1. Bilineární a kvadratické formy

1.1. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů M bází vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$:

(a) $M = ((2,1,1),(4,2,1))$,
(b) $M = ((2,1,1),(4,2,1),(3,4,3))$,
(c) $M = ((2,1,1),(4,2,1),(2,2,2),(4,1,0))$,
(d) $M = ((2,1,1),(4,2,1),(2,2,2))$.

(a) Ve vektorovém prostoru konečné dimenze n má každá báze právě n prvků, tedy dvouprvková množina v třídimenzionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ nemůže být bází.

(b) Stačí nám zjistit, zda jsou vektory M lineárně nezávislé nebo zda generují celé $\mathbf{Z}_5^3$. Úlohu přeformulujeme na otázku hodnosti matice, kam do řádků (nebo sloupců) sepíšeme vektory posloupnosti M:

$$h(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}) = h(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}) = 2.$$

Posloupnost tedy není báze.

(c) Stejný argument jako v případu (a) říká, že čtyřprvková množina v třídimenzionálním vektorovém prostoru určitě není jeho báze.

(d) Uvažujeme stejně jako v bodě (b) a počítáme hodnost matice, tedy dimenzi vektorového prostoru generovaného řádky matice

$$h(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}) = h(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = 3,$$

proto posloupnost $M = ((2,1,1),(4,2,1),(2,2,2))$ tvoří bázi. □

1.2. Spočítejte souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $M = ((2,1,1),(4,2,1),(2,2,2))$.

(a) $\mathbf{v} = (4,2,1)$,
(b) $\mathbf{v} = (3,2,2)$,
(c) $\mathbf{v} = (0,0,0)$,
(d) $\mathbf{v} = (2,2,0)$.

(a) Okamžitě vidíme, že $(4,2,1) = 0\cdot(2,1,1) + 1\cdot(4,2,1) + 0\cdot(2,2,2)$, tedy $[(4,2,1)]_M = (0,1,0)$

(b) Podobně jako v (a) i tentokrát určíme souřadnice přímo z definice, protože $(3,2,2) = 1\cdot(2,1,1) + 0\cdot(4,2,1) + 3\cdot(2,2,2)$. Dostáváme, že $[(3,2,2)]_M = (1,0,3)$

(c) Opět z definice vidíme, že $[(0,0,0)]_M = (0,0,0)$.

(d) Hledáme vektor (x_1,x_2,x_3), pro který $(2,2,0) = x_1\cdot(2,1,1) + x_2\cdot(4,2,1) + x_3\cdot(2,2,2)$, tedy řešíme soustavu rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Nyní snadno dopočítáme, že $[(2,2,0)]_M = (1,2,1)$. □

1.3. Najděte takovou matici $\mathbf{A}$, aby souřadnice libovolného vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi M z předchozího příkladu byli rovny součinu $[\mathbf{v}]_M = \mathbf{v}\mathbf{A}$.

Označíme-li K_3 a uvědomíme-li si, že $[\mathbf{v}]_{K_3} = \mathbf{v}$, pak vidíme, že

$$[\mathbf{v}]_M = [\mathbf{v}]_{K_3}[\mathrm{Id}]^T_{K_3M} = \mathbf{v}[\mathrm{Id}]^T_{K_3M},$$

tedy $\mathbf{A} = [\mathrm{Id}]^T_{K_3M}$. Připomeňme konečně, že $[\mathrm{Id}]_{K_3M} = [\mathrm{Id}]^{-1}_{MK_3}$, kde matici $[\mathrm{Id}]_{MK_3}$ umíme velmi snadno určit z definice. Tedy standardní metodou počítejme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $[\mathrm{Id}]_{K_3M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, a proto $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

□

1.4. Najděte ve vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^2$ matici přechodu od báze $M = ((2,1),(2,3))$ k bázi $N = ((1,5),(3,4))$.

Uvědomíme si, že matice přechodu od báze M k bázi N je právě maticí $[\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NM}$ identického homomorfismu vzhledem k bázím N a M, kterou spočteme obvyklým způsobem

$$[\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NM} = [\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{K_2M} \cdot [\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NK_2} = [\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]^{-1}_{MK_2} \cdot [\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NK_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

1.5. Buď $\mathbf{A}$ nějaká čtvercová matice stupně n nad tělesem T a definujme zobrazení $f : T^n \times T^n \to T$ předpisem $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}^T$ a dále pro každé $\mathbf{u} \in T^n$ dvojici zobrazení $f_{\mathbf{u}}, {}_{\mathbf{u}}f : T^n \to T$ podmínkou $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v},\mathbf{u})$ a ${}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Dokažte, že $f_{\mathbf{u}}$ a ${}_{\mathbf{u}}f$ jou pro každé $\mathbf{u} \in T^n$ lineární formy.

Obě zobrazení $f_{\mathbf{u}}$ i ${}_{\mathbf{u}}f$ zobrazují vektorový prostor nad tělesem T do tělesa T, tedy stačí ověřit linearitu. Využijeme k tomu vlastnosti sčítání a násobení matic a dostaneme pro každé $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in T^n$ a každé $t \in T$, že $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}_1\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{v}_2\mathbf{A}\mathbf{u} = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1) + f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_2)$ a $f_{\mathbf{u}}(t\mathbf{v}) = t\mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{u} = tf_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$. Symetricky i ${}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) ={}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{v}_1) +{}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{v}_2)$ a ${}_{\mathbf{u}}f(t\mathbf{v}) = t\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{v} = t{}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v})$.

2./3.3.

Poznamenejme, že zobrazení, které jsme zavedli v 1.5 je bilineární forma.

1.6. Uvažujme bilineární formu f z příkladu 1.5 na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^2$ pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Najděte matici f vzhledem ke kanonické bázi.
(b) Najděte matici f vzhledem k bázi $B = ((3,3),(4,1))$.

(c) Určete bázi levého vrcholu f, tj. podprostoru $\{\mathbf{u}|\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_5^2\}$.
(d) Určete bázi pravého vrcholu f, tj. podprostoru $\{\mathbf{u}|\ f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_5^2\}$.
(e) Najděte matice vzhledem ke kanonické bázi symetrické bilineární formy f_s a antisymetrické bilineární formy f_a, pro které $f = f_s + f_a$.
(f) Najděte matice f_s a f_a vzhledem k bázi B.

(a) Označme $\mathbf{M}$ matici f vzhledem ke kanonické bázi. Postupujeme-li podle definice, tedy uvážíme, že obsahuje na i-tém řádku a j-tém sloupci právě hodnotu $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \mathbf{A} \mathbf{e}_j^T$. Tedy vidíme, že $\mathbf{M} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Označme $\mathbf{N}$ matici f vzhledem k bázi $B = ((3,3),(4,1))$. Využijeme definice nebo pozorování z přednášky, které říká, že

$$\mathbf{N} = [\mathrm{Id}]_{BK_2}^T \cdot \mathbf{A} \cdot [\mathrm{Id}]_{BK_2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Uvážíme-li, že vektor $\mathbf{u}$ leží v levém vrcholu, právě když je řešením homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}^T$, stačí když najdeme bázi řešení této soustavy. Zřejmě tedy hledanou bázi tvoří například vektor $(1,1)$. Poznamenejme, že podobnou úvahu můžeme využít i pro matice bilineární formy vzhledem k jakékoli jiné bázi C, v takovém případě ovšem najdeme souřadnice hledané báze vrcholu vyjádřené vzhledem k bázi C.

(d) Podobně jako v (c) nahlédneme, že vektor $\mathbf{u}$ leží v v pravém vrcholu, právě když je řešením homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$. Takovým řešením a hledanou bází je tedy například vektor $(3,1)$.

(e) Z přednášky víme, že stačí položit $f_s(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{u}))$ a $f_a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - f(\mathbf{v},\mathbf{u}))$, abychom dostali jednoznačně určenou symetrickou bilineární formu f_s a antisymetrickou bilineární formu f_a, pro než $f = f_s + f_a$. Označme $\mathbf{M}_s$ matici f_s a $\mathbf{M}_a$ matici f_a vzhledem ke kanonické bázi. Díky izomorfismu, který pro pevně zvolenou bázi C přiřadí bilineární formě její matici vzhledem k C, můžeme otázku vyřešit přímo v maticovém zápisu, tj.

$$\mathbf{M}_s = 2^{-1} \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_a = 2^{-1} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}^T) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že druhý výpočet už jsme nemuseli provádět, stačilo uvážit, že $\mathbf{M}_a = \mathbf{M} - \mathbf{M}_s$.

(f) Postupujeme stejně jako v bodě (e), ale pracujeme s maticí $\mathbf{N}$ bilineární formy f vzhledem k bázi $B = ((3,3),(4,1))$. Označíme-li $\mathbf{N}_s$ matici f_s a $\mathbf{N}_a$ matici f_a vzhledem k bázi B, pak

$$\mathbf{N}_s = 2^{-1} \cdot (\mathbf{N} + \mathbf{N}^T) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_a = \mathbf{N} - \mathbf{N}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

1.7. Buď $\mathbf{B}$ čtvercová matice stupně 2 nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ a buď zobrazení $f : \mathbf{Z}_7^2 \times \mathbf{Z}_7^2 \to \mathbf{Z}_7$ dáno předpisem $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T$. Určete matici $\mathbf{B}$, víte-li, že $f((1,4),(1,4)) = f((1,4),(3,3)) = 1$, $f((3,3),(1,4)) = 2$ a $f((3,3),(3,3)) = 0$.

Z pozorování příkladu 1.5 víme, že je f bilineární forma. Vezmeme-li bázi $M = ((1,4),(3,3))$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^2$, vidíme, že v zadání příkladu máme uvedeny údaje, které můžeme sepsat do matice $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ f bilineární formy f vzhledem k bázi M. Uvážíme-li, že je matice $\mathbf{B}$ právě maticí f vzhledem ke kanonické bázi K_2, stačí podobně jako v 1.6(b) využít vztahu dokázaného na přednášce $\mathbf{B} = [\mathrm{Id}]_{K_2M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot [\mathrm{Id}]_{K_2M}$. Obvyklým způsobem spočítáme

$$[\mathrm{Id}]_{K_2M} = [\mathrm{Id}]_{MK_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

a proto

$$\mathbf{B} = [\mathrm{Id}]_{K_2M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot [\mathrm{Id}]_{K_2M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

1.8. Buď g bilineární forma na racionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ s maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$.

(a) Spočítejte $g((1,1,0),(1,1,1))$.
(b) Spočítejte $g((1,2,1),(0,2,2))$.
(c) Najděte matice vzhledem k bázi B symetrické bilineární formy g_s a antisymetrické bilineární formy g_a, pro které $g = g_s + g_a$.

(a) Protože jsou vektory $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ přímo bázické vektory báze g, údaj odečtem přímo z matice g vzhledem k bázi B, tedy $g((1,1,0),(1,1,1)) = 0$.

(b) Využijeme vztah, který říká, jak zjistit hodnotu bilineární formy z matice a souřadnicových vektorů $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_B \cdot \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_B^T$. Obvyklým způsobem určíme $[(1,2,1)]_B = (1,1,-1)$ a $[(0,2,2)]_B = (2,-2,0)$, proto

$$g((1,2,1),(0,2,2)) = (1,1,-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.$$

(c) Označíme $\mathbf{A}_s$ matici g_s a $\mathbf{A}_a$ matici g_a vzhledem k bázi B a postupujeme stejně jako v příkladu 1.6(f):

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_a = \mathbf{A} - \mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

9./10.3.

1.9. Rozhodněte, zda je zobrazení $h_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dané předpisem $h_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1y_2 + 3x_2^2$ kvadratická forma.

Snadno nahlédneme, že můžeme dané zobrazení vyjádřit ve tvaru $h_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, a proto je $h_2(x_1, x_2) = h((x_1, x_2), (x_1, x_2))$ pro symetrickou bilineární formu h s maticí vzhledem ke kanonické bázi $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Tedy $h_2(\mathbf{u}) = h(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ je podle definice kvadratická forma. □

1.10. Najděte symetrickou bilineární formu f na $\mathbf{Z}_5^3$, která vytváří kvadratickou formu f_2 danou vztahem $f_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + 4x_3^2$. Určete vrchol f_2.

Stejně jako v předchozí úloze přímočaře (tj. „rozpůlením" koeficientů u členů x_iy_j pro $i \neq j$) určíme matici hledané symetrické bilineární formy f vzhledem ke kanonické bázi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}$. Tuto bilineární formu můžeme posat i analyticky (vzhledem ke kanonické bázi):

$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 + 4x_3y_3.$

Vzhledem k tomu, že vrcholem kvadratické formy je pravý (nebo levý) vrchol symetrické bilineární formy f na vytváří kvadratickou formu f_2, stačí najít řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$. Protože

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

je vrchol $V(f) = V(f_2) = \langle(1, 4, 1)\rangle$. □

1.11. Najděte polární bázi symetrické bilineární formy g na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$, která vytváří kvadratickou formu $g_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2$. Určete matici g vzhledem k nalezené polární bázi.

Opět bezprostředně z předpisu určíme matici hledané symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Budeme postupovat metodou I z přednášky.

Nejprve zvolíme vektor $\mathbf{p}_1$, pro který $g_2(\mathbf{p}_1) \neq 0$. Z matice $\mathbf{B}$ vidíme, že sice $g_2(\mathbf{e}_1) = 0$, ale pro druhý vektor kanonické báze je $g_2(\mathbf{e}_1) = 3 \neq 0$. Položíme tedy například $\mathbf{p}_1 = \mathbf{e}_2$.

Je-li to možné, volíme nyní vektor $\mathbf{p}_2 \in \operatorname{Ker} g(\mathbf{p}_1, -)$, pro který $g_2(\mathbf{p}_2) \neq 0$, tj. potřebujme nejprve vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{B} = (0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

a poté mezi těmito řešeními najít takové, na němž je hodnota g_2 nenulová. Připomeňme, že první otázku umíme zodpovědět vždy a kdyby poté neexistoval vektor s nenulovou hodnotou g_2, mohli bychom už zbylé vektory polární báze volit mezi nalezenými řešeními libovolně. V našem případě vidíme, že nepříklad $\mathbf{p}_2 = (0,1,1)$ řeší rovnici a $g_2(\mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_2 \mathbf{B} \mathbf{p}_2^T = -2 \neq 0$.

Koneečně tentokrát volíme vektor $\mathbf{p}_3 \in \bigcap_{i<3} \operatorname{Ker} g(\mathbf{p}_i, -)$, tedy řešíme soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Snadno určíme poslední bázický vektor $\mathbf{p}_3 = (3,4,6)$ a pro něj dopočítáme $g_2(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_3 \mathbf{B} \mathbf{p}_3^T = 60$. Našli jsme polární bázi $P = ((0,2,0),(0,1,1),(3,4,6))$ vůči níž má bilineární forma g matici $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$. □

1.12. Buď h symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^5$ daná podmínkou $h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 2$ pro všechna $i, j = 1, \dots, n$ Najděte nějakou bázi vrcholu a nějakou polární bázi h.

Z podmínky, jíž je zadána bilineární forma h je zřejmé, že matice h zhledem ke kanonické bází se skládá ze samých dvojek, tedy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Hledáme-li vrchol, stačí jako obvykle vyřešit homogení soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A}$. Vidíme, že například posloupnost $M = ((6,1,0,0,0),(6,0,1,0,0),(6,0,0,1,0),(6,0,0,0,1))$ je báze vrcholu h. Pro nalezení polární báze tentokrát využijeme metodu označené na přednášce I*, kdy stačí doplnit bázi vrcholu na bázi celého vektorového prostoru metodou I. Vzhledem k tomu, že je hodnost dané bilineární formy (tj. hodnost kterékoli její matice) rovna jedné, stačí nám v tomto případě najít libovolný doplněk posloupnosti M na bázi $\mathbf{Z}_7^5$ (v jednodimenzionálním doplňku totiž už není co dále upravovat). Tedy například posloupnost $N = ((6,1,0,0,0),(6,0,1,0,0),(6,0,0,1,0),(6,0,0,0,1),(1,0,0,0,0))$ je polární báze h a matice h vzhledem k N je $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

1.13. Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy f z 1.10 na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^3$.

Opět postupujme metodou I*. V 1.10 jsme našli bázi $((1,4,1))$ vrcholu f. Vektor $(1,4,1)$ můžeme doplnit na bázi $\mathbf{Z}_5^3$ například vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ kanonické báze. Snadno určíme matici $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ bilineární formy $\widetilde{f}$, která je restrikcí f na podprostor $U = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, vzhledem k bázi $N = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Dále počítáme v souřadnicích vzhledem k N. Nejprve tedy přímo vidíme, že $\widetilde{f}_2(\mathbf{e}_1) = 3 \neq 0$ a poté vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí

$$[\mathbf{e}_1]_N \cdot \mathbf{A} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že soustavu řeší $[\mathbf{p}_2]_B = (4,1)$, tedy $\mathbf{p}_2 = (4,1,0)$ a $\widetilde{f}_2(\mathbf{p}_2) = (4,1) \cdot \mathbf{A} \cdot (4,1)^T = 4$. Našli jsme polární bázi $((1,4,1),(1,0,0),(4,1,0))$ formy f s maticí vůči této bázi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. □

16./17.3.

1.14. Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ dané předpisem $g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Nejprve obvyklým způsobem určíme matici symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Postupujeme metodou II z přednášky a matici $\mathbf{C}$ upravujeme posloupností symetrických elementárních úprav. Provádíme tedy v každém kroku vždy stejnou řádkovou a sloupcovou úpravu tak, abychom nakonec dostali diagonální matici. Řádkové úpravy budeme zachycovat obvyklým způsobem (jako při hledání inverzní matice) do matice.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Budeme-li vzniklou diagonální matici chápat jako matici bilineární formy f vzhledem k nějaké nové bázi M, vidíme, že vpravo dostáváme matici transponovanou k matici přechodu od báze M ke kanonické bázi, tedy $[\mathrm{Id}]_{MK_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nyní snadno určíme bázi $M = ((1,0),(3,1))$, vůči níž je matice f diagonální, tedy M je polární báze f. □

1.15. Existuje-li, najděte nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$, pro který

(a) $g_2(\mathbf{v}) > 0$,
(b) $g_2(\mathbf{v}) < 0$,
(c) $g_2(\mathbf{v}) = 0$,

kde g_2 je kvadratická forma vytvořená bilineární formou z příkladu 1.14.

(a) Okamžitě z matice $[g]_{K_2}$ vidíme, že hodnota g_2 je kladná například na obou vektorech kanonické báze, tedy $g_2(\mathbf{e}_1) = 1$ a $g_2(\mathbf{e}_2) = 2$.

(b) Potřebujeme zjistit, zda je či není kvadratická forma g_2 pozitivně semidefinitní. Není-li, pak existuje vektor v na němž je hodnota g_2 záporná. Protože má matice g vzhledem k polární bázi M jedno kladné a jedno záporné číslo, je g indefinitní. Opět přímo z matice vidíme, že $g_2((3,1)) = -7$.

(c) Vyjádřeme si hledaný vektor v pomocí známé polární báze M, tedy $\mathbf{v} = a\cdot(1,0)+b\cdot(3,1)$, tj. $[\mathbf{v}]_M = (a,b)$. Nyní víme, že $g_2(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_M[g_2]_M[\mathbf{v}]_M^T. = a^2-7\cdot b^2$. Chcem-li, aby $g_2(\mathbf{v}) = 0$, dostáváme rovnici $a^2 - 7\cdot b^2 = 0$, kterou řeší například $(a,b) = (\sqrt{7},1)$. Našli jsme tedy vektor $\mathbf{v} = \sqrt{7}\cdot(1,0) + 1.(3,1) = (\sqrt{7}+3,1)$, pro nějž platí, že $g_2(\mathbf{v}) = 0$. □

1.16. Popište množinu všech bodů $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ splňující podmínku $x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_1 - 4x_2 - 5 = 0$.

Všimneme si, že výraz $x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_1 - 4x_2 - 5$ obsahuje kvadratickou fromu g_2 z předchozího příkladů, konkrétně $x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_1 - 4x_2 - 5 = g_2(x_1,x_2) + 6x_1 - 4x_2 - 5$. Vyjádřeme tuto rovnost v souřadnicích vzhledem k polární bázi M. Nejprve označme $(y_1,y_2) = [(x_1,x_2)]_M = (x_1,x_2)\cdot[\mathrm{Id}]_{K_2M}^T$. Potom $(x_1,x_2)^T = [\mathrm{Id}]_{MK_2}\cdot(y_1,y_2)^T$, a proto

$$6x_1 - 4x_2 = (6,-4)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (6,-4)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 6y_1 + 14y_2.$$

Protože $g_2(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_M[g]_M[\mathbf{v}]_M^T$, dostáváme, že $g_2(x_1,x_2) = y_1^2 - 7y_2^2$, a proto potřebujeme vyřešit rovnici

$$0 = y_1^2-7y_2^2+6y_1+14y_2-5 = (y_1+3)^2-9-7(y_2-1)^2+7-5 = (y_1+3)^2-7(y_2-1)^2-7.$$

Vidíme, že hledaný útvar je hyperbola se středem $[\mathbf{v}]_M = (-3,1)$, tj. $\mathbf{v} = 0,1$. □

1.17. Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$ s maticí vzhledem ke kanonické bázi $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Opět využijeme metodu II, tj. matici opět převedeme symetrickými úpravami na diagonální matici a použité řádkové elementární úpravy zazanamenáme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

V řádcích pravé strany upravené matice vidíme, že polární bázi f tvoří například vektory $(1,0,0),(0,1,0),(5,5,1)$. □

1.18. Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy g na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí $[g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2.

Opět postupujeme metodou II. Všimněme si, že hodnota $g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i) = 0$ pro $i = 1,2$, tedy nám při symetrických úvahách nestačí přehodit řádek a sloupec matice, nýbrž musíme přičíst druhý řádek i sloupec k prvnímu:

$$([g]_{K_2}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Našli jsme tedy matici přechodu od kanonické bázi k polární, tedy hledanou polární bází je například posloupnost vektorů $((1,1),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ □

23./24.3.

1.19. Spočítejte signaturu symetrické bilineární formy h na $\mathbf{R}^3$ dané kvadratickou formou $h_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$.

Obvyklým způsobem určíme matici $[h]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ a tuto matici upravíme posloupností symetrických úprav na diagonální matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Protože díky metodě II víme, že existuje polární báze M vůči níž má symetrická bilineární forma h matici $[h]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, stačí podle definice přepočítat nuly, kladná čísla a záporná čísla na diagonále této matice a seřadit údaje do signatury $(0, 2, 1)$ symetrické bilineární formy h. $\square$

1.20. Nechť h je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ s maticí $[h]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem k nějaké bázi B.

(a) Určete signaturu h,
(b) rozhodněte, zda je h skalární součin na $\mathbf{R}^3$,
(c) popište v souřadnicích vzhledem ke vhodné bází množinu $K = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 |\ h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1\}$.

(a) Položme $\mathbf{A} = [h]_B$ a označme $\mathbf{A}_i$ matici, která vznikne z $\mathbf{A}$ vynecháním posledních $n - i$ řádků a sloupců. Využijeme tentokrát metodu III z přednášky. Nebudeme přitom pomocí výpočtu subdeterminantů hledat polární bázi, ale využijeme toho, že za předpokladu, že $\det A_i \neq 0$, umíme najít polární bázi $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, pro níž $h(\mathbf{p}_1) = \det A_1$ a $h(\mathbf{p}_i) = \det A_{i-1} \cdot \det A_i$ pro $i > 1$. Tedy spočítáme $\det A_1 = 1$, $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$, $\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 10 + 1 + 1 - 2 - 5 - 1 = 4$, abychom viděli, že pro vhodnou bázi P je

$$[h]_P = \begin{pmatrix} \det A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \det A_1 \cdot \det A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \det A_2 \cdot \det A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že h má signaturu $(0, 3, 0)$.

(b) Protože má h podle (a) signaturu $(0, 3, 0)$, jde o pozitivně definitní symetrickou bilineární formu na reálném vektorovém prostoru, proto je h skalární součin.

(c) Uvažujeme stejně jako v 1.16 a stačí tedy rozvážit úlohu vzhledem k polární bázi P, jejíž existenci nám zaručuje metoda III, a vůči níž jsme v bodu (a) spočítali matici h. Poznamenejme, že v souřadnicích vzhledem k bázi B najdeme níže (v 2.2) ještě jinou polární bázi. Označíme-li $(y_1, y_2, y_3) = [\mathbf{v}]_P$, pak $\mathbf{v} \in K$, právě když

$y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 = 1$. Proto (nejen v souřadnicích v P) tvoří K elipsoid se středem v bodě $(0,0,0)$. □

2. Skalární součin

2.1. Dokažte, že je zobrazení $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ skalární součin na $\mathbf{R}^2$ a najděte nějakou jeho ortonormální bázi.

Nad reálným vektorovým prostorem potřebujeme zjistit, zda je f pozitivně definitní symetrická bilineární forma. Snadno nahlédneme, že se jedná o bilineární formu s maticí $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vidíme, že je $[f]_{K_2}$ symetrická matice, proto je f symetrická bilineární forma. Označíme-li $\mathbf{A} = [f]_{K_2}$, pak nám stačí spočítat $\det(5) = 5$ a $\det \mathbf{A} = 1$, tudíž díky metodě III existuje polární báze M, pro níž $[f]_M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$. To ovšem znamená, že je f má signaturu $(0,2,0)$, tedy je to pozitivně definitní symetrická bilineární forma.

Protože ortogonální báze f reálného skalárního součinu je právě polární bází f a ortonormální báze, $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ je ortogonální báze splňující navíc podmínku $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 1$, stačí některou z výše uvedených metod najít vhodnou polární bázi. Postupujme například metodou II:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Našli jsme ortonormální bázi $B = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0,1))$. □

30./31.3.

2.2. Najděte nějakou ortonormální bázi skalárního součinu h z příkladu 1.20.

Budeme stejně jako v předchozí úloze hledat pomocí symetrických úprav bázi, vůči níž má pozitivně definitní symetrická bilineární forma h právě jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Našli jsem ortonormální bázi $M = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, jejíž souřadnici vzhledem k bázi B jsou $[\mathbf{v}_1] = (1,0,0)$, $[\mathbf{v}_2] = (1,1,0)$ a $[\mathbf{v}_3] = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. □

2.3. Nechť $B = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ je ortonormální báze vzhledem ke skalárnímu součinu $\cdot$ na $\mathbf{R}^3$.

(a) Spočítejte $(1,0,1) \cdot (0,1,1)$, $(1,0,1) \cdot (1,1,1)$ a $(2,1,1) \cdot (2,3,1)$,
(b) najděte matici $\mathbf{A}$, pro níž $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^T$.

(c) označíme-li ω standardní skalární součin, najděte takový izomorfismus $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, aby $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \omega(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$,
(d) určete matice φ a φ^{-1} z (c) vzhledem ke kanonické bázi.

(a) Nejprve si všimněme, že $(1,0,1)$ a $(0,1,1)$ jsou dva různé vektory ortonormální báze, proto z definice ortonormality $(1,0,1)\cdot(0,1,1) = 0$.

Připomeňme, že $\cdot$ je pozitivně definitní symetrická bilineární forma na $\mathbf{R}^3$, tedy ze zadání je jasná matice $\cdot$ vzhledem k bázi B, tj. $[\cdot]_B = \mathbf{E}$. Známe-li souřadnice vektoru vzhledem k bázi B, obvyklým způsobem spočítáme hodnotu bilineární formy. Vidíme (nebo spočítáme), že $[(1,0,1)]_B = (1,0,0)$, $[(1,1,1)]_B = \frac{1}{2}(1,1,1)$, $[(2,1,1)]_B = (1,1,0)$ a $[(2,3,1)]_B = (0,2,1)$, proto

$$(1,0,1)\cdot(1,1,1) = [(1,0,1)]_B \mathbf{E} [(1,1,1)]_B^T = (1,0,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$(2,1,1)\cdot(2,3,1) = [(2,1,1)]_B \mathbf{E} [(2,3,1)]_B^T = (1,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 2.$$

(b) Potřebujeme najít právě matici $\cdot$ vzhledem ke kanonické bázi, k čemuž využijme teorii bilineárních forem (viz například 1.6), tedy

$$\mathbf{A} = [\mathrm{Id}]_{K_3 B}^T [\cdot]_B [\mathrm{Id}]_{K_3 B} = ([\mathrm{Id}]_{BK_3}^T)^{-1} [\mathrm{Id}]_{BK_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Stačí tedy určit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, a potom

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Uvážíme-li, že danou podmínku mají splňovat i vektory jakékoli ortonormální báze $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, tedy, že $\delta_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \omega(\varphi(\mathbf{b}_i), \varphi(\mathbf{b}_j))$, vidíme, že hledaný izomorfismus φ zobrazí nutně ortonormální bázi vzhledem k $\cdot$ ortonormální bázi vzhledem k ω. Protože kanonická báze K_3 je ortonormální vzhledem k ω, položme $\varphi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3$. Tím máme jednoznačně zadán izomorfismus $\varphi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_B$, o němž díky linearitě v obou složkách nahlédneme, že splňuje požadovanou podmínku.

(d) Protože $\varphi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$, máme $\varphi^{-1}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{b}_i$, odkud okamžitě z definice matice endomorfismu dostáváme, že $[\varphi^{-1}]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Konečně $[\varphi]_{K_3} = [\varphi^{-1}]_{K_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. □

2.4. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$.
(a) Ověřte, že $B = ((\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}))$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^3$ vzhledem $\cdot$,

(b) spočítejte souřadnice $[(0,0,1)]_B$, $[(2,1,0)]_B$ a $[(1,2,3)]_B$,
(c) ověřte, že $C = ((0,0,1), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0))$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^3$ vzhledem $\cdot$,
(d) označme $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, $C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ a dokažte, že pro izomorfismus ψ jednoznačně určený podmínkou $\psi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$, kde $i = 1,2,3$, platí $\|\,\mathbf{u}\,\| = \|\psi(\mathbf{u})\|$ pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$.

(a) Podle definice spočítáme

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = 3 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 1,$$
$$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,$$
$$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}} = 0,$$
$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1,$$
$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) = \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,$$
$$(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) = 2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{6}})^2 = 1,$$

tedy zjistili jsme, že B je ortonormální posloupnopst, tedy lineárně nezávislá posloupnost. Protože jde o tříprvkovou lineárně nezávislou posloupnost ve vektorovém prostoru dimenze 3, musí jít o bázi a $[\cdot]_B = \mathbf{E}$.

(b) Připomeňme, že pro každou ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ a pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ platí $[\mathbf{v}]_B = (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{v})$, proto

$$[(0,0,1)]_B = (1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \cdot 0, 1 \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, 0, -2),$$

dále

$$[(2,1,0)]_B = (\frac{2+1}{\sqrt{3}}, \frac{2-1}{\sqrt{2}}, \frac{2+1}{\sqrt{6}}) = (\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}),$$
$$[(1,2,3)]_B = (\frac{1+2+3}{\sqrt{3}}, \frac{1-2}{\sqrt{2}}, \frac{1+2-3\cdot 2}{\sqrt{6}}) = (2\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}).$$

(c) Stejně jako v (a) přímočaře spočítáme, že $[\cdot]_C = \mathbf{E}$.

(d) Položme $[\mathbf{v}]_B = (v_1, v_2, v_3)$ a $[\mathbf{w}]_B = (w_1, w_2, w_3)$. Ověříme, že $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \psi(\mathbf{v}) \cdot \psi(\mathbf{w})$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\sum_{i=1}^{3} v_i \mathbf{b}_i) \cdot (\sum_{j=1}^{3} w_j \mathbf{b}_j) = \sum_{i,j \leq 3} v_i w_j (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$$

a podobně

$$\psi(\mathbf{v}) \cdot \psi(\mathbf{w}) = (\sum_{i=1}^{3} v_i \psi(b_i)) \cdot (\sum_{j=1}^{3} w_j \psi(b_j)) = \sum_{i,j \leq 3} v_i w_j (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j) = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i,$$

čímž jsme dokázali, že $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \psi(\mathbf{v}) \cdot \psi(\mathbf{w})$, a proto $\|\,\mathbf{u}\,\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\psi(\mathbf{u}) \cdot \psi(\mathbf{u})} = \|\psi(\mathbf{u})\|$. $\square$

6./7.4.

2.5. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ a nechť $V = \langle (1,1,0), (1,3,2) \rangle$.

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru V,
(b) najděte ortogonální bázi V obsahující vektor $(2,4,2)$,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(2,2,-1)$ do podprostoru V,
(d) spočítejte bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
(e) určete ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ prostoru $\mathbf{R}^3$, pro niž $V = \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle$.

(a) Budeme upravovat například bázi $((1,1,0),(1,3,2))$ Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací. Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(1,1,0)\|}(1,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. Dále hledáme vektor $\mathbf{u}_2$ ve tvaru $\mathbf{u}_2 = (1,3,2) + c \cdot \mathbf{v}_1$. Z podmínky $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ dostáváme, že $c = -\mathbf{v}_1 \cdot (1,3,2) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$, proto $\mathbf{u}_2 = (-1,1,2)$. Nyní vektor $\mathbf{u}_2$ normalizujeme a dostanme $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|-1,1,2\|}(-1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.

Hledanou ortonormální bází V je tedy posloupnost $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2))$.

(b) Postupujeme obdobně jako v (a) jen zvolíme bázi V začínající vektorem $(2,4,2)$, například bázi $((2,4,2),(1,1,0))$. Nyní opět použijeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci, tentokrát ovšem nebudeme normalizovat:

Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = (2,4,2)$ a hledáme vektor $\mathbf{v}_2$ ve tvaru $\mathbf{v}_2 = (1,1,0) + c \cdot \mathbf{v}_1$. Z podmínky $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ tentokrát dostáváme, že $c = -\frac{\mathbf{v}_1 \cdot (1,1,0)}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}$, proto $\mathbf{v}_2 = (1,1,0) - \frac{1}{4} \cdot (2,4,2) = \frac{1}{2}(1,0,-1)$.

Hledanou ortogonální bází V je tedy posloupnost $((2,4,2), \frac{1}{2}(1,0,-1))$ nebo posloupnost $((2,4,2),(1,0,-1))$.

(c) Na přednášce bylo dokázáno, že podobně jako v úloze 2.4 lze souřadnice ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor V vzhledem k ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ spočítat pomocí jako Fourierovy koeficienty, tj. označíme-li $\mathbf{v}_\mathbf{u} \in V$ ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ na V, pak $[\mathbf{v}_\mathbf{u}]_B = (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v})$. Tedy využijeme-li nalezené ortonormální báze $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2))$ z úlohy (a), máme $[\mathbf{v}_{(2,2,-1)}] = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \cdot (2,2,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) \cdot (2,2,-1)) = (\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, a proto

$$\mathbf{v}_\mathbf{u} = \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \frac{1}{3}(7,5,-2).$$

Na závěr si zkontrolujme, že $\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathbf{u}$ lezží v ortogonálním doplňku V, tedy, že je vektor $(2,2,-1) - \frac{1}{3}(7,5,-2) = \frac{1}{3}(-1,1,-1)$ kolmý na všechny (bázické) vektory V.

(d) Na konci úlohy (c) jsme našli vektor $(-1,1,-1)$ kolmý na celý prostor V. Protože musí mít (nejen) ortogonální doplněk V v $\mathbf{R}^3$ mít dimenzi $3 - 2 = 1$, našli jsme jeho bázi $(-1,1,-1)$.

(e) V (a) jsme nalezli ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2))$ prostoru V a v (d) bázický vektor $(-1,1,-1)$ podprostoru $V^\perp$. Stačí tedy poslední vektor normalizovat, tj. položíme-li $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$ $\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$, dostáváme ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ požadovaných vlastností. □

2.6. Buď $M = ((1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,1,1))$ báze reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem $\cdot$. Najděte ortonormální takovou bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbf{R}^3$, aby $\langle (1,1,0) \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ a $\langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

Postupujme opět Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.
2. $\mathbf{v}_2' = (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\cdot(0,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,1,2)$. Proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.
3. Předně $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\cdot(1,1,1) = \sqrt{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\cdot(1,1,1) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, proto $\mathbf{v}_3' = (1,1,1) - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \frac{1}{3}(1,-1,1)$. Konečně $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2), \frac{1}{3}(1,-1,1))$. $\square$

2.7. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru $U = \langle(1,2,1,1,1),(0,-1,1,1,2)\rangle$.

Připomeňme, že

$$U^\perp = \{\mathbf{v}\in\mathbf{R}^5 |\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \forall\, \mathbf{u}\in U\} = \{\mathbf{v}\in\mathbf{R}^5 |\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \forall\, \mathbf{u}\in B\},$$

kde B je nějaká báze U. Snadno uvážíme, že potřebujeme najít právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ Tedy bázi $U^\perp$ tvoří například vektory $(-3,1,1,0,0),(-3,1,0,1,0),(-5,2,0,0,1)$. $\square$

2.8. Nechť $\cdot$ je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$.

(a) najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \langle(1,1,-2,1),(2,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$,
(b) najděte nějakou ortogonální bázi podprostoru $U = \langle(1,1,0,1),(1,0,1,1)\rangle$,
(c) najděte nějakou ortogonální bázi ortogonálního doplňku $U^\perp$,
(d) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(-1,1,0,4)$ do podprostoru $W = \langle(1,2,1,-1),\ (1,1,0,1)\rangle$.

(a) Nejprve zvolíme vhodnou bázi prostoru V, kterou budeme ortogonalizovat pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace. Vektor $(2,0,1,0)$ je zřejmě kolmý na zbývající vektory, zvolme tedy bázi V, tak aby byl vektor $(2,0,1,0)$ na jejím prvním místě. Tedy ortogonalizujme například bázi $((2,0,1,0),(0,1,0,1),(1,1,-2,1))$. Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci tentokrát mírně modifikujeme: najdeme nejprve ortogonální bázi a tu budeme normalizovat až na závěr.

Už jsme všimli, že $((2,0,1,0)\cdot(0,1,0,1) = 0$, tedy máme první dva (zatím jen ortogonální, nikoli ortonormální) vektory hledané báze: $\mathbf{v}_1' = (2,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2' = (0,1,0,1)$. Nyní budeme hledat třetí bázický vektor ve tvaru $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1) - c_1\,\mathbf{v}_1' - c_2\,\mathbf{v}_2'$. Přitom má splňovat podmínky, že $\mathbf{v}_i'\cdot\mathbf{v}_3' = 0$ pro $i = 1,2$, z čehož využitím linearity skalárního součinu v druhé složce dostáváme, že

$$c_1 = \frac{(1,1,-2,1)\cdot(2,0,1,0)}{(2,0,1,0)\cdot(2,0,1,0)} = 0, \quad c_2 = \frac{(1,1,-2,1)\cdot(0,1,0,1)}{(0,1,0,1)\cdot(0,1,0,1)} = -1.$$

Všimněme si, že koeficient je roven 0 díky volbě vektoru $\mathbf{v}_1'$ kolmého na všechny následující vektory, proto nám stačilo hledat ortogonální bázi podprostoru $\langle(1,1,-2,1),(0,1,0,1)\rangle$, která musí být kolmá na vektor $(2,0,1,0)$. Tedy $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1) - (0,1,0,1) = (1,0,-2,0)$ je posledním hledaným kolmým vektorem. Posloupnost vektorů $((2,0,1,0),(0,1,0,1),(1,0,-2,0))$ tvoří zřejmě ortogonální bázi prostoru

V. Zbývá nám jednotlivé vektory normalizovat: $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_1'}{\|\mathbf{v}_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v}_3'}{\|\mathbf{v}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)$, Ortonormální bází je tedy například posloupnost vektorů $(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)$.

(b), (c) Můžeme postupovat několika způsoby. Jednak můžeme doplnit vektory $(1,1,0,1),(1,0,1,1)$ na bázi celého prostoru $\mathbf{R}^4$ (například vektory $(1,0,0,0)$ a $(0,1,0,0)$) a tuto bázi upravit Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. První dva vektory ortogonalizované báze budou přitom tvořit ortogonální bázi U, další dva vektory budou tvořit ortogonální bázi doplňku $U^\perp$.

Rovněž nám stačí najít libovolnou bázi $U^\perp$ (například týmž postupem z 2.7) a obě báze ortogonalizovat. Postupujme druhým způsobem: Bázi $U^\perp$ tvoří například posloupnost $(-1,1,1,0)$, $(0,1,1,-1)$. Vektor $(0,1,1,-1)$ můžeme upravit jedním krokem Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

$$(0,1,1,-1) - \frac{(-1,1,1,0)\cdot(0,1,1,-1)}{3}(-1,1,1,0) = \frac{1}{3}(2,1,1,-3),$$

a proto posloupnost $(-1,1,1,0),(2,1,1,-3)$ tvoří ortogonální bázi $U^\perp$.

Obdobně $((1,1,0,1), (1,-2,3,1))$ tvoří ortogonální bázi U.

13./14.4.

(d) Potřebujeme nejprve určit souřadnice x_1, x_2 ortogonální projekce $\mathbf{u} = x_1 \cdot (1,2,1,-1) + x_2 \cdot (1,1,0,1)$, aniž budeme hledat ortogonální bázi W, jak jsme činili v 2.5. Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1,2,1,-1)\cdot(1,2,1,-1) & (1,2,1,-1)\cdot(1,1,0,1) & (1,2,1,-1)\cdot(-1,1,0,4) \\ (1,1,0,1)\cdot(1,2,1,-1) & (1,1,0,1)\cdot(1,1,0,1) & (1,1,0,1)\cdot(-1,1,0,4) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, proto $\mathbf{u} = (1,0,-1,3)$.

Pro kontrolu ještě ověřme, zda je vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (-2,1,1,1)$ skutečně kolmý na podprostor U. Zřejmě $(-2,1,1,1)\cdot(1,2,1,-1) = 0$ a $(-2,1,1,1)\cdot(1,1,0,1) = 0$. □

2.9. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{C}^3$, tj. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}^T$.

(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $U = \langle(1,i,1-i), (i,2+i,-1)\rangle$,
(b) najděte bázi ortogonálního doplňku U^T,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(1,0,-i)$ do podprostoru U.

(a) Využijeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci provedenou na posloupnost $\mathbf{u}_1 = (1,i,1-i)$, $\mathbf{u}_2 = (i,2+i,-1)$. Nejprve určíme $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,i,1-i)}{\|(1,i,1-i)\|} = \frac{1}{2}(1,i,1-i)$. Poté spočítáme $c = \mathbf{v}_1 \cdot (i,2+i,-1) = \frac{1}{2}(1,-i,1+i)\cdot(i,2+i,-1)^T = \frac{-2i}{2} = -i$ a dále $\mathbf{v}_2' = \mathbf{u}_2 - c\,\mathbf{v}_1 = (i,2+i,-1) + \frac{i}{2}(1,i,1-i) = \frac{1}{2}(3i,3+2i,-1+i)$, proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{24}}(3i,3+2i,-1+i)$.

(b) $\mathbf{u}_1 \cdot (1,-1,0,0,1) = 0$, $\mathbf{u}_1 \cdot (1,-1,0,0,1) = 0$ Protože potřebujeme najít nenulový vektor $\mathbf{v}$ kolmý na vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, tj. má platit, že $(1,i,1-i)\cdot\mathbf{v} = (1,-i,1+i)\cdot\mathbf{v}^T = 0$ a $(i,2+i,-1)\cdot\mathbf{v} = (-i,2-i,-1)\cdot\mathbf{v}^T = 0$, což snadno zformulujeme maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 & -1+i \\ -i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ 0 & 3-i & -2+i \end{pmatrix}.$$

tedy vidíme, že bází řešení soustavy i bází $U^{\perp}$ je vektor $(-3-3i, 3+i, 4+2i)$.

(c) Podobně jako v příkladu 2.5(c) stačí, abychom spočítali souřadnice ortogonální projekce vzhledem k ortonormální bázi U, tedy hodnoty

$$a_1 = \mathbf{v}_1 \cdot (1,0,-i) = \frac{1}{2}(1,-i,1+i)\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} = \frac{1+(1+i)\cdot(-i)}{2} = \frac{2-i}{2},$$

$$a_2 = \mathbf{v}_2 \cdot (1,0,-i) = \frac{1}{\sqrt{24}}(-3i,3-2i,-1-i)\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} = \frac{-3i+i-1}{\sqrt{24}} = \frac{-1-2i}{\sqrt{24}}.$$

Tedy ortogonální projekce je vektor

$$\frac{2-i}{4}(1,i,1-i) + \frac{-1-2i}{24}(3i,3+2i,-1+i) = \frac{1}{24}(18-9i, 7+4i, 21+5i).$$

□

2.10. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$, U podprostor $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Najděte vektor $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^{\perp} \in U^{\perp}$, aby $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^{\perp}$,

(a) je-li $U = \langle (1,3,-2), (1,1,-1) \rangle$ a $\mathbf{v} = (2,4,3)$,
(b) je-li $U = \langle (1,2,1), (2,1,-1) \rangle$ a $\mathbf{v} = (1,2,4)$,
(c) je-li $U = \langle (1,2,1), (2,1,-1) \rangle$ a $\mathbf{v} = (4,2,1)$.

Postupujme obdobně jako v 2.8(d), tj. hledáme takovou lineární kombinaci vektorů $a(1,3,-2)+b(1,1,-1)$, aby byl vektor $(2,4,3)-a(1,3,-2)-b(1,1,-1)$ kolmý na prostor U. To můžeme ekvivalentně vyjádřit tak, že vektor $(2,4,3)-a(1,3,-2)-b(1,1,-1)$ je kolmý na vektor $(1,3,-2)$ i $(1,1,-1)$ a odtud dostáváme soustavu rovnic

$$(1,3,-2)\cdot[(2,4,3)-a(1,3,-2)-b(1,1,-1)] = 0,$$

$$(1,1,-1)\cdot[(2,4,3)-a(1,3,-2)-b(1,1,-1)] = 0.$$

Tuto soustavu upravíme na nehomogenní soustavu lineárnáích rovnic, sepíšeme do (Gramovy) matice a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $a = 1$ a $b = -1$, ortogonální projekce vektoru $(2,4,3)$ na podprostor U je $\mathbf{u} = (1,3,-2)-(1,1,-1) = (0,2,-1)$ a $\mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{v}-\mathbf{u} = (2,4,3)-(0,2,-1) = (2,2,4)$.

(b) I tentokrát standardně najdeme Gramovu matici $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$ vyjadřující podmínku, že $(1,2,4)-x(1,2,1)-y.(2,1,-1)$ je kolmé na podprostor U a dopočítáme $x = 2$ a $y = -1$. Ortogonální projekce vektoru $(1,2,4)$ na podprostor U je tedy $\mathbf{u} = 2\cdot(1,2,1)-1\cdot(2,1,-1) = (0,3,3)$ a $\mathbf{u}^{\perp} = (1,2,4)-(0,3,3) = (1,-1,1)$.

(c) Všimněme si, že počítáme-li stejně jako v (b), dostaneme Gramovu matic se stejnými levými stranami, tj. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$ a dopočítáme $x = 1$ a $y = 1$, proto $\mathbf{u} = \cdot(1,2,1)+(2,1,-1) = (3,3,0)$ a $\mathbf{u}^{\perp} = (4,2,1)-(3,3,0) = (1,-1,1)$. □

20./21.4.

2.11. Najděte přibližné řešení metodou nejmenších čtverců soustavy rovnic

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & =10 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =7 \\ & x_2 & -x_3 & =3 \end{array}$$

Snadno nahlédneme, že soustava nemá řešení. Budeme tedy hledat jen přibližné řešení. Máme vektor pravých stran $\mathbf{y} = (1,4,6,2,-1)$ a vektory levých stran $\mathbf{a}_1 = (1,2,1,1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,-2,2,1)$ a $\mathbf{a}_3 = (0,2,1,2,-1)$. Hledáme x_i tak, aby $\sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{a}_i$ byla právě ortogonální projekce vektoru pravých stran do podprostoru $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$. To vede stejně jako v případě ortogonální projekce k soustavě rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{y} \\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{y} \\ \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{y} \end{array}\right).$$

Dosadíme a hledáme řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 7 & 17 \\ 4 & 14 & 3 & -3 \\ 7 & 3 & 10 & 21 \end{array}\right).$$

Zbývá nám dopočítat, že $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ a $x_3 = 1$. □

2.12. Uvažujme reálný vektorový prostor $C_\infty(\langle -1,1\rangle)$ hladkých fukcí a definujme $f\cdot g = \int_{-1}^{1} fg$ pro každé $f,g \in C_\infty(\langle -1,1\rangle)$.

(a) Dokažte, že je $\cdot$ skalární součin na $C_\infty(\langle -1,1\rangle)$.
(b) Najděte ortonormální bázi podprostoru $\langle 1, x, x^2\rangle$.

(a) Zvolme $f,g,h \in C_\infty(\langle -1,1\rangle)$, $a,b \in \mathbf{R}$. Stačí připomenout, že $\int_{-1}^{1} fg = \int_{-1}^{1} gf$ a $\int_{-1}^{1} f(ag+bh) = a\int_{-1}^{1} fg + d\int_{-1}^{1} fh$, proto je $\cdot$ symetrická bilineární forma. Jestliže navíc $f \neq 0$, pak $f\cdot f = \int_{-1}^{1} f^2 > 0$, tudíž je $\cdot$ pozitivně definitní symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru, tedy skalární součin.

(b) Postupujeme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací na posloupnost funkcí $1, x, x^2$.

Nejprve spočítáme skalární součin $1\cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1^2 = 2$, tedy $\|1\| = \sqrt{2}$ a $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Protože je $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{2}} = 0$, dostáváme $\tilde{f}_1 = x - (\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{2}}dx)\frac{1}{\sqrt{2}} = x$. Konečně $\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$, proto $\|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$.

Dále spočítáme skalární součiny $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^2 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$ a $\sqrt{\frac{3}{2}}x \cdot x^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} x^3dx = 0$ a odtud $\tilde{f}_2 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$. Zbývá spočítat

$$\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2dx = \int_{-1}^{1} x^4dx - \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} x^2dx + \frac{1}{9}\int_{-1}^{1} 1dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Vidíme, že $f_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. □

Další úlohy

(1) Dokažte, že je bilineární forma zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definované předpisem $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_3y_2$.

(2) Najděte matici f z předchozí úlohy vzhledem
  (a) ke kanonické bázi,
  (b) k bázi $B = ((1, -1, 0), (1, 1, 0)(1, 2, 1))$,
  (c) k bázi $C = ((0, 1, 0), (-1, 1, -1)(-1, 2, 0))$.

(3) Nechť $f = f_s + f_a$ je rozklad bilineární formy f z příkladu 1 na symetrickou a antisymetrickou část, tj. f_s je symetrická bilineární forma f_a je antisymetrická bilineární forma. Najděte matice f_s a f_a vzhledem
  (a) ke kanonické bázi,
  (b) k bázi $B = ((1, -1, 0), (1, 1, 0)(1, 2, 1))$,
  (c) k bázi $C = ((0, 1, 0), (-1, 1, -1)(-1, 2, 0))$.

(4) Buď g_2 kvadratická forma na $\mathbf{Z}_3^4$ daná předpisem $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
  (a) Najděte symetrickou bilineární formu g, pro níž $g_2(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$,
  (b) určete matici g vzhledem k bázi $B = ((1, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)(0, 0, 2, 2), (0, 0, 1, 2))$,
  (c) určete matici g vzhledem k kanonické bázi,
  (d) spočítejte bázi vrcholu symetrické bilineární formy g,
  (e) najděte polární bázi P symetrické bilineární formy g,
  (f) najděte matici g vzhledem k nalezené bázi P.

(5) Uvažujme symetrickou bilineární formu g na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ s maticí $[g]_{K_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_4. daná předpisem $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
  (a) Najděte polární bázi g,
  (b) rozhodněte, zda je g skalární součin na $\mathbf{R}^4$,
  (c) najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$, pro které $g_2(\mathbf{v}) = 0$.

(6) Mějme zobrazení $h : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dané předpisem $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.
  (a) Ověřte, že je h skalární součin na $\mathbf{R}^3$,
  (b) najděte nějakou ortonormální bázi P skalárního součinu h,
  (c) pro nalezenou bázi spočítejte souřadnice $[(1, 0, 0)]_P$, $[(-1, 1, 2)]_P$,
  (d) najděte takový izomorfismus $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, aby $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \omega(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$, a určete matice φ a φ^{-1} z (c) vzhledem ke kanonické bázi,
  (e) spočítejte $\|(2, 3, -1)\|$.

(7) Nechť $B = ((0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (0, 1, 0, 2), (1, 1, -1, 2))$ je ortonormální báze vzhledem ke skalárnímu součinu $\cdot$ na $\mathbf{R}^4$.
  (a) Spočítejte $(1, 0, 1, 1) \cdot (2, -2, -1, 1)$ a $\|(1, 1, 1, 1)\|$,
  (b) najděte matici $\mathbf{A}$, pro níž $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^T$,
  (c) označíme-li ω standardní skalární součin, najděte takový izomorfismus $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, aby $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \omega(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$,
  (d) určete matice φ a φ^{-1} z (c) vzhledem k bázi B.

(8) Buď $\cdot$ je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$.

(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $V = \langle(1, 3, -2, 1, 1), (2, 0, 1, 1, 0), (1, 3, 1, 2, -1)\rangle$,
(b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
(c) určete ortogonální projekci vektoru $(2, 1, -1, 0, 4)$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
(d) je-li $U = \langle(2, 1, 0, 1, -1), (1, 1, 0, -1, 3), (4, -1, -1, -2, 3)\rangle$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1, 1, 0, 0, -2) = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,
(e) najděte ortonormální báze podprostorů $U + V$, $U^\perp + V$, $U + V^\perp$, $U^\perp + V^\perp$, $U \cap V$, $U^\perp \cap V$, $U \cap V^\perp$ a $U^\perp \cap V^\perp$.

(9) Buď $\cdot$ je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{C}^4$.
(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $V = \langle(1, 1 - i, 1 + i, 2 - 3i), (i + 1, -1, 1 + 2i, 2 - i)\rangle$,
(b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
(c) určete ortogonální projekci vektoru $(1+3i, 2-i, -1, 2i)$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
(d) je-li $U = \langle(i, -i, 2 + i, 1 - 3i), (1, 1, i, 2 + 3i)\rangle$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1 + i, 1, i, 2 - i) = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,

(10) Najděte přibližné řešení metodou nejmenších čtverců soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$ nad $\mathbf{R}$, jestliže
(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = (1, 0, 1, 1, 2)$
(b) $\mathbf{A}$ je jako v (a) a $\mathbf{y} = (2, 1, 0, 2, 1)$,
(c) $\mathbf{A}$ je jako v (a) a $\mathbf{y} = (2, 1, 0, 2, 0)$,
(d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = (2, 3, 0)$.