3. Vlastní čísla a vlastní vektory

3.1. Uvažujme endomorfismus φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2.

(a) Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory φ.
(b) rozhodněte, zda je φ diagonalizovatelný,
(c) existuje-li, najděte ortonormální bází $\mathbf{R}^2$ se standardním skalárním součinem, vůči níž má φ diagonální matici.

(a) Máme zjistit, pro která reálná (vlastní) čísla λ existuje nenulový (vlastní) vektor $\mathbf{v}$, aby $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$. To můžeme ekvivalentně vyjádřit ve tvaru $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, a v maticovém zápisu pro libovolnou bázi B prostoru $\mathbf{R}^2$ ve tvaru

$$([\varphi]_B - \lambda\mathbf{E})[v]_B^T = [(\varphi - \lambda \mathrm{Id})]_B [v]_B^T = [\mathbf{0}]_B^T = (0,0)^T.$$

Hledáme tedy všechna taková $\lambda \in \mathbf{R}$, pro něž existuje netriviální řešení homogenní soustavy rovnic se čtvercovou maticí $[(\varphi - \lambda\mathrm{Id})]_B$. To nastává právě tehdy, když je matice $[\varphi]_B - \lambda\mathbf{E}$ singulární. Spočítáme tedy nejprve vlastní čísla matice endomorfismu vzhledem k nějaké pevně zvolené bázi. Poznamenejme, že při tom nezáleží na volbě báze, ale je důležité, abychom počítali s maticí endomorfismu, tj. s maticí daného homomorfismu vzhledem k stejné bázi v definičním oboru i oboru hodnot. V našem případě budeme pracovat s maticí $[\varphi]_{K_2}$.

Určíme charkteristický polynom matice

$$det([\varphi]_{K_2} - \lambda\mathbf{E}) = (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

Vlastní čísla matice $[\varphi]_{K_2}$ jsou tedy právě kořeny charakteristického polynomu, tedy čísla 2 a 7. Dále budeme postupně dosazovat do matice $[\varphi]_{K_2} - \lambda\mathbf{E}$ vypočtená vlastní čísla a budeme hledat vlastní vektory matice $[\varphi]_{K_2}$, tedy nenulová řešení homogenních soustav rovnic s maticemi, která tvoří právě souřadnicové vektory vlastních vektorů endomorfismu φ:

$$[\varphi]_{K_2} - 2\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_2} - 7\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že všechny nenulové násobky vektoru $(-2,1)$ jsou vlastními vektory matice $[\varphi]_{K_2}$ příslušnými vlastnímu číslu 2 a všechny nenulové násobky vektoru $(1,2)$ jsou vlastními vektory matice $[\varphi]_{K_2}$ příslušnými vlastnímu číslu 7.

Konečně máme-li spočítané souřadnice vlastních vektorů $[\mathbf{v}]_{K_2}$ vzhledem ke kanonické bázi, okamžitě vidíme, že množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2 tvoří $\langle(-2,1)\rangle - \{(0,0)\}$ a množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 7 tvoří $\langle(1,2)\rangle - \{(0,0)\}$.

(b) Uvážíme-li, že máme dvě různá vlastní čísla endomorfismu na prostoru dimenze 2, víme, že jde o diagonalizovatelný endomorfismus. Protože jsme v (a) našli vlastní vektory stačí vzít bázi $M = ((-2,1),(1,2))$, abychom dostali matici $[\varphi]_M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi M.

(c) Protože je matice $[\varphi]_{K_2}$ symetrická, jde o unitárně diagonalizovatelnou matici, tedy víme, že požadovaná ortonormální báze existuje. Snando nahlédneme, že $B = (\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2))$ je ortonormální báze prostoru $\mathbf{R}^2$ se standardním skalárním součinem a $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Na závěr poznamenejme, že bází s požadovanými vlastnostmi existuje právě osm: $(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1), \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2))$ a $(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1))$ $\square$

3.2. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a rozhodněte, zda je (ortogonálně) diagonalizovatelná.

Předně si všimněme, že je matice $\mathbf{A}$ reálná symetrická, proto ortogonálně diagonalizovatelná, což nám usnadní výpočet vlastních čísel a vektorů.

Nejprve určíme vlastní čísla. Mohli bychom standardně spočítat charakteristický polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ a najít jeho kořeny. V našem případě je ovšem snadné uhádnout vlastní číslo 1, protože matice $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je zjevně singulární. Vyřešíme-li homogenní soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E}$ dostaneme všechny příslušné vlastní vektory $\mathbf{v}_1$, tedy $\mathbf{v}_1 \in \langle(-1,1,0), (-1,0,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$. Protože je $\mathbf{A}$ ortogonálně diagonalizovatelná, víme, že další vlastní vektor musí být kolmý na vektory příslušné vlastnímu číslu 1, tedy musí ležet v podprostoru $\langle(-1,1,0), (-1,0,1)\rangle^\perp = \langle(1,1,1)\rangle$. Proto $(1,1,1)$ musí být vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ a spočítáme-li součin $\mathbf{A}\cdot(1,1,1)^T = (4,4,4)^T$, dostáváme druhé (a poslední) vlastní číslo 4. Zopakujme, že $\mathbf{v}_4$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 4, právě když $\mathbf{v}_4 \in \langle(1,1,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, tedy, že $\langle(1,1,1)\rangle$ je množina všech řešení homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Na závěr poznamenejme, že spektrum $\sigma(\mathbf{A}) = \{1,1,4\}$ a že z nalezených vlastních čísel a dimenzí podprostorů vlastních vektorů (tzv. geometrické násobnosti) můžeme zjistit, že charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$. $\square$

3.3. Mějme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

(a) Najděte (nad $\mathbf{Z}_5$) všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A}$,
(b) dokažte, že je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná,
(c) najděte regulární matici $\mathbf{P}$ nad $\mathbf{Z}_5$, pro niž je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ diagonální.

(a) Nejprve hledáme nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ kořeny polynomu $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2$. Prostým dosazením, zjistíme, že $p(1) = 0$ a $p(2) = 0$, tedy vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou právě 1 a 2. Dále řešíme homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E}$ $\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zřejmě například vektory $(1,0,1)$ a $(0,1,0)$ tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 a vektor $(1,3,4)$ tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2.

27./28.4.

(b) Uvážíme-li, že posloupnost $M = ((1,0,1),\ (0,1,0),\ (1,3,4))$ je báze $\mathbf{Z}_5$, vidíme, že je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná.

(c) Interpretujeme-li matici $\mathbf{A}$ jako matici endomorfismu φ zhledem ke kanonické bázi a vezmeme-li matici přechodu $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_3}$, pak vidíme, že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = [\mathrm{Id}]_{K_3B}[\varphi]_{K_3}[\mathrm{Id}]_{BK_3} = [\varphi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tedy zjistili jsme, že $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. □

3.4. Nechť ψ je endomorfismus na vektorové prostoru $\mathbf{R}^3$ nad tělesem reálných čísel daný předpisem $\psi(x,y,z) = (x+2y+z, 2x-y+2z, -2y)$.

(a) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory endomorfismu ψ,
(b) existuje-li, najděte bázi B, vůči níž ma endomorfismus ψ diagonální matici,
(c) najděte matici endomorfismů ψ^{11} a ψ^{154} vzhledem ke kanonické bázi,
(d) určete vlastní čísla a všechny vlastní vektory endomorfismu ψ^8.

(a) Nejprve snadno určíme matici endomorfismu $[\psi]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3 a poté najdeme její vlastní čísla. Máme tři různá vlastní čísla 0, 1 a -1. Vyřešíme-li soustavy s maticemi $[\psi]_{K_3} + 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $[\psi]_{K_3} - 0\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $[\psi]_{K_3} - 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. najdeme právě všechny vlastní vektory $\langle(1,0,-1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\langle(3,1,-2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\langle(-2,1,2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(b) Posloupnost $B = ((-2,1,2),(1,0,-1),(3,1,-2))$ je tvořena vlastními vektory příslušnými různým vlastním číslům, tudíž jde o lineárně nezávislou posloupnost. Proto je B báze $\mathbf{R}^3$ a $[\psi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Uvědomíme-li si, že $[\psi^n]_B = [\psi]_B^n$, určíme snadno matice ψ^{11} a ψ^{154} vzhledem k bázi:

$$[\psi^{11}]_B = [\psi]_B^{11} = \begin{pmatrix} 1^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [\psi]_B,$$

$$[\psi^{154}]_B = [\psi]_B^{154} = \begin{pmatrix} 1^{154} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{154} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\psi^2]_B,$$

Tedy okamžitě vidíme, že $[\psi^{11}]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ a $[\psi^{154}]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 =$ $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

(d) Učiníme-li obdobnou úvahu jako v (c), vidíme, že matice $[\psi^n]_B = [\psi]_B^n$, a tedy i endomorfismus ψ^n má vlastní čísla λ^n pro vlastní čísla endomorfismu ψ, tedy ψ^8 práve vlastní čísla 0, 1. Je-li navíc $\mathbf{v}_\lambda$ vlastní vektor p $\psi(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda$, pak $\psi^n(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda^n\,\mathbf{v}_\lambda$, tedy $\langle(3,1,-2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\langle(-2,1,2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou vlastní vektory ψ^8 příslušné vlastnímu číslu 1 a $\langle(1,0,-1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou vlastní vektory ψ^8 příslušné vlastnímu číslu 0. Uvážíme-li, že s vlastními vektory příslušnými stejnému vlastnímu číslu jsou vlastními vektory i jejich lineární kombinace, pak. $\langle(1,0,-1)\rangle \cup \langle(3,1,-2),(-2,1,2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou právě všechny vlastní vektory endomorfismu ψ^8. $\square$

4.5.

3.5. Spočítejte $\mathbf{A}^{20}$, jestliže

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad $\mathbf{Z}_5$,

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{R}$,

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$.

Podobně jako v 3.4(c) uvážíme, že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^n$ pro libovolnou regulární matici $\mathbf{P}$, tedy $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^n\mathbf{P}^{-1}$.

(a) Využijeme-li hodnot spočítaných v 3.3(c), dostáváme

$$\mathbf{A}^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{PEP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Využijeme-li hodnoty hodnot spočítané v 3.4 a položíme $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, pak $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P} = [\psi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, proto

$$\mathbf{A}^{20} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

5.5.

(c) Indukcí nahlédneme, že $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & \binom{n}{1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, proto

$$\mathbf{A}^{20} = \begin{pmatrix}1 & \binom{20}{1}\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

□

3.6. Najděte reálnou ortogonální matici $\mathbf{U}$, pro níž je $\mathbf{U}^T \begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix} \mathbf{U}$ nad $\mathbf{R}$ diagonální.

Nejprve podobně jako v 3.2 určíme vlastní čísla jim příslušné vlastní vektory. Jedno vlastní číslo je zřejmě $\lambda = 3$ a vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A} - 3 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$ a dostaneme vlastní vektory $\mathbf{v}_1 \in \langle (-1,1,0), (-1,0,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, a protože další vlastní vektor musí být kolmý na vektory příslušné vlastnímu číslu 3, tj. leží v podprostoru $\langle (-1,1,0),(-1,0,1)\rangle^{\perp} = \langle (1,1,1)\rangle$, je jím například vektor $(1,1,1)$. Nyní spočítáme $\mathbf{A}(1,1,1)^T = (9,9,9)^T$, odkud dostáváme vlastnímu číslo $\lambda = 9$.

Nyní najdeme ortonormální báze obou podprostorů vlastních vektorů. Pro vlastní číslo 9 stačí normalizovat, abychom dostali vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ a pro $\lambda = 3$ najdeme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2))$ podprostoru $\langle (-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$ například Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. Nyní položme $B = (\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2))$. Protože je B ortonormální báze, je zřejmě matice přechodu $\mathbf{U} = [\mathrm{Id}]_{BK_3}$ ortogonální a

$$\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

□

3.7. Nechť je f symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ s maticí $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi. Najděte bázi B, která je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu ω a polární vzhledem k symetrické bilineární formě f.

Stačí nám vzít ortonormální bázi B z 3.6, o níž víme, že

$$[f]_B = [\mathrm{Id}]^T_{BK_3}[f]_{K_3}[\mathrm{Id}]_{BK_3} = \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

tedy B je polární báze f. □

3.8. Najděte polární bázi symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$, která je ortonormální vzhledem ke standardnnímu skalárnímu součinu, jestliže $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Postupujeme stejně jako v úlohách 3.6 a 3.7. Nejprve standardním způsobem najdeme spektrun matice $[g]_{K_3}$, tedy $\sigma([g]_{K_3}) = \{1, 1, 7\}$. Pro vlastní číslo 1 najdeme podprostor vlastních vektorů $V_1 = \langle (1, -1, 0), (2, 0, -1) \rangle$ a pro vlastní číslo 7 tvoří podprostor vlastních vektorů $V_7 = \langle (1, 1, 2) \rangle$. Zbývá nám například pomocí Grammovy-Schmidtovy ortogonalizace najít ortonormální bázi V_1 (tedy například $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1))$ a normalizovat vektor $(1, 1, 2)$. Nyní je $M = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2))$ ortonormální bází $\mathbf{R}^3$, která je zároveň polární vzhledem ke g. Závěrem poznamenejme, že $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ □

11.5.

4. Jordanův kanonický tvar

4.1. Buď $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem komplexních čísel.

(a) Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$,
(b) najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$,
(c) rozhodněte, které dvojice matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$ jsou podobné.

(a) Obvyklým způsobem snadno zjistíme, že charakteristický polynom matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ je $(\lambda - 2)^2$ a charakteristický polynom matice $\mathbf{K}$ je $(\lambda - 2)(\lambda - 1)$, proto $\sigma(\mathbf{M}) = \{2, 2\}$, $\sigma(\mathbf{N}) = \{2, 2\}$ a $\sigma(\mathbf{K}) = \{1, 2\}$. Nyní vyřešíme homogení soustavy rovnic s maticemi $\mathbf{M} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} - 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{K} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ Tedy množina vlastních vektorů matice $\mathbf{M}$ je $\langle (1, -1) \rangle \setminus \{(0, 0)\}$, množina vlastních vektorů matice $\mathbf{N}$ je $\langle (1, 1) \rangle \setminus \{(0, 0)\}$ a množina vlastních vektorů matice $\mathbf{K}$ je $\langle (0, 1) \rangle \cup \langle (2, 3) \rangle \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Víme, že Jordanův kanonický tvar matice má na diagonále právě hodnoty spektra a nad diagonálou nuly nebo jedničky. Přitom různá vlastní čísla určují různé Jordanovy buňky, proto je matice $\mathbf{K}$ diagonalizovatelná, a proto podobná Jordanově matici $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ mohou být podobné pouze Jordanovým maticím $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, Podobnost s první z nich by ovšem znamenala, že je matice $\mathbf{M}$ či $\mathbf{N}$ diagonalizovatelná, zatímco v (a) jsme zjistili, že vlastní vektory ani matice $\mathbf{M}$ ani matice $\mathbf{N}$ netvoří bázi, tedy matice diagonalizovatelné nejsou. Tedy je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ roven právě Jordanově buňce $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Víme, že dvě podobné matice mají nutně stejná spektra, tedy matice $\mathbf{K}$ není podobná matici $\mathbf{M}$ ani $\mathbf{N}$. Na druhou stranu, dvě matice se stejným Jordanovým kanonickým tvarem jsou podobné, tedy $\mathbf{M} \sim \mathbf{N}$ $\square$

4.2. Najděte Jordanův kanonický tvar a zjistěte, zda jsou si podobné, komplexní matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

U obou matic snadno zjistíme, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3$ Obě tedy mají stejné spektrum a musí být podobné jedné z následujících matic v Jordanově kanonickém tvaru:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnost s maticí $\mathbf{J}_1 = \mathbf{E}$ by znamenala, že je matice diagonalizovatelná, což zjevně ani pro $\mathbf{A}$ ani $\mathbf{B}$ neplatí. Uvědomme si, že podprostor vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$ ani $\mathbf{B}$ musí mít stejnou dimenzi jako podprostor vlastních vektorů jejich Joradnova normálníhoo tvaru matice. Tedy matice $\mathbf{A}-\mathbf{E}$ respektive $\mathbf{B}-\mathbf{E}$ musí mít stejnou hodnost jako matice $\mathbf{J}_i - \mathbf{E}$ pro příslušný Jordanův normální tvar matice. Protože $h(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2$ a $h(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = 1$, je matice $\mathbf{A}$ nutně podobná Jordanově matici $\mathbf{J}_3$ a matice $\mathbf{B}$ je podobná Jordanově matici $\mathbf{J}_2$. Z Jordanovy věty potom plyne, že matice $\mathbf{J}_2$ a $\mathbf{J}_3$ nejsou podobné, proto nejsou podobné ani matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. $\square$

19.5.

4.3. Najděte regulární matici $\mathbf{P}$ nad tělesem komplexních čísel, pro níž platí, že $\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Využijeme údaje, které jsme o matici $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ zjistili v 4.1.

Označme φ endomorfismus na prostoru $\mathbf{C}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \mathbf{M}$ vzhledem ke kanonické bázi. Podobně jako u úloh týkajících se diagonalizovatelnosti můžeme problém převést na otázku nalezení báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ vůči níž bude mít matice endomorfismu φ Jordanův kanonický tvar, tj $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. To ovšem znamená, že $\varphi(\mathbf{v}_1) = 2\,\mathbf{v}_1$ a $\varphi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2$. Odtud okamžitě vidíme, že vektor $\mathbf{v}_1$ je právě vlastním vektorem matice $\mathbf{M}$, zvolme například vektor $(1,-1)$ a druhý vektor $\mathbf{v}_2$ dostaneme jako řešení nehomogenní soustavy rovnic $(\mathbf{M} - 2\mathbf{E})\,\mathbf{v}_2^T = \mathbf{v}_1^T$ s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{array}\right)$. Vidíme, že soustavu řeší například vektor $(\frac{1}{3}, 0)$, našli jsme tak hledanou matici $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

20.5.

4.4. Mějme komplexní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$,
(b) spočítejte $\mathbf{G}^{50}$,
(c) existuje-li, najděte přirozené n, pro které $\mathbf{H}^n = \mathbf{0}$.

(a) Opět nejprve spočítáme charakteristické polynomy $\det(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}) = -(\lambda+1)^3$ a $\det(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3$, tedy $\sigma(\mathbf{G}) = \{-1, -1, -1\}$ a $\sigma(\mathbf{H}) = \{0, 0, 0\}$. Nyní stejně jako v 4.2 využijeme pozorování, že pro dvě podobné matice $h(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = h(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E})$ $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ platí, že $h(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = h(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$ pro každá skalár λ, speciálně pro vlastní čísla. Protože $h(\mathbf{G} + \mathbf{E}) = 2$ a $h(\mathbf{H}) = 2$, dostáváme

$$\mathbf{G} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Známe-li Jordanův normální tvar $\mathbf{J}$ matice $\mathbf{G}$ a spočítáme-li regulární matici $\mathbf{P}$, pro kterou $\mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ $\mathbf{G}^{50} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{50}\mathbf{P}^{-1}$, zbyde nám proto určit $\mathbf{J}^{50}$.

Matici $\mathbf{P}$ spočítáme stejným způsobem jako v 4.3. Tedy hledáme nejdřív vlastní vektor $\mathbf{v}_1$, tj. vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí $\mathbf{G} + \mathbf{E}$ a poté řešíme nehomogenní soustavy rovnic $(\mathbf{G} + \mathbf{E})\,\mathbf{v}_2^T = \mathbf{v}_1^T$ a $(\mathbf{G} + \mathbf{E})\,\mathbf{v}_3^T = \mathbf{v}_2^T$ (A+E)v3=v2, tedy postupně hledáme řešení soustav s maticemi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že například $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(1, 1, 0)$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}(2, -1, 0)$. Tyto vektory sepíšeme do matice přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ od kanonické bázi k bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ a obvyklým způsobem určíme inverzní matici $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Dále určíme podobně jako v 3.5(c) hodnotu $\mathbf{J}^{50} = \begin{pmatrix} (-1)^{50} & -\binom{50}{1} & \binom{50}{2} \\ 0 & (-1)^{50} & -\binom{50}{1} \\ 0 & 0 & (-1)^{50} \end{pmatrix}$.

Konečně zbývá dopočítat $\mathbf{G}^{50} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{50}\mathbf{P}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -50 & 1225 \\ 0 & 1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3576 & -3725 & 3575 \\ -50 & 51 & -50 \\ -3625 & 3775 & 3624 \end{pmatrix}.$$

(c) Uvažujeme stejně jako v (b), tedy uvědomíme si, že existuje regulární matice $\mathbf{Q}$, pro kterou $\mathbf{H}^n = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \mathbf{Q}^{-1}$ stačí nahlédnout, že $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \neq \mathbf{0}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \mathbf{0}$, tedy hledané minimální $n = 3$. □

4.5. Je-li φ endomorfismus na $\mathbf{C}^3$ s maticí $[\varphi]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3, najděte bázi, vůči níž má φ Jordanovu matici.

Nejprve musíme určit spektrum $\sigma(\varphi) = \{3, 3, 3\}$. Definujme $f = \varphi - 3\mathrm{Id}$. Určíme jádra $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Ker} f^2$. Nejprve spočítáme matice

$$[f]_{K_3} = [\varphi]_{K_3} - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, [f^2]_{K_3} = [f]^2_{K_3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a $[f^3]_{K_3} = [f]^3_{K_3} = \mathbf{0}$. Dále najdeme řešení homogenních soustav rovnic s danými maticemi, což budou právě jádra endomorfismů f, f^2 a f^2. Tedy $\operatorname{Ker} f^3 = \mathbf{C}^3$, $\operatorname{Ker} f^2 = \langle (0,1,0), (1,0,-1) \rangle$ a $\operatorname{Ker} f = \langle (1,0,-1) \rangle$. Zvolíme vektor doplňku $\operatorname{Ker} f^2$ v prostoru $\operatorname{Ker} f^3$, například $(1,0,0)$. Konečně spočítáme vektory $f(1,0,0) = (-1,1,1)$ a $f^2(1,0,0) = (-2,0,2)$ a položíme $B = ((-2,0,2), (-1,1,1), (1,0,0))$. Potom $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. □

Další úlohy

(1) Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory endomorfismu φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ a a rozhodněte, zda je φ diagonalizovatelný jestliže

$$\text{(a)}\quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)}\quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)}\quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

(e) $\varphi = \mathrm{Id}$, (f) $\varphi = 0$.

(2) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, a rozhodněte, zda je matice diagonalizovatelná

(3) Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ a existuje-li, najděte regulární matici $\mathbf{P}$, pro niž je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ diagonílní.

(4) Mějme komplexní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$,
(b) spočítejte $\mathbf{G}^5$ a $\mathbf{H}^5$,
(c) najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{GH}$ a $\mathbf{HG}$.

(5) Najděte polární bázi symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$, která je ortonormální vzhledem ke standardnnímu skalárnímu součinu, jestliže

(a) $n = 3$ a $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,
(b) $n = 3$ a $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
(c) $n = 8$ a $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 1 + \delta_{ij}$,
(d) $n = 4$ a $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = i + j$.