1,1) + 2 \cdot (0,2,1,1) + 2 \cdot (0,0,1,2) =$$
$$= 0 \cdot (1,2,2,1) + 1 \cdot (0,1,2,1) + 1 \cdot (0,0,2,2) = (0,1,1,0).$$

Tudíž vektory $(1,2,2,1)$ a $(0,1,1,0)$ leží v podprostoru $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Konečně si uvědomíme, že libovolné řešení soustavy lze napsat ve tvaru

$$a_1 \cdot (1,2,2,1,0,0) + a_2 \cdot (0,2,2,0,1,1) = (a_1, 2a_1 + 2a_2, 2a_1 + 2a_2, a_1, a_2, a_2),$$

kde $a_1, a_2 \in \mathbf{Z}_3$, proto lze každý vektor z průniku vyjádřit:

$$a_1 \cdot (1,1,1,1) + (2a_1 + 2a_2) \cdot (0,2,1,1) + (2a_1 + 2a_2) \cdot (0,0,1,2) =$$

$$= a_1 \cdot (1,2,2,1) + a_2 \cdot (0,1,1,0).$$

Tím jsme zjistili, že každý vektor z podprostoru $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ lze napsat ve tvaru $a_1 \cdot (1,2,2,1) + a_2 \cdot (0,1,1,0)$, tedy posloupnost $((1,2,2,1),(0,1,1,0))$ podprostor $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ generuje. Zjevně se jedná o množinu lineárně nezávislou, tedy jde o bázi průniku. Není přitom těžké si uvědomit, že výsledné vektory budou jistě lineárně nezávislé, jestliže jsme hledali jejich souřadnice vzhledem k bázím prostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$.

Závěrem si ještě všimněme, že jsme soustavu nemuseli dopočítávat, neboť nám stačilo najít souřadnice báze řešení odpovídající proměnným y_i (tj. poslední 3 souřadnice) nebo x_i (tj. první 3 souřadnice). □

4. Hodnost matice

4.1. Určete nad tělesy $\mathbf{R}$ a $\mathbf{Z}_5$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a matice $\mathbf{A}^T$.

Připomeňme, že hodnost matice je právě dimenze podprostoru generovaného řádky matice, kterou můžeme spočítat jako počet nenulových řádků příslušné Gaussovy matice (viz Věta 4.9 z přednášky). Upravujme tedy naší matici posloupností elementárních úprav nejprve nad tělesem reálných čísel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že nad tělesem $\mathbf{R}$ hodnost $h(\mathbf{A}) = 3$. Věta 5.5 z přednášky nám říká, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$, proto $h(\mathbf{A}^T) = 3$. Podobně určíme hodnost $\mathbf{A}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T) = 2$. □

18.9.

4.2. Rozhodněte, zda lze nad reálnými čísly převést posloupnpstí elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Budeme-li matici $\mathbf{C}$ definovat jako matici obsahující postupně všechny řádky matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B}$, stačí nám zjistit, zda $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{C})$. Předpokládáme-li, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{C})$, pak podprostory generované řádky matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ (a tedy i $\mathbf{C}$) jsou shodné, proto řádky $\mathbf{B}$ je možné dostat jako lineární kombinaci řádků $\mathbf{A}$ a obráceně. V opačném případě by podprostory generované řádky matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ byly různé, tudíž by nebylo možné matici $\mathbf{A}$ posloupností elementárních úprav převést na matici $\mathbf{B}$. Okamžitě vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$. Zbývá standardním způsobem určit hodnost matice $\mathbf{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $h(\mathbf{C}) = 3$, proto matici $\mathbf{A}$ nelze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici $\mathbf{B}$. □

4.3. Rozhodněte, zda lze nad tělesem racionálních čísel převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ na matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Postupujeme-li obdobně jako v předchozí úloze, zjistíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$ a

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy i $h(\mathbf{C}) = 2$. Matici $\mathbf{A}$ proto lze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici $\mathbf{B}$.

Všimněme si, že jsme také mohli postupovat přímo, t.j. uvědomit si, že oba řádkové vektory $(1, 0, -1)$ a $(1, 3, 5)$ matice $\mathbf{B}$ dostaneme jako lineární kombinaci řádkových vektorů matice $\mathbf{A}$. □

4.4. Rozhodněte, zda lze nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ na jednotkovou matici $\mathbf{E}$ stupně 3

Uvědomíme-li si, že řádky matice $\mathbf{E}$ generují celý (3-dimenzionální) vektorový prostor $\mathbf{Z}_7^3$, stačí nám tentokrát zjistit, zda řádky matice $\mathbf{A}$ generují celý prostor $\mathbf{Z}_7^3$, tj. zda $h(\mathbf{A}) = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = 3$, proto lze opět matici $\mathbf{A}$ převést posloupností elementárních úprav na jednotkovou matici $\mathbf{E}$. □

4.5. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ všechna řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Potřebujeme upravit matici $\mathbf{A}$ na Gaussovu matici. Nejprve přičteme druhý řádek ke třetímu a trojnásobek prvního k druhému:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní si uvědomme, že jsme zjistili hodnost matice $\mathbf{A}$, konkrétně $h(\mathbf{A}) = 3$. Podle Věty 5.8 je množina všech řešení naší soustavy poprostorem vektorového porstoru $\mathbf{Z}_5^5$ dimenze $5 - h(\mathbf{A}) = 5 - 3 = 2$. Potřebujme tedy najít bázi tohoto podprostoru. Vidíme, že získané Gaussova matice $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$ má pivotální, tj. první nenulové, pozice v prvním, třetím a čtvrtém sloupci. To znamená, že můžeme volit hodnoty x_2 a x_5. Vezmeme-li za (x_2, x_5) postupně vektory kanonické (nebo nějaké jiné) báze $\mathbf{Z}_5^2$ a dopočítáme-li hodnoty x_1, x_3 a x_4, budou nalezené vektory řešení lineárně nezávislé, tedy nutně půjde o hledanou bázi. Položíme-li tedy $x_2 = 1$ a $x_5 = 0$, pak snadno najdeme vektor $(3, 1, 0, 0, 0)$ řešící soustavu a podobně pro volbu $x_2 = 0$ a $x_5 = 1$ dostáváme řešení $(1, 0, 2, 3, 1)$.

Spočítali jsme, že množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$ je podprostor $\langle(3, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 2, 3, 1)\rangle$. $\square$

4.6. Existuje nějaký vektor pravých stran $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}_5^3$, pro který neexistuje žádné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, kde $\mathbf{A}$ je matice z úlohy 4.5?

Stačí aplikovat Frobeniovu větu (Věta 5.6), která říká, že řešení obecné soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ existuje právě tehdy, když je hodnost matice $\mathbf{A}$ stejná jako hodnost rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$. Poznamenejme, že vždy platí nerovnost $h(\mathbf{A}) \le h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$. Protože jsme zjistili, že $h(\mathbf{A}) = 3$ a matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$ má tři řádky, tedy $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T) \le 3$, vidíme, že $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T) = 3$, a proto je soustava $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ řešitelná pro každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}_5^3$. $\square$

4.7. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ všechna řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1, 2, 4)^T$, kde $\mathbf{A}$ je matice z úlohy 4.5.

Díky Větě 5.7 nám stačí najít jedno řešení $\mathbf{u}$ nehomogenní soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1, 2, 4)^T$. Každé řešení potom budou právě tvaru $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ pro vhodné řešení $\mathbf{w}$ homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$. Postupujeme analogicky výpočtu v příkladu 4.5. Nejprve rozšířenou matici stejnými elementárními úpravami upravíme na Gaussovu matici a poté dopočítáme řešení například pro volbu $x_2 = 0$ a $x_5 = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Soustavu tedy řeší například vektor $(2, 0, 3, 1, 0)$, tedy množina všech řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1, 2, 4)^T$ je tvaru $(3, 0, 1, 1, 0) + \langle(3, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 2, 3, 1)\rangle$ $\square$

5. Permutace a determinanty

5.1. Zapište v cyklickém zápisu a redukovaném cyklického zápisu permutace $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$.

Postupně vyčerpáme všechny prvky z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, abychom zapsali cykly permutací $p = (13)(246)(5)$ a $q = (1)(2365)(4)$. V redukovaném cyklickém zápisu vynecháme všechny jednocykly, tedy pevné body daného zobrazení, a proto $p = (13)(246)$ a $q = (2365)$. □

5.2. Mějme permutace $p = (1298)(36)(574)$ a $q = (34875)$ z množiny S_9 v redukovaném cyklickém zápisu. Určete jejich maticový zápis.

Z cyklického zápisu permutace p vidíme, že $p(1) = 2$, $p(2) = 9$, $p(9) = 8$, $p(8) = 1$, $p(3) = 6$, $p(6) = 3$, $p(5) = 7$, $p(7) = 4$ a $p(4) = 5$. Nyní snadno tyto údaje zaznamenáme do matice

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 7 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Snadno rozšíříme redukovaný cyklický zápis permutace q na neredukovaný zápis $q = (34875)(1)(2)(6)(9)$ a obdobným způsobem jako u permutace p najdeme matici

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 6 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

□

25.9.

5.3. Nechť $p = (135)(4798)(26)$ a $q = (18)(247693)$ jsou dvě permutace z S_9. Určete permutace $p \circ q$, $q \circ p$, p^{-1} a q^{-1}.

Přímo použitím definice snadno zjistíme hodnoty (skládáme zprava doleva):

$$p \circ q = (1495)(27)(368), \quad q \circ p = (129)(3587)(46).$$

Při hledání inverzních permutací si uvědomme, že stačí cykly (redukovaného) cyklického zápisu původních permutací „zrcadlově převrátit", tedy

$$p^{-1} = (531)(8974)(62), \quad q^{-1} = (81)(396742).$$

□

5.4. Napište permutace $p = (13475)$ a $q = (19)(267)(3548)$ z S_9 jako součin transpozic.

Připomeňme, že transpozice je permutace, která vyměňuje právě dva prvky, tj. můžeme ji v redukovaném cyklickém zápisu zapsat ve tvaru (ab). Řešení úlohy pro permutaci p je zřejmé z Věty 6.9, konkrétně

$$(13475) = (15) \circ (17) \circ (14) \circ (13) = (13) \circ (34) \circ (47) \circ (75).$$

Přímo z definice cyklického zápisu vidíme, že $(19)(267)(3548) = (19) \circ (267) \circ (3548)$, tedy nejprve úlohu vyřešíme pro každý z cyklů (19), (267) a (3548) pomocí Věty 6.9 a poté nalezené transpozice složíme, tedy

$$(19)(267)(3548) = (19) \circ (267) \circ (3548) =$$

$$= (19) \circ (27) \circ (26) \circ (38) \circ (34) \circ (35) = (19) \circ (26) \circ (67) \circ (35) \circ (54) \circ (48).$$

□

5.5. Určete znaménka permutací p a q z předchozí úlohy.

Podle definice má permutace znaménko 1 (tj. jde o sudou permutaci), právě když ji můžeme napsat jako součin sudého počtu transpozic a permutace má znaménko -1 (tj. je to lichá permutace), můžeme-li ji napsat jako součin lichého počtu transpozic. V předchozím příkladu jsme vyjádřili permutaci p jako součin 4 transpozic, proto $\text{zn}p = 1$. Permutaci q jsme dostali jako součin 6 transpozic, tedy opět $\text{zn}p = 1$. □

5.6. Určete znaménka permutací $(17)(36)(2458)$, $(245)(3687)$, $(13)(2675) \in S_8$.

Ke zjištění znamének permutací tentokrát užijeme Větu 6.15 z přednášky, která říká, že znaménko permutace je rovno znaménku součinu nezávislých cyklů a znaménko cyklu liché délky je 1 a znaménko cyklu sudé délky je -1. To znamená, že

$$\text{zn}((17)(36)(2458)) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1,$$

$$\text{zn}((245)(3687)) = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$\text{zn}((13)(2675)) = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

□

5.7. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Postupujeme přímo podle definice. Rozmyslíme si, že $S_2 = \{\text{Id}, (12)\}$. a proto $\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. Obvyklá úvaha o počítání v tělesech $\mathbf{Z}_p$ nám umožní využít výsledku spočítaného v tělese reálných (či racionálních) čísel, který nakonec stačí upravit modulo p. To znamená, že $\det(\mathbf{A}) = (5)\text{mod}5 = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{A}) = (5)\text{mod}7 = 5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □

5.8. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

I tentokrát budeme fakticky postupovat podle definice. Sudým permutacím Id, (123) a (132) z S_3 odpovídají po řadě součiny $1 \cdot 0 \cdot 1$, $2 \cdot 3 \cdot 2$ a $1 \cdot 4 \cdot 3$ (vždy bereme nejprve hodnotu z prvního řádku, poté z druhého a nakonec z třetího) a lichým permutacím (12), (13) a (23) odpovídají součiny $2 \cdot 4 \cdot 1$, $1 \cdot 0 \cdot 2$ a $1 \cdot 3 \cdot 3$, proto

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - (2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3).$$

Tedy $\det(\mathbf{B}) = 7$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{B}) = 2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{B}) = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □

5.9. Určete nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinanty matic $\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Determinant matice $\mathbf{C}_1 = (c_{ij})$ můžeme opět spočítat podle definice, uvědomíme-li si, že pro každou neidentickou permutaci $\sigma \in S_5$ bude existovat aspoň jedno j, pro něž $j > \sigma(j)$, a proto $c_{j\sigma(j)} = 0$ a $c_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot c_{5\sigma(5)} = 0$. Tedy determinant Gaussovy čtvrecové matice $\mathbf{C}_1$ je právě součin hodnot na hlavní diagonále, tj. $\det(\mathbf{C}_1) = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 48$ nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{C}_1) = (48)\mathrm{mod}5 = 3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{C}_1) = (48)\mathrm{mod}7 = 6$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$.

Nyní si všimněme, že matici $\mathbf{C}_2$ dostaneme z matice $\mathbf{C}_1$ výměnou 1. a 4. řádku. Proto podle Věty 7.6 je $\det(\mathbf{C}_2) = -\det(\mathbf{C}_1)$, tudíž $\det(\mathbf{C}_2) = -48$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{C}_2) = (-48)\mathrm{mod}5 = 2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{C}_2) = (-48)\mathrm{mod}7 = 1$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □

5.10. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Připomeňme, že Věty 7.6, 7.12 a 7.14 nám říkají, jak se změní determinant matice, provedeme-li některou z řádkových úprav. V předchozí úloze jsme si navíc uvědomili, že je velmi snadné určit determinant Gaussovy matice jako součin hodnot na hlavní diagonále. Budeme-li tedy standardními prostředky pomocí elemntárních úprav řádků převádět matici $\mathbf{D}$ na její Gaussovu matici, budeme v každém kroku znát, jak jsme původní determinant změnili. Tedy upravujme a počítejme:

$$\det(\mathbf{D}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}) =$$

$$= \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5.$$

Tedy zjistili jsme, že $\det(\mathbf{D}) = 5$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{D}) = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{D}) = 5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □

5.11. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Tentokrát k výpočtu použijeme Větu 7.11 a budeme determinant rozvíjet podle 2. řádku:

$$\det(\mathbf{G}) = (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot \det(\begin{pmatrix}0&2&1\\4&1&2\\2&4&0\end{pmatrix}) + (-1)^{2+2}\cdot 0\cdot \det(\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\\2&4&0\end{pmatrix})+$$

$$+(-1)^{2+3}\cdot 3\cdot \det(\begin{pmatrix}1&0&1\\1&4&2\\2&2&0\end{pmatrix}) + (-1)^{2+4}\cdot 0\cdot \det(\begin{pmatrix}1&0&2\\1&4&1\\2&2&4\end{pmatrix}) =$$

$$= -3\cdot \det(\begin{pmatrix}1&0&1\\1&4&2\\2&2&0\end{pmatrix}) = -3\cdot(1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 4\cdot 2) = 18.$$

Tedy jako obvykle $\det(\mathbf{G}) = 18$ nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{G}) = 3$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{G}) = 4$ nad $\mathbf{Z}_7$. □

Poznamenejme, že jsme determinanty ani další členy rozvoje, které přísluší nulovému prvky z řádku, podle nějž determinant rozvíjíme, vůbec nemuseli psát. Navíc si uvědomme, že tato metoda je vhodná právě v případě, kdy některý z řádků (nabo sloupců, využijeme-li pozorování $\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{G}^T)$ Věty 7.3) obsahuje „hodně” nul.

5.12. Spočítejte determinant matice $\mathbf{H} = \begin{pmatrix}1&3&-3&1&1\\3&2&7&5&-9\\2&1&-1&2&0\\1&2&2&1&-1\\2&-1&3&2&7\end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel.

V matici $\mathbf{H}$ sice žádný řádek ani sloupec neobsahuje větší počet nul, ovšem první a čtvrtý sloupec se liší jen na jedné pozici. Víme, že odečteme-li od jednoho z těchto sloupců druhý, nezmění se podle Vět 7.3 a 7.14 hodnota determinantu. Po této úpravě už ovšem můžeme použít metodu rozvoje podle sloupce (tedy kombinaci Vět 7.3 a 7.11):

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\begin{pmatrix}1&3&-3&1&1\\3&2&7&5&-9\\2&1&-1&2&0\\1&2&2&1&-1\\2&-1&3&2&7\end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix}0&3&-3&1&1\\-2&2&7&5&-9\\0&1&-1&2&0\\0&2&2&1&-1\\0&-1&3&2&7\end{pmatrix}) =$$

$$= (-1)\cdot(-2)\cdot\det(\begin{pmatrix}3&-3&1&1\\1&-1&2&0\\2&2&1&-1\\-1&3&2&7\end{pmatrix}).$$

Nyní odečteme od prvního řádku upravené matice trojnásobek druhého řádku. Na prvním řádku zůstanou dva nenulové prvky, podle nichž determinant rozvedeme a snadno dopočítáme:

$$\det(\mathbf{H}) = 2 \cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}) = 2 \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}) =$$

$$= 2 \cdot (-5) \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}) - 2 \cdot 1 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}) =$$

$$= -10 \cdot (14 - 1 + 3 + 14) - 2 \cdot (4 + 1 + 12 + 4 + 4 - 3) = -344.$$

□

5.13. Najděte nad tělesem racionálních čísel rekurentní vzorec pro výpočet determinant obecné čtvercové matice $\mathbf{C}_n = (c_{ij})$ stupně n, kde $c_{ii} = 1$, $c_{ii+1} = -1$ a $c_{ii+1} = 1$ a jinde je $c_{ij} = 0$, tj. $\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rozvedeme-li matici $\mathbf{C}_n$ podle prvního řádku, dostaneme $\det \mathbf{C}_n = \det \mathbf{C}_{n-1} + \det \mathbf{A}_{n-1}$, kde matici $\mathbf{A}_{n-1}$ získáme z $\mathbf{C}_n$ vypuštěním prvního řádku a druhého sloupce. Rozvojem podle prvního sloupce matice $\mathbf{A}_{n-1}$ zjistíme, že $\det \mathbf{A}_{n-1} = \det \mathbf{C}_{n-2}$. Tedy platí rekurentní vzorec $\det \mathbf{C}_n = \det \mathbf{C}_{n-1} + \det \mathbf{C}_{n-2}$ a přímým výpočtem zjistíme, že $\det \mathbf{C}_1 = 1$ a že $\det \mathbf{C}_2 = 2$. Vidíme, že hodnota $\det \mathbf{C}_n$ je právě $n+2$. členem Fibonacciovy posloupnosti. □

5.14. Spočítejte nad tělesem racionálních čísel determinant čtvercové matice $\mathbf{D}_n = (d_{ij})$ stupně n, kde $d_{ii} = 1$, $d_{ii+1} = d_{i+1i} = 1$ a jinde je $d_{ij} = 0$, tj. $\mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Stejným postupem jako v předchozí úloze zjistíme, že $\det \mathbf{D}_n = \det \mathbf{D}_{n-1} - \det \mathbf{D}_{n-2}$. Dále snadno spočítáme hodnoty $\det \mathbf{D}_1 = 1$, $\det \mathbf{D}_2 = 0$ a poté pomocí rekurentního vzorce $\det \mathbf{D}_3 = -1$, $\det \mathbf{D}_4 = -1$, $\det \mathbf{D}_5 = 0$, $\det \mathbf{D}_6 = 1$, $\det \mathbf{D}_7 = 1$ a $\det \mathbf{D}_8 = 0$. Vidíme, že je posloupnost $\{\det \mathbf{D}_n\}_n$ periodická s periodou 6. Dodefinujeme-li $\det \mathbf{D}_0 = 1$, pak dostáváme vztah $\det \mathbf{D}_n = \det \mathbf{D}_{n \mathrm{mod} 6}$. □

5.15. Spočítejte determinant matice $\mathbf{D}_{500}$ z předchozí úlohy.

Stačí použít nerekurentní vztah $\det \mathbf{D}_{500} = \det \mathbf{D}_{500 \mathrm{mod} 6} = \det \mathbf{D}_2 = 0$. □

Další úlohy

(1) Buď n přirozené číslo, p prvočíslo a $\mathbf{U}$ podprostor vektorového prostoru $\mathbf{Z}_p^n$ nad tělesem $\mathbf{Z}_p$. Určete kolik existuje podprostorů $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{Z}_p^n$, pro něž platí, že $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^5$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.

(2) Určete dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ vektorových prostorů $\mathbf{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$, jestliže $\mathbf{U} = \langle (1,2,1,3), (1,2,4,1), (3,4,1,0) \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle (4,1,2,3),\ (0,3,3,1),\ (1,2,1,3) \rangle$.

(3) Uvažujme podprostor $\mathbf{W} = \langle (1,6,2,4,5) \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. Najděte báze nějakých takových podprostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$, aby $\dim(\mathbf{U}) = \dim(\mathbf{V}) = 3$, $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = \mathbf{Z}_7^5$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \mathbf{W}$.

(4) Uvažujme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ z příkladu 4.3. Najděte nějakou posloupností elementárních řádkových úprav, pomocí nichž lze převést matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$.

(5) Určete nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, matice $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.

(6) Najděte nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ všchna řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$ z předchozí úlohy.

(7) Najděte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$ a $\mathbf{Z}_7$ všechna řešení nehomogenní soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

(8) Mějme $p = (178)(256), q = (134765) \in S_7$. Určete permutace $p \circ q$, $q \circ p$, $p^{-1} \circ q$ a $q^{-1} \circ p^{-1}$ a $q \circ q$ najděte u všech těchto permutací jejich rozklad na transpozice.

(9) Mějme $p = (1278)(356), q = (13)(4765) \in S_8$. Určete znaménka permutací $p \circ q$, $q \circ p$, $p^{-1} \circ q$ a $q^{-1} \circ p^{-1}$ a $q \circ q$ najděte u všech těchto permutací jejich rozklad na transpozice.

(10) Spočítejte determinant matic $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$.

(11) Najděte pro libovolná $a \in \mathbf{Q}$ nad $\mathbf{Q}$ rekurentní vzorec pro výpočet determinant čtvercové matice $\mathbf{G}_n = (g_{ij})$ stupně n, kde $g_{ii} = 1$, $g_{ii+1} = a$ a $g_{ii+1} = b$ a jinde je $g_{ij} = 0$.