## 1.**Lineární kódy**

Každou neprázdnou množinu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ nazveme *(binárním blokovým) kódem*. Řeknem, že $\mathcal{C}$ je *lineární kód* délky $n$ a dimenze $k$, je-li $\mathcal{C}$ podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^n$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ a $\dim \mathcal{C} = k$.

1.**Lineární kódy**

Každou neprázdnou množinu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ nazveme *(binárním blokovým) kódem*. Řeknem, že $\mathcal{C}$ je *lineární kód* délky $n$ a dimenze $k$, je-li $\mathcal{C}$ podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^n$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ a $\dim \mathcal{C} = k$.

Nechť $\mathcal{C}$ je lineární kód délky $n$ a dimenze $k$. Řekneme, že matice $\mathbf{C}$ typu $(k, n)$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ je *generující maticí* kódu $\mathcal{C}$, jestliže řádky matice $\mathbf{C}$ tvoří bázi lineárního kódu $\mathcal{C}$. Řekneme, že matice $\mathbf{D}$ typu $(n, n-k)$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ je *kontrolní maticí* kódu $\mathcal{C}$, platí-li, že $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ právě tehdy, když $\mathbf{v}\,\mathbf{D} = \mathbf{0}$ (tj. $\mathcal{C}$ je právě množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{D}^T$).

## 1.**Lineární kódy**

Každou neprázdnou množinu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ nazveme *(binárním blokovým) kódem*. Řeknem, že $\mathcal{C}$ je *lineární kód* délky $n$ a dimenze $k$, je-li $\mathcal{C}$ podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^n$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ a $\dim \mathcal{C} = k$.

Nechť $\mathcal{C}$ je lineární kód délky $n$ a dimenze $k$. Řekneme, že matice **C** typu $(k, n)$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ je *generující maticí* kódu $\mathcal{C}$, jestliže řádky matice **C** tvoří bázi lineárního kódu $\mathcal{C}$. Řekneme, že matice **D** typu $(n, n-k)$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ je *kontrolní maticí* kódu $\mathcal{C}$, platí-li, že $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ právě tehdy, když $\mathbf{v}\,\mathbf{D} = \mathbf{0}$ (tj. $\mathcal{C}$ je právě množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{D}^T$).

**Poznámka (1.1)**

Nechť $\mathcal{C}$ je lineární kód délky $n$ a dimenze $k$, **C** je jeho generující a **D** kontrolní matice. Mějme **P** regulární matici stupně $k$ a **Q** regulární matici stupně $n-k$. Pak **PC** a **DQ** jsou rovněž generující a kontrolní maticí lineárního kódu $\mathcal{C}$.

## Věta (1.2)

*Nechť* $\mathbf{C}$ *je matice typu* $(k, n)$ *a* $\mathbf{D}$ *matice typu* $(n, n-k)$ *obě nad tělesem* $\mathbb{Z}_2$*. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{D}$ *jsou generující a kontrolní maticí nějakého lineárního kódu,*

(2) $h(\mathbf{C}) = k$, $h(\mathbf{D}) = n - k$ *a* $\mathbf{CD} = \mathbf{0}$.

**Věta (1.2)**

*Nechť* **C** *je matice typu* $(k, n)$ *a* **D** *matice typu* $(n, n-k)$ *obě nad tělesem* $\mathbb{Z}_2$*. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) **C** *a* **D** *jsou generující a kontrolní maticí nějakého lineárního kódu,*

(2) $h(\mathbf{C}) = k$, $h(\mathbf{D}) = n - k$ *a* $\mathbf{CD} = \mathbf{0}$.

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_2^n$. *(Hammingovou) vzdáleností* slov **u** a **v** budeme rozumět počet souřadnic, v nichž se obě slova liší. *(Hammingovou) váhou* slova $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_2^n$ nazveme počet souřadnic slova **u** rovných jedné. Vzdálenost slov **u** a **v** budeme značit $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a váhu slova **u** označujme $wt(\mathbf{u})$. Konečně *(Hammingovou) vzdáleností* kódu $\mathcal{C}$ obsahujícího alespoň dvě slova budeme rozumět číslo $d(\mathcal{C}) = \min\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) | \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\}$.

## Poznámka (1.3)

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^n$.

(a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = wt(\mathbf{u} + \mathbf{v})$,

(b) $wt(\mathbf{u}) \leq n$,

(c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, právě když $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,

(d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,

(e) $wt(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq wt(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + wt(\mathbf{w} + \mathbf{v})$,

(f) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

## Poznámka (1.3)

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^n$.

(a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = wt(\mathbf{u} + \mathbf{v})$,
(b) $wt(\mathbf{u}) \leq n$,
(c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, právě když $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,
(d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,
(e) $wt(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq wt(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + wt(\mathbf{w} + \mathbf{v})$,
(f) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

## Poznámka (1.4)

Buď $\mathcal{C}$ lineární kód obsahující alespoň dvě slova. Potom $d(\mathcal{C}) = min\{wt(\mathbf{u}) |\ \mathbf{u} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}\}$.

## Poznámka (1.3)

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^n$.

(a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = wt(\mathbf{u} + \mathbf{v})$,
(b) $wt(\mathbf{u}) \leq n$,
(c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, právě když $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,
(d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,
(e) $wt(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq wt(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + wt(\mathbf{w} + \mathbf{v})$,
(f) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

## Poznámka (1.4)

Buď $\mathcal{C}$ lineární kód obsahující alespoň dvě slova. Potom $d(\mathcal{C}) = min\{wt(\mathbf{u}) | \ \mathbf{u} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}\}$.

## Věta (1.5)

*Nechť* $\mathbf{D}$ *je kontrolní matice lineárního kódu* $\mathcal{C}$ *dimenze n. Pak* $d(\mathcal{C}) = d$*, právě když existuje d lineárně závislých řádků matice* $\mathbf{D}$ *a každých* $d - 1$ *řádků matice* $\mathbf{D}$ *je lineárně nezávislých.*

Mějme lineární kód $\mathcal{C}$ délky $n$. Řekneme, že kód $\mathcal{C}$ *dokáže odhalit $t$ chyb*, pokud pro každé slovo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ a pro každé nenulové slovo $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^n$ splňující podmínku $wt(\mathbf{e}) \leq t$ platí, že slovo $\mathbf{v} + \mathbf{e}$ neleží v kódu $\mathcal{C}$. Řekneme, že kód $\mathcal{C}$ *dokáže opravit $t$ chyb*, pokud pro všechna navzájem různá slova $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{C}$ a pro každé $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^n$ splňující podmínku $wt(\mathbf{e}) \leq t$ platí, že $d(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{e}) < d(\mathbf{v} + \mathbf{e}, \mathbf{w})$.

Mějme lineární kód $\mathcal{C}$ délky $n$. Řekneme, že kód $\mathcal{C}$ *dokáže odhalit $t$ chyb*, pokud pro každé slovo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ a pro každé nenulové slovo $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^n$ splňující podmínku $wt(\mathbf{e}) \leq t$ platí, že slovo $\mathbf{v} + \mathbf{e}$ neleží v kódu $\mathcal{C}$. Řekneme, že kód $\mathcal{C}$ *dokáže opravit $t$ chyb*, pokud pro všechna navzájem různá slova $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{C}$ a pro každé $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^n$ splňující podmínku $wt(\mathbf{e}) \leq t$ platí, že $d(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{e}) < d(\mathbf{v} + \mathbf{e}, \mathbf{w})$.

Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí pro každé reálné číslo $x$ jeho celou část, tj. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ a $x - \lfloor x \rfloor \in \langle 0, 1)$.

Mějme lineární kód $\mathcal{C}$ délky $n$. Řekneme, že kód $\mathcal{C}$ *dokáže odhalit $t$ chyb*, pokud pro každé slovo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ a pro každé nenulové slovo $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^n$ splňující podmínku $wt(\mathbf{e}) \leq t$ platí, že slovo $\mathbf{v} + \mathbf{e}$ neleží v kódu $\mathcal{C}$. Řekneme, že kód $\mathcal{C}$ *dokáže opravit $t$ chyb*, pokud pro všechna navzájem různá slova $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{C}$ a pro každé $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_2^n$ splňující podmínku $wt(\mathbf{e}) \leq t$ platí, že $d(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{e}) < d(\mathbf{v} + \mathbf{e}, \mathbf{w})$.

Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí pro každé reálné číslo $x$ jeho celou část, tj. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ a $x - \lfloor x \rfloor \in \langle 0, 1)$.

**Věta (1.6)**

*Mějme lineární kód $\mathcal{C}$ délky $n$ a vzdálenosti $d$. Pak $\mathcal{C}$ dokáže odhalit $d - 1$ chyb a opravit $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ chyb. Navíc $\mathcal{C}$ nedokáže odhalit $d$ chyb a opravit $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1$ chyb.*

## 2.**Bilineární a kvadratické formy**

Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$. Řekneme, že zobrazení $f : V \times V \to T$ je *bilineární forma*, platí-li pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ podmínky:

(1) $f(a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = a \cdot f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b \cdot f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
(2) $f(\mathbf{w}, a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}) = a \cdot f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + b \cdot f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

## 2.**Bilineární a kvadratické formy**

Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$. Řekneme, že zobrazení $f : V \times V \to T$ je *bilineární forma*, platí-li pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ podmínky:

(1) $f(a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = a \cdot f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b \cdot f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
(2) $f(\mathbf{w}, a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}) = a \cdot f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + b \cdot f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

### Poznámka (2.1)

Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$ a nechť f je zobrazení $f : V \times V \to T$. Definujme pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ zobrazení $f(\mathbf{v}, -) : V \to T$, které vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí hodnotu $f(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ a obdobně definujme zobrazení $f(-, \mathbf{v}) : V \to T$ přiřazující vektoru $\mathbf{x} \in V$ hodnotu $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Pak je $f$ bilineární formou právě tehdy, když $f(\mathbf{v}, -)$ i $f(-, \mathbf{v})$ jsou lineární formy pro všechny vektory $\mathbf{v} \in V$.

Nechť $V$ je konečně dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $T$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ jeho báze a $f : V \times V \to T$ bilineární forma. Matici $[f]_{(\mathbf{u}_i)} = (a_{ij})$ nazveme *maticí bilineárního zobrazení f vzhledem k bázi* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, pokud $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, kde $i, j \leq n$.

Nechť $V$ je konečně dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $T$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ jeho báze a $f : V \times V \to T$ bilineární forma. Matici $[f]_{(\mathbf{u}_i)} = (a_{ij})$ nazveme *maticí bilineárního zobrazení f vzhledem k bázi* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, pokud $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, kde $i, j \leq n$.

## Věta (2.2)

*Buď $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ báze $V$, $f : V \times V \to T$ bilineární forma a $[f]_{(\mathbf{u}_i)}$ její matice vyhledem k bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Potom $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \{\mathbf{v}\}_{(\mathbf{u}_i)}[f]_{(\mathbf{u}_i)}\{\mathbf{w}\}^T_{(\mathbf{u}_i)}$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.*

Nechť $V$ je konečně dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $T$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ jeho báze a $f : V \times V \to T$ bilineární forma. Matici $[f]_{(\mathbf{u}_i)} = (a_{ij})$ nazveme *maticí bilineárního zobrazení f vzhledem k bázi* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, pokud $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, kde $i, j \leq n$.

## Věta (2.2)

*Buď $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ báze $V$, $f : V \times V \to T$ bilineární forma a $[f]_{(\mathbf{u}_i)}$ její matice vyhledem k bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Potom $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \{\mathbf{v}\}_{(\mathbf{u}_i)}[f]_{(\mathbf{u}_i)}\{\mathbf{w}\}^{\mathrm{T}}_{(\mathbf{u}_i)}$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.*

## Věta (2.3)

*Mějme vektorový prostor $V$ konečné dimenze nad tělesem $T$ a nějakou bilineární formu $f : V \times V \to T$. Nechť $B$ a $C$ jsou dvě báze prostoru $V$ a $[\mathrm{Id}]_{CB}$ matice přechodu od báze $B$ k bázi $C$. Potom $[f]_C = [\mathrm{Id}]^{\mathrm{T}}_{CB}[f]_B[\mathrm{Id}]_{CB}$.*

## Poznámka (2.4)

Pro každou bázi $B$ vektorového prostoru $V$ dimenze $n$ a každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ stupně $n$ existuje právě jedna bilineární forma, pro níž $\mathbf{A} = [f]_B$.

## Poznámka (2.4)

Pro každou bázi $B$ vektorového prostoru $V$ dimenze $n$ a každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ stupně $n$ existuje právě jedna bilineární forma, pro níž $\mathbf{A} = [f]_B$.

## Poznámka (2.5)

Označme $B(V)$ množinu všech bilineárních forem na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$. Buď $f, g \in B(V)$ a $t \in T$. Definujme na $B(V)$:

$$(t \cdot f)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = t \cdot (f(\mathbf{v}, \mathbf{w})), \quad (f + g)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

pro všechna $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Potom množina všech bilineárních forem $B(V)$ spolu se zavedeným násobením skalárem a sčítáním tvoří vektorový prostor nad tělesem $T$. Je-li prostor $V$ konečné dimenze $n = \dim(V)$, je zobrazení $f \to [f]_B$ pro každou bázi prostoru $V$ izomorfismem $B(V)$ a vektorového prostoru všech čtvercových matic stupně $n$ nad tělesem $T$.

Řekneme, že je bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ *symetrická*, jestliže $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, a *antisymetrická*, jestliže $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Řekneme, že je bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ *symetrická*, jestliže $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, a *antisymetrická*, jestliže $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

## Poznámka (2.6)

Pro bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) f je (anti)symetrická,
(2) $\exists$ báze $B$ prostoru $V$, že $[f]_B$ je (anti)symetrická matice,
(3) $\forall$ bázi $B$ prostoru $V$ je $[f]_B$ je (anti)symetrická matice.

Řekneme, že je bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ *symetrická*, jestliže $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{w},\mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, a *antisymetrická*, jestliže $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -f(\mathbf{w},\mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$.

## Poznámka (2.6)

Pro bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) f je (anti)symetrická,
(2) $\exists$ báze $B$ prostoru $V$, že $[f]_B$ je (anti)symetrická matice,
(3) $\forall$ bázi $B$ prostoru $V$ je $[f]_B$ je (anti)symetrická matice.

## Poznámka (2.7)

Označme $BS(V)$ resp. $BA(V)$ množinu všech symetrických resp. antisymetrických bilineárních forem na prostoru $V$ nad tělesem $T$. Pak $BS(V)$ i $BA(V)$ jsou podprostory prostoru všech bilineárních forem $B(V)$. Jestliže $\mathrm{char}(T) \neq 2$, pak $BS(V) \cap BA(V) = \{0\}$.

## Věta (2.8)

*Je-li $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$ a $\mathrm{char}(T) \neq 2$, potom lze každou bilineární formu $f$ na $V$ jednoznačně zapsat ve tvaru $f = f_s + f_a$, kde $f_s$ je symetrická a $f_a$ antisymetrická bilineární forma.*

## Věta (2.8)

*Je-li $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$ a $\mathrm{char}(T) \neq 2$, potom lze každou bilineární formu $f$ na $V$ jednoznačně zapsat ve tvaru $f = f_s + f_a$, kde $f_s$ je symetrická a $f_a$ antisymetrická bilineární forma.*

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Řekneme, že báze $B$ prostoru $V$ je *polární bází* bilineární formy $f$, jestliže $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

## Věta (2.8)

*Je-li $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$ a $\mathrm{char}(T) \neq 2$, potom lze každou bilineární formu $f$ na $V$ jednoznačně zapsat ve tvaru $f = f_s + f_a$, kde $f_s$ je symetrická a $f_a$ antisymetrická bilineární forma.*

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Řekneme, že báze $B$ prostoru $V$ je *polární bází* bilineární formy $f$, jestliže $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

## Poznámka (2.9)

$B$ je polární báze bilineární formy $f$ na konečně dimenzionálním prostoru, právě když je $[f]_B$ diagonální matice.

## Věta (2.8)

*Je-li $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$ a $\mathrm{char}(T) \neq 2$, potom lze každou bilineární formu $f$ na $V$ jednoznačně zapsat ve tvaru $f = f_s + f_a$, kde $f_s$ je symetrická a $f_a$ antisymetrická bilineární forma.*

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Řekneme, že báze $B$ prostoru $V$ je *polární bází* bilineární formy $f$, jestliže $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

## Poznámka (2.9)

$B$ je polární báze bilineární formy $f$ na konečně dimenzionálním prostoru, právě když je $[f]_B$ diagonální matice.

## Věta (2.10)

*Buď $f$ nenulová symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$. Jestliže $\mathrm{char}(T) \neq 2$, existuje vektor $\mathbf{u} \in V$, pro nějž $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$.*

### Věta (2.11)

*Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$ a nechť $f$ je symetrická bilineární forma na $V$. Jestliže $\mathrm{char}(T) \neq 2$, pak $f$ je symetrická $\Leftrightarrow$ existuje nějaká polární báze $f$.*

## Věta (2.11)

*Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$ a nechť $f$ je symetrická bilineární forma na $V$. Jestliže $\mathrm{char}(T) \neq 2$, pak $f$ je symetrická $\Leftrightarrow$ existuje nějaká polární báze $f$.*

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. *Levým* (resp. *pravým*) *vrcholem* bilineární formy $f$ nazveme množinu $V_l(f) = \{\mathbf{u} \in V | \ \forall \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$ (resp. $V_p(f) = \{\mathbf{u} \in V | \ \forall \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0\}$).

## Věta (2.11)

*Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$ a nechť $f$ je symetrická bilineární forma na $V$. Jestliže $\mathrm{char}(T) \neq 2$, pak $f$ je symetrická $\Leftrightarrow$ existuje nějaká polární báze $f$.*

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. *Levým* (resp. *pravým*) *vrcholem* bilineární formy $f$ nazveme množinu $V_l(f) = \{\mathbf{u} \in V \mid \forall \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$ (resp. $V_p(f) = \{\mathbf{u} \in V \mid \forall \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0\}$).

## Poznámka (2.12)

Je-li $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$, pak $V_l(f)$ a $V_p(f)$ tvoří podprostory prostoru $V$.

## Poznámka (2.13)

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ a $B$ konečná báze $V$. Potom množina souřadnic vzhledem k bázi $B$ vektorů pravého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B |\ \mathbf{v} \in V_p(f)\}$ (resp. levého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B |\ \mathbf{v} \in V_l(f)\}$) je rovna právě množině všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[f]_B$ (resp. $[f]_B^T$).

### Poznámka (2.13)

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ a $B$ konečná báze $V$. Potom množina souřadnic vzhledem k bázi $B$ vektorů pravého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B \mid \mathbf{v} \in V_p(f)\}$ (resp. levého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B \mid \mathbf{v} \in V_l(f)\}$) je rovna právě množině všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[f]_B$ (resp. $[f]_B^T$).

### Důsledek (2.14)

Je-li $f$ bilineární forma na konečnědimenzionálním vektorovém prostoru $V$, pak $\dim(V_l(f)) = \dim(V_p(f)) = \dim(V) - h([f]_B)$ pro každou bázi $B$ prostoru $V$.

## Poznámka (2.13)

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ a $B$ konečná báze $V$. Potom množina souřadnic vzhledem k bázi $B$ vektorů pravého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B | \ \mathbf{v} \in V_p(f)\}$ (resp. levého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B | \ \mathbf{v} \in V_l(f)\}$) je rovna právě množině všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[f]_B$ (resp. $[f]_B^T$).

## Důsledek (2.14)

Je-li $f$ bilineární forma na konečnědimenzionálním vektorovém prostoru $V$, pak $\dim(V_l(f)) = \dim(V_p(f)) = \dim(V) - h([f]_B)$ pro každou bázi $B$ prostoru $V$.

*Nulitou* $n(f)$ bilineární formy $f$ na vektorovém prostoru $V$ nazveme číslo $\dim(V_l(f))$. Jestliže $n(f) = 0$ mluvíme o *regulární* bilineární formě $f$.

## Poznámka (2.13)

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ a $B$ konečná báze $V$. Potom množina souřadnic vzhledem k bázi $B$ vektorů pravého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B |\ \mathbf{v} \in V_p(f)\}$ (resp. levého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B |\ \mathbf{v} \in V_l(f)\}$) je rovna právě množině všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[f]_B$ (resp. $[f]_B^T$).

## Důsledek (2.14)

Je-li $f$ bilineární forma na konečnědimenzionálním vektorovém prostoru $V$, pak $\dim(V_l(f)) = \dim(V_p(f)) = \dim(V) - h([f]_B)$ pro každou bázi $B$ prostoru $V$.

*Nulitou* $n(f)$ bilineární formy $f$ na vektorovém prostoru $V$ nazveme číslo $\dim(V_l(f))$. Jestliže $n(f) = 0$ mluvíme o *regulární* bilineární formě $f$.

## Poznámka (2.15)

$V_l(f) = V_p(f)$ pro každou symetrickou bilineární formu $f$.

Buď $f$ symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Pak podprostor $V(f) = V_l(f) = V_p(f)$ nazveme *vrcholem* symetrické bilineární formy $f$.

Buď $f$ symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Pak podprostor $V(f) = V_l(f) = V_p(f)$ nazveme *vrcholem* symetrické bilineární formy $f$.

## Věta (2.16)

*Nechť $f$ je symetrická bilineární forma na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$ a $B$ polární báze $f$. Právě všechny vektory $\mathbf{u} \in B$ splňující podmínku $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ tvoří bázi vrcholu $V(f)$.*

Buď $f$ symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Pak podprostor $V(f) = V_l(f) = V_p(f)$ nazveme *vrcholem* symetrické bilineární formy $f$.

**Věta (2.16)**

*Nechť $f$ je symetrická bilineární forma na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$ a $B$ polární báze $f$. Právě všechny vektory $\mathbf{u} \in B$ splňující podmínku $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ tvoří bázi vrcholu $V(f)$.*

Mějme bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$. Zobrazení $f_2 : V \to T$ dané předpisem $f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ nazveme *kvadratickou formou* vytvořenou bilineární formou $f$.

Buď $f$ symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Pak podprostor $V(f) = V_l(f) = V_p(f)$ nazveme *vrcholem* symetrické bilineární formy $f$.

**Věta (2.16)**

*Nechť $f$ je symetrická bilineární forma na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$ a $B$ polární báze $f$. Právě všechny vektory $\mathbf{u} \in B$ splňující podmínku $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ tvoří bázi vrcholu $V(f)$.*

Mějme bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$. Zobrazení $f_2 : V \to T$ dané předpisem $f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ nazveme *kvadratickou formou* vytvořenou bilineární formou $f$.

**Poznámka (2.17)**

Pro každou antisymetrickou bilineární formu $g$ nad tělesem $T$ charakteristiky $\mathrm{char}(T) \neq 2$ je $g_2 = 0$.

## Poznámka (2.18)

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$, $\mathrm{char}(T) \neq 2$ a buď $f = f_s + f_a$ rozklad na symetrickou a antisymetrickou část podle Věty 2.8. Pak $f_s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - f_2(\mathbf{v}) - f_2(\mathbf{w}))$.

## Poznámka (2.18)

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$, $\mathrm{char}(T) \neq 2$ a buď $f = f_s + f_a$ rozklad na symetrickou a antisymetrickou část podle Věty 2.8. Pak $f_s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - f_2(\mathbf{v}) - f_2(\mathbf{w}))$.

## Věta (2.19)

*Pro každou kvadratickou formu $f_2$ na vektorovém prostor nad tělesem chrakteristiky různé od 2 vytvořenou bilineární formou $f$ existuje právě jedna symetrická bilineární forma $g$ tak, že $f_2(\mathbf{u}) = g_2(\mathbf{u})$ pro všechna $\mathbf{u} \in V$. Přitom $g = f_s$.*

## Poznámka (2.18)

Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$, $\mathrm{char}(T) \neq 2$ a buď $f = f_s + f_a$ rozklad na symetrickou a antisymetrickou část podle Věty 2.8. Pak $f_s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - f_2(\mathbf{v}) - f_2(\mathbf{w}))$.

## Věta (2.19)

*Pro každou kvadratickou formu $f_2$ na vektorovém prostor nad tělesem chrakteristiky různé od 2 vytvořenou bilineární formou $f$ existuje právě jedna symetrická bilineární forma $g$ tak, že $f_2(\mathbf{u}) = g_2(\mathbf{u})$ pro všechna $\mathbf{u} \in V$. Přitom $g = f_s$.*

*Maticí, polární bází a vrcholem kvadratické formy $f_2$* budeme nad tělesem s charakteristikou různou od 2 rozumět matici, polární bázi a vrchol příslušné symetrické bilineární formy $f_s$. Dále řekneme, že kvadratická forma $f_2$ je *regulární*, $f_s$ je-li regulární bilineární forma.

## Věta (Zákon setrvačnosti kvadratických forem, 2.20)

*Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$ a buď $B$ a $C$ dvě polární báze $f_2$. Pak*

(a) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž $f_2(\mathbf{w}) = 0$, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tj.* $n(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) = 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) = 0\}|$,

(b) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž $f_2(\mathbf{w}) > 0$, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tj.* $p(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) > 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) > 0\}|$,

(c) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž $f_2(\mathbf{w}) < 0$, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tj.* $q(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) < 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) < 0\}|$.

*Navíc* $n(f_2) + p(f_2) + q(f_2) = \dim(V)$

## Věta (Zákon setrvačnosti kvadratických forem, 2.20)

*Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$ a buď $B$ a $C$ dvě polární báze $f_2$. Pak*

(a) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž $f_2(\mathbf{w}) = 0$, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tj. $n(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) = 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) = 0\}|$,*

(b) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž $f_2(\mathbf{w}) > 0$, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tj. $p(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) > 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) > 0\}|$,*

(c) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž $f_2(\mathbf{w}) < 0$, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tj. $q(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) < 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) < 0\}|$.*

*Navíc $n(f_2) + p(f_2) + q(f_2) = \dim(V)$*

## Důsledek (2.21)

Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečnědimenzionálním vektorovém prostoru $V$. Pak $[f_2]_B$ a $[f_2]_C$ obsahují na diagonále pro každou dvojici polárních bází $B, C \in V$ stejné množství nul, kladných čísel s záporných čísel.

Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru. Vezměme nulitu $n(f_2)$ kvadratické formy $f_2$ a dále čísla $p(f_2)$ a $q(f_2)$ z Věty 2.20. Pak uspořádanou trojici $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ nazveme *signaturou* kvadratické formy $f_2$ a bilineární formy f.

Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru. Vezměme nulitu $n(f_2)$ kvadratické formy $f_2$ a dále čísla $p(f_2)$ a $q(f_2)$ z Věty 2.20. Pak uspořádanou trojici $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ nazveme *signaturou* kvadratické formy $f_2$ a bilineární formy f.

**Důsledek (klasické znění Zákona setrvačnosti kvadratických forem, 2.22)**

Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru, pak její signatura $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ nezávisí na volbě polární báze a $n(f_2) + p(f_2) + q(f_2) = \dim(V)$.

Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru. Vezměme nulitu $n(f_2)$ kvadratické formy $f_2$ a dále čísla $p(f_2)$ a $q(f_2)$ z Věty 2.20. Pak uspořádanou trojici $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ nazveme *signaturou* kvadratické formy $f_2$ a bilineární formy f.

**Důsledek (klasické znění Zákona setrvačnosti kvadratických forem, 2.22)**

Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru, pak její signatura $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ nezávisí na volbě polární báze a $n(f_2) + p(f_2) + q(f_2) = \dim(V)$.

**Poznámka (2.23)**

Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$. Pak existuje taková polární báze $B$, že $f_2(\mathbf{v}) \in \{-1, 0, 1\}$ pro každý $\mathbf{v} \in B$.

## Poznámka (2.24)

Nechť $V$ a $W$ jsou dva reálné konečně dimenzionální vektorové prostory, $f_2$ kvadratická forma na $V$ a $g_2$ kvadratická forma na $W$. Mají-li $f_2$ a $g_2$ stejnou signaturu, existuje takový izomorfismus $\varphi : V \to W$, že $f_2(\mathbf{v}) = g_2(\varphi(\mathbf{v}))$ pro každý $\mathbf{v} \in V$.

## Poznámka (2.24)

Nechť $V$ a $W$ jsou dva reálné konečně dimenzionální vektorové prostory, $f_2$ kvadratická forma na $V$ a $g_2$ kvadratická forma na $W$. Mají-li $f_2$ a $g_2$ stejnou signaturu, existuje takový izomorfismus $\varphi : V \to W$, že $f_2(\mathbf{v}) = g_2(\varphi(\mathbf{v}))$ pro každý $\mathbf{v} \in V$.

## Věta (Klasifikace kvadratických forem, 2.25)

*BuD $f_2$ kvadratická a $f_s$ příslušná symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $V$, $\dim(V) < \infty$ a $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ signatura.*

(1) $q(f_2) = 0$ *a* $n(f_2) = 0 \Rightarrow f_2(\mathbf{v}) > 0$ *pro každý nenulový* $\mathbf{v} \in V$ *($f_2$ resp. $f_s$* pozitivně definitní*),*

(2) $q(f_2) = 0$ *a* $n(f_2) > 0 \Rightarrow f_2(\mathbf{v}) \geq 0$ *pro každý* $\mathbf{v} \in V$ *($f_2$ resp. $f_s$* pozitivně semidefinitní*),*

(3) $p(f_2) = 0$ *a* $n(f_2) = 0 \Rightarrow f_2(\mathbf{v}) < 0$ *pro každý nenulový* $\mathbf{v} \in V$ *($f_2$ resp. $f_s$* negativně definitní*),*

(4) $p(f_2) = 0$ *a* $n(f_2) > 0 \Rightarrow f_2(\mathbf{v}) \leq 0$ *pro každý* $\mathbf{v} \in V$ *($f_2$ resp. $f_s$* negativně semidefinitní*).*

(5) $p(f_2) >, q(f_2) > 0 \Rightarrow \exists \mathbf{v} \in V \setminus V(f_2) : f_2(\mathbf{v}) = 0$ *(*indefinitní*).*

## 3.**Skalární součin**

V celé kapitole je těleso $T$ buď tělesem **reálných** nebo **komplexních** čísel. Jestliže $c = a + bi$ je komplexní číslo, kde $a, b \in \mathbf{R}$, budeme značit $\overline{c} = a - bi$ číslo komplexně sdružené. Je-li $c \in \mathbf{R}$, zřejmě $\overline{c} = c$.

## 3.**Skalární součin**

V celé kapitole je těleso $T$ buď tělesem **reálných** nebo **komplexních** čísel. Jestliže $c = a + bi$ je komplexní číslo, kde $a, b \in \mathbf{R}$, budeme značit $\overline{c} = a - bi$ číslo komplexně sdružené. Je-li $c \in \mathbf{R}$, zřejmě $\overline{c} = c$.

*Skalárním součinem* na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$ ($= \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$) nazveme zobrazení $g : V \times V \to T$ splňující pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ podmínky:

(1) $g(\mathbf{u}, a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}) = a \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
(2) $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{g(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$,
(3) $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}$ a $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$, navíc $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, právě když $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Dvojici $(V, g)$ nazveme (reálným nebo komplexním) *unitárním prostorem*.

## Poznámka (3.1)

Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ na unitárním prostoru $(V, g)$ platí:

(a) $g(a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \overline{a} \cdot g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \overline{b} \cdot g(\mathbf{w}, \mathbf{u})$,
(b) $g(a \cdot \mathbf{u}, a \cdot \mathbf{u}) = |a|^2 g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$,
(c) $g(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = g(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$.

## Poznámka (3.1)

Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ na unitárním prostoru $(V, g)$ platí:

(a) $g(a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \overline{a} \cdot g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \overline{b} \cdot g(\mathbf{w}, \mathbf{u})$,

(b) $g(a \cdot \mathbf{u}, a \cdot \mathbf{u}) = |a|^2 g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$,

(c) $g(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = g(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$.

## Věta (3.2)

*Buď $V$ reálný vektorový prostor a $g$ zobrazeni $V \times V \to \mathbf{R}$. Pak $g$ je skalárním součinem právě tehdy, když $g$ je pozitivně definitní symetrickou bilineární formou na $V$.*

## Poznámka (3.1)

Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ na unitárním prostoru $(V, g)$ platí:

(a) $g(a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \overline{a} \cdot g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \overline{b} \cdot g(\mathbf{w}, \mathbf{u})$,
(b) $g(a \cdot \mathbf{u}, a \cdot \mathbf{u}) = |a|^2 g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$,
(c) $g(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = g(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$.

## Věta (3.2)

*Buď $V$ reálný vektorový prostor a $g$ zobrazeni $V \times V \to \mathbf{R}$. Pak $g$ je skalárním součinem právě tehdy, když $g$ je pozitivně definitní symetrickou bilineární formou na $V$.*

Nechť $(V, g)$ je unitární prostor, potom zobrazení $\| - \|_g : V \to \mathbf{R}$ určené předpisem $\| \mathbf{v} \|_g = \sqrt{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ nazveme *normou* danou skalárním součinem $g$.

## Poznámka (3.3)

Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a skaláry $a \in T$ na unitárním prostoru $(V, g)$ platí:

(a) $\| \mathbf{v} \|_g \geq 0$ a $\| \mathbf{v} \|_g = 0$ právě když $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
(b) $\| a \mathbf{v} \|_g = |a| \cdot \| \mathbf{v} \|_g$,

## Poznámka (3.3)

Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a skaláry $a \in T$ na unitárním prostoru $(V, g)$ platí:

(a) $\| \mathbf{v} \|_g \geq 0$ a $\| \mathbf{v} \|_g = 0$ právě když $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
(b) $\| a\, \mathbf{v} \|_g = |a| \cdot \| \mathbf{v} \|_g$,

## Věta (3.4)

*Nechť $(V, g)$ je unitární prostor. Potom pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí:*

(a) $|g(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \| \mathbf{u} \|_g \| \mathbf{v} \|_g$ (Cachyho-Schwarzova nerovnost),
(b) $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_g \leq \| \mathbf{u} \|_g + \| \mathbf{v} \|_g$ (Trojúhelníková nerovnost).

## Poznámka (3.3)

Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a skaláry $a \in T$ na unitárním prostoru $(V, g)$ platí:

(a) $\| \mathbf{v} \|_g \geq 0$ a $\| \mathbf{v} \|_g = 0$ právě když $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
(b) $\| a\mathbf{v} \|_g = |a| \cdot \| \mathbf{v} \|_g$,

## Věta (3.4)

*Nechť $(V, g)$ je unitární prostor. Potom pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí:*

(a) $|g(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \| \mathbf{u} \|_g \| \mathbf{v} \|_g$ (Cachyho-Schwarzova nerovnost),
(b) $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_g \leq \| \mathbf{u} \|_g + \| \mathbf{v} \|_g$ (Trojúhelníková nerovnost).

Nechť $(V, g)$ je konečně dimenzionální unitární prostor a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze $V$. Matici $[g]_{(\mathbf{u}_i)} = (a_{ij})$ nazveme *maticí skalárního součinu g vzhledem k bázi* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, pokud $a_{ij} = g(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, kde $i, j \leq n$.

## Poznámka (3.5)

Buď $(V, g)$ unitární prostor a $B$ nějaká konečná báze $V$. Potom $[g]_B = \overline{[g]_B^T}$, dále $[g]_C = \overline{[\mathrm{Id}]_{CB}}^T [g]_B [\mathrm{Id}]_{CB}$ a $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\{\mathbf{v}\}_B} [g]_B \{\mathbf{w}\}_B^T$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

## Poznámka (3.5)

Buď $(V, g)$ unitární prostor a $B$ nějaká konečná báze $V$. Potom $[g]_B = \overline{[g]}_B^T$, dále $[g]_C = \overline{[\mathrm{Id}]_{CB}}^T [g]_B [\mathrm{Id}]_{CB}$ a $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\{\mathbf{v}\}}_B [g]_B \{\mathbf{w}\}_B^T$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Nechť $(V, g)$ je unitárním prostorem. Řekneme, že je posloupnost vektorů $B \subset V$ je *ortogonální*, pokud $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \; \forall \, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in B$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Ortogonální posloupnost $B$ nazveme *ortonormální*, jestliže $\forall \, \mathbf{u} \in B$ navíc $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ .

## Poznámka (3.5)

Buď $(V, g)$ unitární prostor a $B$ nějaká konečná báze $V$. Potom $[g]_B = \overline{[g]_B^T}$, dále $[g]_C = \overline{[\mathrm{Id}]_{CB}}^T [g]_B [\mathrm{Id}]_{CB}$ a $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\{\mathbf{v}\}_B} [g]_B \{\mathbf{w}\}_B^T$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Nechť $(V, g)$ je unitárním prostorem. Řekneme, že je posloupnost vektorů $B \subset V$ je *ortogonální*, pokud $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \; \forall \, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in B$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Ortogonální posloupnost $B$ nazveme *ortonormální*, jestliže $\forall \, \mathbf{u} \in B$ navíc $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ .

## Věta (Pythagorova věta, 3.6)

*Jsou-li dva vektory* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *unitárního prostoru* $(V, g)$ *ortogonální, pak* $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_g^2 = \| \mathbf{u} \|_g^2 + \| \mathbf{v} \|_g^2$. *V reálném vektorovém prostoru platí i opačná implikace.*

## Poznámka (3.5)

Buď $(V, g)$ unitární prostor a $B$ nějaká konečná báze $V$. Potom $[g]_B = \overline{[g]_B^{\mathrm{T}}}$, dále $[g]_C = \overline{[\mathrm{Id}]_{CB}}^{\mathrm{T}} [g]_B [\mathrm{Id}]_{CB}$ a $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\{\mathbf{v}\}_B} [g]_B \{\mathbf{w}\}_B^{\mathrm{T}}$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Nechť $(V, g)$ je unitárním prostorem. Řekneme, že je posloupnost vektorů $B \subset V$ je *ortogonální*, pokud $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \; \forall \, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in B$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Ortogonální posloupnost $B$ nazveme *ortonormální*, jestliže $\forall \, \mathbf{u} \in B$ navíc $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ .

## Věta (Pythagorova věta, 3.6)

*Jsou-li dva vektory* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *unitárního prostoru* $(V, g)$ *ortogonální, pak* $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_g^2 = \| \mathbf{u} \|_g^2 + \| \mathbf{v} \|_g^2$. *V reálném vektorovém prostoru platí i opačná implikace.*

## Poznámka (3.7)

Každá ortonormální posloupnost vektorů unitárního prostoru je lineárně nezávislá.

## Věta (3.8)

*Nechť* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je báze unitárního prostoru* $(V, g)$*. Potom existuje* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *ortonormální báze* $V$ *splňující podmínku* $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle$ *pro všechna* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

## Věta (3.8)

*Nechť* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je báze unitárního prostoru* $(V, g)$*.* *Potom existuje* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *ortonormální báze* $V$ *splňující podmínku* $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle$ *pro všechna* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

## Poznámka (3.9)

Buď $(V, g)$ unitární prostor konečné dimenze a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze $V$. Pak $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v})\, \mathbf{v}_i \;\forall\, \mathbf{v} \in V$.

## Věta (3.8)

*Nechť* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je báze unitárního prostoru* $(V, g)$*.*
*Potom existuje* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ *ortonormální báze* $V$ *splňující podmínku* $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle$ *pro všechna* $i = 1, 2, \dots, n$*.*

## Poznámka (3.9)

Buď $(V, g)$ unitární prostor konečné dimenze a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze $V$. Pak $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v})\, \mathbf{v}_i \ \forall\, \mathbf{v} \in V$.

## Poznámka (3.10)

Buď $(V, g)$ konečně dimenzionální unitární prostor. Pak báze $B \subset V$ je ortonormální právě tehdy, když $[g]_B = \mathbf{E}$.

## Věta (3.8)

*Nechť* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je báze unitárního prostoru* $(V, g)$*. Potom existuje* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ *ortonormální báze* $V$ *splňující podmínku* $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle$ *pro všechna* $i = 1, 2, \dots, n$*.*

## Poznámka (3.9)

Buď $(V, g)$ unitární prostor konečné dimenze a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze $V$. Pak $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v})\, \mathbf{v}_i \;\forall\, \mathbf{v} \in V$.

## Poznámka (3.10)

Buď $(V, g)$ konečně dimenzionální unitární prostor. Pak báze $B \subset V$ je ortonormální právě tehdy, když $[g]_B = \mathbf{E}$.

Nechť $(V, g)$ a $(V', g')$ jsou dva unitární prostory nad stejným tělesem (tj. buď nad **R** nebo **C**). Řekneme, že homomorfismus $\varphi : V \to V'$ je *unitární zobrazení*, jestliže $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g'(\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{w})) \;\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

## Poznámka (3.11)

Každé unitární zobrazení je prosté.

## Poznámka (3.11)

Každé unitární zobrazení je prosté.

## Věta (3.12)

*Nechť* $(V, g)$ *je unitární prostor konečné dimenze (nad tělesem* $T = \mathbf{R}$ *nebo* $\mathbf{C}$*) a* $B$ *je ortonormální báze* $V$*, položme* $n = \dim(V)$*. Pak zobrazení* $\varphi : V \to T^n$ *dané předpisem* $\varphi(\mathbf{u}) = \{\mathbf{u}\}_B$ *je unitární zobrazení na prostor* $(T^n, \omega)$*.*

## Poznámka (3.11)

Každé unitární zobrazení je prosté.

## Věta (3.12)

*Nechť* $(V, g)$ *je unitární prostor konečné dimenze (nad tělesem* $T = \mathbf{R}$ *nebo* $\mathbf{C}$*) a* $B$ *je ortonormální báze* $V$*, položme* $n = \dim(V)$*. Pak zobrazení* $\varphi : V \to T^n$ *dané předpisem* $\varphi(\mathbf{u}) = \{\mathbf{u}\}_B$ *je unitární zobrazení na prostor* $(T^n, \omega)$*.*

Buď $(V, g)$ unitární prostor a buď $M \subset V$. Množinu $M^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \forall \mathbf{u} \in M : \ g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$ nazveme *ortogonálním doplňkem* množiny $M$ v unitárním prostoru $(V, g)$.

## Poznámka (3.11)

Každé unitární zobrazení je prosté.

## Věta (3.12)

*Nechť* $(V, g)$ *je unitární prostor konečné dimenze (nad tělesem* $T = \mathbf{R}$ *nebo* $\mathbf{C}$*) a* $B$ *je ortonormální báze* $V$*, položme* $n = \dim(V)$*. Pak zobrazení* $\varphi : V \to T^n$ *dané předpisem* $\varphi(\mathbf{u}) = \{\mathbf{u}\}_B$ *je unitární zobrazení na prostor* $(T^n, \omega)$*.*

Buď $(V, g)$ unitární prostor a buď $M \subset V$. Množinu $M^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \forall\, \mathbf{u} \in M : \ g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$ nazveme *ortogonálním doplňkem* množiny $M$ v unitárním prostoru $(V, g)$.

## Poznámka (3.13)

Nechť $(V, g)$ je unitární prostor a $M$ podmnožina $V$. Potom $M^\perp$ je podprostor $V$ a platí, že $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$

## Věta (3.14)

*Nechť* $(V, g)$ *je unitární prostor a* $U$ *jeho podprostor konečné dimenze. Potom* $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ *a* $U + U^{\perp} = V$.

## Věta (3.14)

*Nechť* $(V, g)$ *je unitární prostor a* $U$ *jeho podprostor konečné dimenze. Potom* $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ *a* $U + U^{\perp} = V$*.*

## Poznámka (3.15)

Mějme $(V, g)$ unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze. Potom pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ existuje právě jeden vektor $P_U(\mathbf{v}) \in U$ a právě jeden vektor $P_U^{\perp}(\mathbf{v}) \in U^{\perp}$ tak, že $\mathbf{v} = P_U(\mathbf{v}) + P_U^{\perp}(\mathbf{v})$. Navíc obě zobrazení $P_U : V \to U$ i $P_U^{\perp} : V \to U^{\perp}$ jsou homomorfismy na (tj. epimorfismy), $P_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \,\forall\, \mathbf{u} \in U$ a $P_U^{\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \,\forall\, \mathbf{v} \in U^{\perp}$.

## Věta (3.14)

*Nechť* $(V, g)$ *je unitární prostor a* $U$ *jeho podprostor konečné dimenze. Potom* $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ *a* $U + U^{\perp} = V$.

## Poznámka (3.15)

Mějme $(V, g)$ unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze. Potom pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ existuje právě jeden vektor $P_U(\mathbf{v}) \in U$ a právě jeden vektor $P_U^{\perp}(\mathbf{v}) \in U^{\perp}$ tak, že $\mathbf{v} = P_U(\mathbf{v}) + P_U^{\perp}(\mathbf{v})$. Navíc obě zobrazení $P_U : V \to U$ i $P_U^{\perp} : V \to U^{\perp}$ jsou homomorfismy na (tj. epimorfismy), $P_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \; \forall \, \mathbf{u} \in U$ a $P_U^{\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \; \forall \, \mathbf{v} \in U^{\perp}$.

Homomorfismus $P_U$ z předchozí poznámky se nazývá *ortogonální projekcí* prostoru $V$ na podprostor $U$.

## Věta (3.14)

*Nechť $(V, g)$ je unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze. Potom $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ a $U + U^{\perp} = V$.*

## Poznámka (3.15)

Mějme $(V, g)$ unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze. Potom pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ existuje právě jeden vektor $P_U(\mathbf{v}) \in U$ a právě jeden vektor $P_U^{\perp}(\mathbf{v}) \in U^{\perp}$ tak, že $\mathbf{v} = P_U(\mathbf{v}) + P_U^{\perp}(\mathbf{v})$. Navíc obě zobrazení $P_U : V \to U$ i $P_U^{\perp} : V \to U^{\perp}$ jsou homomorfismy na (tj. epimorfismy), $P_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \; \forall \, \mathbf{u} \in U$ a $P_U^{\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \; \forall \, \mathbf{v} \in U^{\perp}$.

Homomorfismus $P_U$ z předchozí poznámky se nazývá *ortogonální projekcí* prostoru $V$ na podprostor $U$.

## Věta (3.16)

*Je-li $(V, g)$ unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze, pak $\| \mathbf{v} - P_U(\mathbf{v}) \|_g < \| \mathbf{v} - \mathbf{u} \|_g \; \forall \, \mathbf{u} \in U$, $\mathbf{u} \neq P_U(\mathbf{v})$.*

## 4. **Vlastní čísla a vlastní vektory**

Nad každým tělesem $T$ budeme pokládat za polynom zobrazení $p : T \to T$, které libovolnému prvku $t \in T$ přiřadí hodnotu $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, pro nějaké pevně zvolené skaláry $a_0, \dots, a_n \in T$. Kořenem polynomu budeme rozumět každé číslo $t_0 \in T$, pro které $p(t_0) = 0$. Všimněme si, že polynomy lze sčítat a násobit a výsledkem těchto operací je opět polynom.

## 4.**Vlastní čísla a vlastní vektory**

Nad každým tělesem $T$ budeme pokládat za polynom zobrazení $p : T \to T$, které libovolnému prvku $t \in T$ přiřadí hodnotu $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, pro nějaké pevně zvolené skaláry $a_0, \ldots, a_n \in T$. Kořenem polynomu budeme rozumět každé číslo $t_0 \in T$, pro které $p(t_0) = 0$. Všimněme si, že polynomy lze sčítat a násobit a výsledkem těchto operací je opět polynom.

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$ a $\mathbf{E}$ je jednotková matice stupně $n$. *Vlastním číslem matice* $\mathbf{A}$ nazveme každé $\lambda \in T$, pro nějž bude matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ singulární. Každé nenulové řešení $\mathbf{v}_\lambda \in T^n$ homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ potom budeme nazývat *vlastním vektorem* příslušným vlastnímu číslu $\lambda$. Množině $\sigma(\mathbf{A})$ všech vlastních čísel matice budeme říkat *spektrum* matice $\mathbf{A}$.

## 4.**Vlastní čísla a vlastní vektory**

Nad každým tělesem $T$ budeme pokládat za polynom zobrazení $p : T \to T$, které libovolnému prvku $t \in T$ přiřadí hodnotu $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, pro nějaké pevně zvolené skaláry $a_0, \dots, a_n \in T$. Kořenem polynomu budeme rozumět každé číslo $t_0 \in T$, pro které $p(t_0) = 0$. Všimněme si, že polynomy lze sčítat a násobit a výsledkem těchto operací je opět polynom.

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$ a $\mathbf{E}$ je jednotková matice stupně $n$. *Vlastním číslem matice* $\mathbf{A}$ nazveme každé $\lambda \in T$, pro nějž bude matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ singulární. Každé nenulové řešení $\mathbf{v}_\lambda \in T^n$ homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ potom budeme nazývat *vlastním vektorem* příslušným vlastnímu číslu $\lambda$. Množině $\sigma(\mathbf{A})$ všech vlastních čísel matice budeme říkat *spektrum* matice $\mathbf{A}$.

*Charakteristickým polynomem* matice $\mathbf{A}$ nazveme polynom $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$.

## Poznámka (4.1)

Buď **A** čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$. Pak je $\lambda$ vlastní číslo matice **A** a $\mathbf{v}_\lambda \in T^n$ jemu příslušný vlastní vektor právě tehdy, když $\mathbf{v}_\lambda \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_\lambda^T = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda^T$.

## Poznámka (4.1)

Buď $\mathbf{A}$ čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$. Pak je $\lambda$ vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{v}_\lambda \in T^n$ jemu příslušný vlastní vektor právě tehdy, když $\mathbf{v}_\lambda \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_\lambda^{\mathsf{T}} = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda^{\mathsf{T}}$.

## Poznámka (4.2)

Skalár $\lambda$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ právě tehdy, když je $\lambda$ kořenem charakteristického polynomu matice $\mathbf{A}$.

## Poznámka (4.1)

Buď $\mathbf{A}$ čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$. Pak je $\lambda$ vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{v}_\lambda \in T^n$ jemu příslušný vlastní vektor právě tehdy, když $\mathbf{v}_\lambda \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{A}\,\mathbf{v}_\lambda^\mathsf{T} = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda^\mathsf{T}$.

## Poznámka (4.2)

Skalár $\lambda$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ právě tehdy, když je $\lambda$ kořenem charakteristického polynomu matice $\mathbf{A}$.

## Poznámka (4.3)

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{P}$ jsou čtvercové matice stupně $n$ nad tělesem $T$, $\mathbf{P}$ je navíc regulární. Potom jsou charakteristické polynomy matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ stejné, a proto $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})$.

Nechť $\varphi$ je endomorfismus vektorového prostoru $V$ nad tělesem $T$. Řekneme, že $\lambda \in T$ je *vlastní číslo endomorfismu* $\varphi$, existuje-li nenulový vektor $\mathbf{v}_\lambda \in V$, pro který $\varphi(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda$. Vektor $\mathbf{v}_\lambda$ potom nazveme *vlastním vektorem endomorfismu* $\varphi$ příslušným vlastnímu číslu $\lambda$. Množině $\sigma(\varphi)$ všech vlastních čísel endomorfismu $\varphi$ budeme říkat *spektrum* endomorfismu $\varphi$.

Nechť $\varphi$ je endomorfismus vektorového prostoru $V$ nad tělesem $T$. Řekneme, že $\lambda \in T$ je *vlastní číslo endomorfismu* $\varphi$, existuje-li nenulový vektor $\mathbf{v}_\lambda \in V$, pro který $\varphi(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda \mathbf{v}_\lambda$. Vektor $\mathbf{v}_\lambda$ potom nazveme *vlastním vektorem endomorfismu* $\varphi$ příslušným vlastnímu číslu $\lambda$. Množině $\sigma(\varphi)$ všech vlastních čísel endomorfismu $\varphi$ budeme říkat *spektrum* endomorfismu $\varphi$.

**Věta (4.4)**

*Mějme $V$ konečně dimenzionální vektorový prostor, $\varphi$ nějaký endomorfismus na $V$ a $B$ libovolnou bázi $V$. Potom $\sigma(\varphi) = \sigma([\varphi]_B)$ a $\mathbf{v}$ je vlastní vektor endomorfismu $\varphi$ právě tehdy když $\{\mathbf{v}\}_B$ je vlastní vektor matice $[\varphi]_B$.*

Nechť $\varphi$ je endomorfismus vektorového prostoru $V$ nad tělesem $T$. Řekneme, že $\lambda \in T$ je *vlastní číslo endomorfismu* $\varphi$, existuje-li nenulový vektor $\mathbf{v}_\lambda \in V$, pro který $\varphi(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda \mathbf{v}_\lambda$. Vektor $\mathbf{v}_\lambda$ potom nazveme *vlastním vektorem endomorfismu* $\varphi$ příslušným vlastnímu číslu $\lambda$. Množině $\sigma(\varphi)$ všech vlastních čísel endomorfismu $\varphi$ budeme říkat *spektrum* endomorfismu $\varphi$.

## Věta (4.4)

*Mějme $V$ konečně dimenzionální vektorový prostor, $\varphi$ nějaký endomorfismus na $V$ a $B$ libovolnou bázi $V$. Potom $\sigma(\varphi) = \sigma([\varphi]_B)$ a $\mathbf{v}$ je vlastní vektor endomorfismu $\varphi$ právě tehdy když $\{\mathbf{v}\}_B$ je vlastní vektor matice $[\varphi]_B$.*

## Poznámka (4.5)

Buď $\varphi$ endomorfismus na prostoru $V$ konečné dimenze a buď $B$ báze $V$. Matice $[\varphi]_B$ je diagonální právě tehdy, když jsou všechny vektory báze $B$ vlastními vektory endomorfismu $\varphi$.

### Věta (4.6)

*Nechť* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *jsou různá vlastní čísla endomorfismu* $\varphi$ *na prostoru* $V$ *a* $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ *jsou po po řadě jim příslušné vlastní vektory. Potom je posloupnost vektorů* $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ *lineárně nezávislá.*

## Věta (4.6)

*Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla endomorfismu $\varphi$ na prostoru $V$ a $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ jsou po po řadě jim příslušné vlastní vektory. Potom je posloupnost vektorů $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ lineárně nezávislá.*

Řekneme, že dvě čtvercové matice **A** a **B** stupně $n$ nad tělesem $T$ jsou *podobné* (značíme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$), existuje-li regulární matice **P** stupně $n$ nad tělesem $T$, pro kterou $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$.

## Věta (4.6)

*Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla endomorfismu $\varphi$ na prostoru $V$ a $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ jsou po po řadě jim příslušné vlastní vektory. Potom je posloupnost vektorů $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ lineárně nezávislá.*

Řekneme, že dvě čtvercové matice **A** a **B** stupně $n$ nad tělesem $T$ jsou *podobné* (značíme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$), existuje-li regulární matice **P** stupně $n$ nad tělesem $T$, pro kterou $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$.

## Poznámka (4.7)

Jestliže $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B})$.

## Věta (4.6)

*Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla endomorfismu $\varphi$ na prostoru $V$ a $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ jsou po po řadě jim příslušné vlastní vektory. Potom je posloupnost vektorů $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ lineárně nezávislá.*

Řekneme, že dvě čtvercové matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stupně $n$ nad tělesem $T$ jsou *podobné* (značíme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$), existuje-li regulární matice $\mathbf{P}$ stupně $n$ nad tělesem $T$, pro kterou $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$.

## Poznámka (4.7)

Jestliže $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B})$.

## Poznámka (4.8)

Relace podobnosti je ekvivalencí na množině všech čtvercových matice stupně $n$ nad tělesem $T$.

## Poznámka (4.9)

Nechť $\varphi$ je endomorfismus na prostoru $V$ konečné dimenze $n$, $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ a $B$ je báze $V$. Pak matice $[\varphi]_B$ a $\mathbf{A}$ jsou podobné právě tehdy, když existuje báze $C$ prostoru V tak, že $[\varphi]_C = \mathbf{A}$.

## Poznámka (4.9)

Nechť $\varphi$ je endomorfismus na prostoru $V$ konečné dimenze $n$, **A** je čtvercová matice stupně $n$ a $B$ je báze $V$. Pak matice $[\varphi]_B$ a **A** jsou podobné právě tehdy, když existuje báze $C$ prostoru V tak, že $[\varphi]_C = \mathbf{A}$.

Řekneme, že endomorfismu $\varphi$ na prostoru $V$ konečné dimenze je *diagonalizovatelný*, pokud existuje báze $B$, vůči níž je matice $[\varphi]_B$ diagonální. Řekneme, že čtvercové matice **A** je *diagonalizovatelná*, je-li **A** podobná nějaké diagonální matici.

### Poznámka (4.9)

Nechť $\varphi$ je endomorfismus na prostoru $V$ konečné dimenze $n$, $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ a $B$ je báze $V$. Pak matice $[\varphi]_B$ a $\mathbf{A}$ jsou podobné právě tehdy, když existuje báze $C$ prostoru V tak, že $[\varphi]_C = \mathbf{A}$.

Řekneme, že endomorfismu $\varphi$ na prostoru $V$ konečné dimenze je *diagonalizovatelný*, pokud existuje báze $B$, vůči níž je matice $[\varphi]_B$ diagonální. Řekneme, že čtvercové matice $\mathbf{A}$ je *diagonalizovatelná*, je-li $\mathbf{A}$ podobná nějaké diagonální matici.

### Důsledek (4.10)

Buď $V$ konečně dimenzionální prostor, $B$ nějaká jeho báze a $\varphi$ endomorfismus na $V$. Pak $\varphi$ je diagonalizovatelný právě tehdy, když je matice $[\varphi]_B$ diagonalizovatelná.

## Věta (4.11)

*Nechť $V$ je konečně dimenzionální prostor a $\varphi$ endomorfismus na $V$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) $\varphi$ *je diagonalizovatelný,*

(2) *existuje báze $V$ složená z vlastních vektorů $\varphi$,*

(3) $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\varphi)} \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})$.

## Věta (4.11)

*Nechť $V$ je konečně dimenzionální prostor a $\varphi$ endomorfismus na $V$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *$\varphi$ je diagonalizovatelný,*
(2) *existuje báze $V$ složená z vlastních vektorů $\varphi$,*
(3) $V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(\varphi)} \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})$.

## Důsledek (4.12)

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná,
(2) existuje báze $T^n$ složená z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$,
(3) $T^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})}\{\mathbf{x} \in T^n \mid (\mathbf{A} - \lambda E)\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T\}$.

## Poznámka (4.13)

Nechť **A** je čtvercová matice stupně $n$ a $\varphi$ je endomorfismus na prostoru dimenze $n$.

(a) Má-li $\varphi$ $n$ různých vlastních čísel, je diagonalizovatelný.
(b) Má-li **A** $n$ různých vlastních čísel, je **A** diagonalizovatelná.

## Poznámka (4.13)

Nechť **A** je čtvercová matice stupně $n$ a $\varphi$ je endomorfismus na prostoru dimenze $n$.

(a) Má-li $\varphi$ $n$ různých vlastních čísel, je diagonalizovatelný.
(b) Má-li **A** $n$ různých vlastních čísel, je **A** diagonalizovatelná.

Řekneme, že reálná nebo komplexní čtvercová matice **U** je *unitární*, jestliže $\overline{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

## Poznámka (4.13)

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ a $\varphi$ je endomorfismus na prostoru dimenze $n$.

(a) Má-li $\varphi$ $n$ různých vlastních čísel, je diagonalizovatelný.
(b) Má-li $\mathbf{A}$ $n$ různých vlastních čísel, je $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná.

Řekneme, že reálná nebo komplexní čtvercová matice $\mathbf{U}$ je *unitární*, jestliže $\overline{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

## Poznámka (4.14)

Je-li $\mathbf{U}$ unitární matice, pak $\mathbf{U}$ je regulární, $\mathbf{U}^{-1} = \overline{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}$ a $\overline{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}$ je také unitární.

## Poznámka (4.13)

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ a $\varphi$ je endomorfismus na prostoru dimenze $n$.

(a) Má-li $\varphi$ $n$ různých vlastních čísel, je diagonalizovatelný.

(b) Má-li $\mathbf{A}$ $n$ různých vlastních čísel, je $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná.

Řekneme, že reálná nebo komplexní čtvercová matice $\mathbf{U}$ je *unitární*, jestliže $\overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

## Poznámka (4.14)

Je-li $\mathbf{U}$ unitární matice, pak $\mathbf{U}$ je regulární, $\mathbf{U}^{-1} = \overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$ a $\overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$ je také unitární.

## Důsledek (4.15)

Matice stupně $n$ nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ je unitární právě tehdy, když obsahuje ve sloupcích (v řádcích) ortonormální bázi unitárního prostoru $(T^n, \omega)$.

## Poznámka (4.16)

Součin dvou unitárních matic stejného stupně je opět unitární matice.

## Poznámka (4.16)

Součin dvou unitárních matic stejného stupně je opět unitární matice.

## Poznámka (4.17)

Buď $B$ ortonormální báze unitárního prostoru $(V, g)$ a $C$ je nějaká báze $V$. Pak je $C$ ortonormální, právě když je matice přechodu $[\mathrm{Id}]_{CB}$ unitární.

### Poznámka (4.16)

Součin dvou unitárních matic stejného stupně je opět unitární matice.

### Poznámka (4.17)

Buď $B$ ortonormální báze unitárního prostoru $(V, g)$ a $C$ je nějaká báze $V$. Pak je $C$ ortonormální, právě když je matice přechodu $[\mathrm{Id}]_{CB}$ unitární.

Nechť je **A** čtvercová matice nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo **C**. Řekneme, že **A** je *unitárně diagonalizovatelná*, existuje-li taková unitární matice **U** nad $T$, že $\overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\mathbf{AU}$ je diagonální. Řekneme, že $A$ je *normální*, jestliže $A\overline{A}^{\mathrm{T}} = \overline{A}^{\mathrm{T}}A$. Endomorfismu $\varphi$ na unitárním prostoru $(V, g)$ nazveme *unitárně diagonalizovatelným*, existuje-li ortonormální báze $B$ prostoru $(V, g)$ složená z vlastních vektorů endomorfismu $\varphi$.

## Věta (4.18)

*Buď $\varphi$ endomorfismus na konečně dimenzionálním unitárním prostoru $(V, g)$ a buď $B$ ortonormální báze $(V, g)$. Pak je ekvivalentní:*

(1) *$\varphi$ je unitárně diagonalizovatelný,*
(2) *existuje ortonormální báze $C$ prostoru $(V, g)$ tak, že $[\varphi]_C$ je diagonální matice,*
(3) *matice $[\varphi]_B$ je unitárně diagonalizovatelná.*

## Věta (4.18)

*Buď $\varphi$ endomorfismus na konečně dimenzionálním unitárním prostoru $(V, g)$ a buď $B$ ortonormální báze $(V, g)$. Pak je ekvivalentní:*

(1) *$\varphi$ je unitárně diagonalizovatelný,*
(2) *existuje ortonormální báze $C$ prostoru $(V, g)$ tak, že $[\varphi]_C$ je diagonální matice,*
(3) *matice $[\varphi]_B$ je unitárně diagonalizovatelná.*

## Poznámka (4.19)

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$. Pak je $\mathbf{A}$ unitárně diagonalizovatelná, právě když existuje ortonormální báze unitárního prostoru $(T^n, \omega)$ sestávající z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$.

**Věta (Základní věta algebry)**

*Každý komplexní polynom stupně alespoň jedna má komplexní kořen.*

### Věta (Základní věta algebry)

*Každý komplexní polynom stupně alespoň jedna má komplexní kořen.*

### Poznámka (4.20)

Každá komplexní čtvercová matice a každý endomorfismus na komplexním prostoru nenulové konečné dimenze mají nějaké vlastní číslo.

### Věta (Základní věta algebry)

*Každý komplexní polynom stupně alespoň jedna má komplexní kořen.*

### Poznámka (4.20)

Každá komplexní čtvercová matice a každý endomorfismus na komplexním prostoru nenulové konečné dimenze mají nějaké vlastní číslo.

### Věta (4.21)

*Čtvercová komplexní matice* $\mathbf{A}$ *je unitárně diagonalizovatelná, právě když je normální. Navíc, pokud všechna vlastní čísla normální matice* $\mathbf{A}$ *i všechny hodnoty* $\mathbf{A}$ *jsou reálné, potom* $\mathbf{A}$ *je reálná unitárně diagonalizovatelná matice.*

## Poznámka (4.22)

Nechť $\mathbf{A}$ je normální komplexní čtvercová matice a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva vlastní vektory $\mathbf{A}$ příslušné různým vlastním číslům. Potom $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

**Poznámka (4.22)**

Nechť $\mathbf{A}$ je normální komplexní čtvercová matice a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva vlastní vektory $\mathbf{A}$ příslušné různým vlastním číslům. Potom $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

**Důsledek (4.23)**

Je-li $f$ symetrická bilineární forma na reálném unitárním prostoru $(V, g)$ konečné dimenze, pak existuje ortonormální báze $(V, g)$, která je zároveň polární bázi $f$.

5. **Rozklady matic**

Rozkladem matice $\mathbf{A}$ budeme rozumět posloupnost matic $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_i$ takových, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_i$.

5. **Rozklady matic**

Rozkladem matice **A** budeme rozumět posloupnost matic $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_i$ takových, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_i$.

**LU rozklad**

Řekneme, že matice $\mathbf{A}_U = (a_{ij})$ je *typu U*, jde-li o čtvercovou horní trojúhelníkovou matici (tj. $a_{ij} = 0 \forall i > j$), matice $\mathbf{A}_L = (a_{ij})$ je *typu L*, jde-li o čtvercovou dolní trojúhelníkovou matici (tj. $a_{ij} = 0 \forall i < j$) a navíc má na diagonále jedničky (tj. $a_{ii} = 1 \forall i$). *LU rozkladem* libovolné čtvercové matice **A** rozumíme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, kde **L** je matice typu L a **U** je matice typu U.

## 5. **Rozklady matic**

Rozkladem matice **A** budeme rozumět posloupnost matic $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_i$ takových, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_i$.

### LU rozklad

Řekneme, že matice $\mathbf{A}_U = (a_{ij})$ je *typu U*, jde-li o čtvercovou horní trojúhelníkovou matici (tj. $a_{ij} = 0 \forall i > j$), matice $\mathbf{A}_L = (a_{ij})$ je *typu L*, jde-li o čtvercovou dolní trojúhelníkovou matici (tj. $a_{ij} = 0 \forall i < j$) a navíc má na diagonále jedničky (tj. $a_{ii} = 1 \forall i$). *LU rozkladem* libovolné čtvercové matice **A** rozumíme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, kde **L** je matice typu L a **U** je matice typu U.

**Poznámka (5.1)**

Nechť $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ jsou matice stejného stupně typu L a $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ jsou matice stejného stupně typu U. Pak $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$ je typu L a $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$ je typu U. Navíc $\mathbf{L}_1^{-1}$ vždy existuje a je typu L, a je-li $\mathbf{U}_1$ regulární, potom $\mathbf{U}_1^{-1}$ je typu $U$.

## Poznámka (5.2)

Existuje-li LU rozklad regulární matice, pak je určen jednoznačně.

## Poznámka (5.2)

Existuje-li LU rozklad regulární matice, pak je určen jednoznačně.

*Permutační maticí* budeme rozumět čtvercovou matici $\mathbf{P}$, která v každém řádku a každém sloupci obsahuje právě jednu hodnotu 1 a jinak samé 0.

## Poznámka (5.2)

Existuje-li LU rozklad regulární matice, pak je určen jednoznačně.

*Permutační maticí* budeme rozumět čtvercovou matici **P**, která v každém řádku a každém sloupci obsahuje právě jednu hodnotu 1 a jinak samé 0.

## Poznámka (5.3)

Nechť **P** a **Q** jsou permutační matice stupně $n$.

(a) Každou permutační matici dostaneme z jednotkové matice vhodným přeházením řádků (sloupců).
(b) Součin **PQ** je permutační matice.
(c) $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ je permutační matice.

## Poznámka (5.2)

Existuje-li LU rozklad regulární matice, pak je určen jednoznačně.

*Permutační maticí* budeme rozumět čtvercovou matici **P**, která v každém řádku a každém sloupci obsahuje právě jednu hodnotu 1 a jinak samé 0.

## Poznámka (5.3)

Nechť **P** a **Q** jsou permutační matice stupně *n*.

(a) Každou permutační matici dostaneme z jednotkové matice vhodným přeházením řádků (sloupců).
(b) Součin **PQ** je permutační matice.
(c) $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ je permutační matice.

## Věta (5.4)

*Pro každou čtvercovou matici* **A** *existuje permutační matice* **P** *tak, že matice* **PA** *má LU rozklad.*

## QR rozklad

Řekneme, že matice **Q** je *typu Q*, je-li reálná nebo komplexní a platí, že $\overline{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q} = \mathbf{E}$ j. *QR-rozkladem* matice **A** nad reálným nebo komplexním tělesem $T$ rozumíme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, kde **Q** je typu Q a **R** je regulární horní trojúhelníková matice s kladnými reálnými hodnotami na diagonále.

**QR rozklad**

Řekneme, že matice $\mathbf{Q}$ je *typu Q*, je-li reálná nebo komplexní a platí, že $\overline{\mathbf{Q}}^T\mathbf{Q} = \mathbf{E}$ j. *QR-rozkladem* matice $\mathbf{A}$ nad reálným nebo komplexním tělesem $T$ rozumíme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, kde $\mathbf{Q}$ je typu Q a $\mathbf{R}$ je regulární horní trojúhelníková matice s kladnými reálnými hodnotami na diagonále.

Poznámka (5.5)

Matice nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ je typu Q, právě když obsahuje ve sloupcích ortonormální posloupnost vektorů vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu $\omega$.

## QR rozklad

Řekneme, že matice $\mathbf{Q}$ je *typu Q*, je-li reálná nebo komplexní a platí, že $\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{E}$ j. *QR-rozkladem* matice $\mathbf{A}$ nad reálným nebo komplexním tělesem $T$ rozumíme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, kde $\mathbf{Q}$ je typu Q a $\mathbf{R}$ je regulární horní trojúhelníková matice s kladnými reálnými hodnotami na diagonále.

**Poznámka (5.5)**

Matice nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ je typu Q, právě když obsahuje ve sloupcích ortonormální posloupnost vektorů vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu $\omega$.

**Poznámka (5.6)**

Nechť $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ je QR rozklad matice $\mathbf{A}$ typu $(n, m)$, pak $\mathbf{Q}$ je typu $(n, m)$, $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{Q}) = m$ a QR rozklad je určen jednoznačně. Je-li $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}|\dots|\mathbf{a}_m^{\mathrm{T}})$ a $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1^{\mathrm{T}}|\dots|\mathbf{q}_m^{\mathrm{T}})$, pak $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i \rangle$ pro všechna $i = 1, \dots, m$.

## Věta (5.7)

*Nechť $T$ je reálné nebo komplexní těleso, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ je posloupnost lineárně nezávislých vektorů prostoru $T^n$ a $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ je posloupnost ortonormálních vektorů unitárního prostoru $(T^n, \omega)$, kterou z ní vytvoříme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. Položme $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1^T | \dots | \mathbf{a}_m^T)$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1^T | \dots | \mathbf{q}_m^T)$ a $\mathbf{R} = (r_{ij})$, kde $r_{ij} = \omega(\mathbf{q}_i, \mathbf{a}_j)$. Potom $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ je QR rozklad matice $\mathbf{A}$.*

## Věta (5.7)

*Nechť $T$ je reálné nebo komplexní těleso, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ je posloupnost lineárně nezávislých vektorů prostoru $T^n$ a $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m$ je posloupnost ortonormálních vektorů unitárního prostoru $(T^n, \omega)$, kterou z ní vytvoříme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. Položme $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1^T | \ldots | \mathbf{a}_m^T)$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1^T | \ldots | \mathbf{q}_m^T)$ a $\mathbf{R} = (r_{ij})$, kde $r_{ij} = \omega(\mathbf{q}_i, \mathbf{a}_j)$. Potom $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ je QR rozklad matice $\mathbf{A}$.*

## Důsledek (5.8)

Pro reálnou nebo komplexní matici $\mathbf{A}$ existuje QR rozklad, právě když se její hodnost rovná počtu jejích sloupců.

## URV rozklad

### Věta (5.9)

*Nechť $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ a $\mathbf{A}$ je matice typu $(n, m)$ hodnosti $k$ nad tělesem $T$. Potom nad $T$ existují unitární matice $\mathbf{U}$ stupně $n$ a $\mathbf{V}$ stupně $m$ a reguární matice $\mathbf{D}$ stupně $k$, pro něž platí, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \overline{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}},$$

*kde $\mathbf{0}_1$ je nulová matice typu $(k, m-k)$, $\mathbf{0}_2$ je nulová matice typu $(n-k, k)$ a $\mathbf{0}_3$ je nulová matice typu $(n-k, m-k)$.*

## URV rozklad

**Věta (5.9)**

*Nechť $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ a $\mathbf{A}$ je matice typu $(n, m)$ hodnosti $k$ nad tělesem $T$. Potom nad $T$ existují unitární matice $\mathbf{U}$ stupně $n$ a $\mathbf{V}$ stupně $m$ a reguární matice $\mathbf{D}$ stupně $k$, pro něž platí, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \overline{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}},$$

*kde $\mathbf{0}_1$ je nulová matice typu $(k, m-k)$, $\mathbf{0}_2$ je nulová matice typu $(n-k, k)$ a $\mathbf{0}_3$ je nulová matice typu $(n-k, m-k)$.*

Posloupnost matic $\mathbf{U}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}}$ z předchozí věty nazveme *URV rozkladem* reálné nebo komplexní matice **A**.

## URV rozklad

### Věta (5.9)

*Nechť* $T = \mathbf{R}$ *nebo* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{A}$ *je matice typu* $(n, m)$ *hodnosti* $k$ *nad tělesem* $T$*. Potom nad* $T$ *existují unitární matice* $\mathbf{U}$ *stupně* $n$ *a* $\mathbf{V}$ *stupně* $m$ *a reguární matice* $\mathbf{D}$ *stupně* $k$*, pro něž platí, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \overline{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}},$$

*kde* $\mathbf{0}_1$ *je nulová matice typu* $(k, m-k)$*,* $\mathbf{0}_2$ *je nulová matice typu* $(n-k, k)$ *a* $\mathbf{0}_3$ *je nulová matice typu* $(n-k, m-k)$*.*

Posloupnost matic $\mathbf{U}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}}$ z předchozí věty nazveme *URV rozkladem* reálné nebo komplexní matice $\mathbf{A}$.

### Poznámka (5.10)

$h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}})$ pro každou komplexní matici $\mathbf{A}$.

## Poznámka (5.11)

Nechť $\varphi : W_1 \to W_2$ je homomorfismus, kde $(W_1, g_1)$ a $(W_2, g_2)$ jsou unitární prostory konečné dimenze nad týmž tělesem. Potom existují takové ortonormální báze $B_1$ prostoru $(W_1, g_1)$ a $B_2$ prostoru $(W_2, g_2)$, že $[\varphi]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{D}$ je regulární matice a $\mathbf{0}_i$ nulové matice příslušného typu.

## Poznámka (5.11)

Nechť $\varphi : W_1 \to W_2$ je homomorfismus, kde $(W_1, g_1)$ a $(W_2, g_2)$ jsou unitární prostory konečné dimenze nad týmž tělesem. Potom existují takové ortonormální báze $B_1$ prostoru $(W_1, g_1)$ a $B_2$ prostoru $(W_2, g_2)$, že $[\varphi]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{D}$ je regulární matice a $\mathbf{0}_i$ nulové matice příslušného typu.

## Věta (5.12)

*Mějme* $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{\mathbf{V}_1}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{D}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{\mathbf{V}_2}^{\mathrm{T}}$ *dva URV rozklady matice* $\mathbf{A}$ *nad* $\mathbf{R}$ *nebo* $\mathbf{C}$, *kde* $\mathbf{D}_i$ *jsou regulární matice. Pak* $\mathbf{V}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{\mathbf{U}_1}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{D}_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^{\mathrm{T}}$.

Buď $\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{D} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\overline{\mathbf{V}}^{\mathsf{T}}$ URV rozklad reálné nebo komplexní matice $\mathbf{A}$ typu $(n, m)$, kde $\mathbf{D}$ je regulární. Jednoznačně určenou matici $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\overline{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}$ typu $(m, n)$ nazveme *(Moore-Penroseovou) pseudoinverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$.

Buď $\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\overline{\mathbf{V}}^{\mathsf{T}}$ URV rozklad reálné nebo komplexní matice $\mathbf{A}$ typu $(n, m)$, kde $\mathbf{D}$ je regulární. Jednoznačně určenou matici $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\overline{\mathbf{U}}^{\mathsf{T}}$ typu $(m, n)$ nazveme *(Moore-Penroseovou) pseudoinverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$.

## Poznámka (5.13)

Nechť $\mathbf{A}$ je reálná nebo komplexní matice. Pak platí:

(a) je-li $\mathbf{A}$ regulární, pak $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{-1}$.
(b) $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger}$,
(c) $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = (\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}})^{\mathsf{T}}$ a $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = (\overline{\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}})^{\mathsf{T}}$,
(d) $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$,
(e) $\overline{\mathbf{A}^{\dagger}}^{\mathsf{T}} = (\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}})^{\dagger}$,

## SVD rozklad

**Poznámka (5.14)**

Nechť $\mathbf{A}$ je komplexní čtvercová matice. Pak $\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$ je normální matice a všechna vlastní čísla $\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$ jsou reálná a nezáporná.

## SVD rozklad

**Poznámka (5.14)**

Nechť $\mathbf{A}$ je komplexní čtvercová matice. Pak $\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$ je normální matice a všechna vlastní čísla $\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$ jsou reálná a nezáporná.

**Věta (5.15)**

*Nechť $T$ je reálné nebo komplexní těleso a $\mathbf{A}$ je matice typu $(n, m)$ hodnosti $k$ nad $T$. Potom nad tělesem $T$ existují unitární matice $\mathbf{U}$ stupně $n$ a $\mathbf{V}$ stupně $m$ a diagonální matice $\mathbf{D}$ s kladnými reálnými hodnotami na diagonále stupně $k$ tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}\overline{\mathbf{V}}^T,$$

*kde $\mathbf{0}_1$ je nulová matice typu $(k, m-k)$, $\mathbf{0}_2$ je nulová matice typu $(n-k, k)$ a $\mathbf{0}_3$ je nulová matice typu $(n-k, m-k)$.*

Posloupnost matic **U**, $\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{V}}^T$ z předchozí věty nazveme *SVD rozkladem* reálné nebo komplexní matice **A**. Kladným reálným číslům na diagonále matice **D** budeme říkat *singulární hodnoty* matice **A**.

Posloupnost matic $\mathbf{U}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{V}}^{\mathsf{T}}$ z předchozí věty nazveme *SVD rozkladem* reálné nebo komplexní matice $\mathbf{A}$. Kladným reálným číslům na diagonále matice $\mathbf{D}$ budeme říkat *singulární hodnoty* matice $\mathbf{A}$.

## Důsledek (5.16)

Singulární hodnoty komplexní (reálné) matice $\mathbf{A}$ jsou určeny jednoznačně jako $\sqrt{\lambda}$ pro všechna kladná vlastní čísla $\lambda$ matice $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ nebo $\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$.

Posloupnost matic **U**, $\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{V}}^{\mathsf{T}}$ z předchozí věty nazveme *SVD rozkladem* reálné nebo komplexní matice **A**. Kladným reálným číslům na diagonále matice **D** budeme říkat *singulární hodnoty* matice **A**.

## Důsledek (5.16)

Singulární hodnoty komplexní (reálné) matice **A** jsou určeny jednoznačně jako $\sqrt{\lambda}$ pro všechna kladná vlastní čísla $\lambda$ matice $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ nebo $\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$.

## Důsledek (5.17)

Nechť $\varphi : V \to W$ je homomorfismus, kde $(V, \omega)$ a $(W, \omega)$ jsou unitární prostory nad týmž tělesem. Potom existují ortonormální báze $B_V$ prostoru $(V, \omega)$ a $B_W$ prostoru $(W, \omega)$ tak, že $[\varphi]_{B_V B_W} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$, kde **D** je diagonální matice s kladnou diagonálou a $\mathbf{0}_i$ nulové matice příslušného typu.

## Choleskyho rozklad symetrické matice

Symetrická reálná čtvercová matice $\mathbf{A}$ stupně $n$ je *pozitivně definitní*, jestliže $\mathbf{v}\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} > 0$ pro každý nenulový $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$.

## Choleskyho rozklad symetrické matice

Symetrická reálná čtvercová matice $\mathbf{A}$ stupně $n$ je *pozitivně definitní*, jestliže $\mathbf{v}\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} > 0$ pro každý nenulový $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$.

### Poznámka (5.18)

Pro symetrickou čtvercovou matic $\mathbf{A}$ nad stupně $n$ je ekvivalentní:

(1) $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní,
(2) Zobrazení $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ dané předpisem $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$ je pozitivně definitní symetrická bilineární forma,
(3) existuje regulární matice $\mathbf{P}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}$.

### Věta (5.19)

*Je-li* $\mathbf{A}$ *pozitivně definitní symetrická reálná čtvercová matice stupně n, pak existuje právě jedna taková reálná horní trojúhelníková matice* $\mathbf{R}$ *stupně n s kladnými hodnotami na diagonále, že* $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}$.

## Věta (5.19)

*Je-li* **A** *pozitivně definitní symetrická reálná čtvercová matice stupně n, pak existuje právě jedna taková reálná horní trojúhelníková matice* **R** *stupně n s kladnými hodnotami na diagonále, že* $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$.

Jednoznačně určenému rozkladu pozitivně definitní symetrické reálné čtvercová matice $A = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$, kde **R** je reálná horní trojúhelníková matice s kladnými čísly na diagonále, budeme říkat *Choleskyho rozklad*.

# 6.**Jordanův normální tvar matice**

Je-li $f$ endomorfismus na prostoru $V$, bude $f^n = f \dots f$ značit složení $n$ endomorfismů $f$ pro každé $n \geq 1$ a $f^0 = \mathrm{Id}$. Je-li $B \subseteq V$ , pak $f[B] = \{f(b) |\ b \in B\}$.

## 6.**Jordanův normální tvar matice**

Je-li $f$ endomorfismus na prostoru $V$, bude $f^n = f \dots f$ značit složení $n$ endomorfismů $f$ pro každé $n \geq 1$ a $f^0 = \mathrm{Id}$. Je-li $B \subseteq V$ , pak $f[B] = \{f(b) | \, b \in B\}$.

### Poznámka (6.1)

Nechť $f$ je endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze $n$. Potom $\mathrm{Im}\, f^k \supseteq \mathrm{Im}\, f^{k+1}$ a $\mathrm{Ker}\, f^k \subseteq \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$ pro každé $k \geq 1$ a dále

(a) $\mathrm{Im}\, f^m = \mathrm{Im}\, f^n$ pro všechna $m \geq n$,
(b) $\mathrm{Ker}\, f^m = \mathrm{Ker}\, f^n$ pro všechna $m \geq n$,
(c) $V = \mathrm{Im}\, f^n \oplus \mathrm{Ker}\, f^n$.

## 6. **Jordanův normální tvar matice**

Je-li $f$ endomorfismus na prostoru $V$, bude $f^n = f \dots f$ značit složení $n$ endomorfismů $f$ pro každé $n \geq 1$ a $f^0 = \mathrm{Id}$. Je-li $B \subseteq V$ , pak $f[B] = \{f(b) | \ b \in B\}$.

**Poznámka (6.1)**

Nechť $f$ je endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze $n$. Potom $\mathrm{Im}\, f^k \supseteq \mathrm{Im}\, f^{k+1}$ a $\mathrm{Ker}\, f^k \subseteq \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$ pro každé $k \geq 1$ a dále

(a) $\mathrm{Im}\, f^m = \mathrm{Im}\, f^n$ pro všechna $m \geq n$,
(b) $\mathrm{Ker}\, f^m = \mathrm{Ker}\, f^n$ pro všechna $m \geq n$,
(c) $V = \mathrm{Im}\, f^n \oplus \mathrm{Ker}\, f^n$.

Buď $\varphi$ endomorfismus na vektorovém prostoru $V$, řekneme, že podprostor $U$ prostoru $V$ je *invariantním podprostorem endomorfismu* $\varphi$, pokud $\varphi(U) \subseteq U$.

Je-li $\varphi$ endomorfimus na vektorovém prostoru $V$ a $U$ je jeho invariantním podprostor, pak restrikcí endomorfismu $\varphi$ na invariantním podprostor $U$ budeme rozumět endomorfismus $\varphi_U$ na $U$ daný předpisem $\varphi_U(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u} \in U$.

Je-li $\varphi$ endomorfimus na vektorovém prostoru $V$ a $U$ je jeho invariantním podprostor, pak restrikcí endomorfismu $\varphi$ na invariantním podprostor $U$ budeme rozumět endomorfismus $\varphi_U$ na $U$ daný předpisem $\varphi_U(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u} \in U$.

### Věta (6.2)

*Nechť $\varphi$ je endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru konečné dimenze $n$, $\lambda \in \sigma(\varphi)$ a $f = \varphi - \lambda\,\mathrm{Id}$. Pak $\operatorname{Im} f^k$ a $\operatorname{Ker} f^k$ jsou invariantní podprostory endomorfismu $\varphi$ pro každé $k \geq 1$.*

Je-li $\varphi$ endomorfimus na vektorovém prostoru $V$ a $U$ je jeho invariantním podprostor, pak restrikcí endomorfismu $\varphi$ na invariantním podprostor $U$ budeme rozumět endomorfismus $\varphi_U$ na $U$ daný předpisem $\varphi_U(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u} \in U$.

**Věta (6.2)**

*Nechť $\varphi$ je endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru konečné dimenze $n$, $\lambda \in \sigma(\varphi)$ a $f = \varphi - \lambda \operatorname{Id}$. Pak $\operatorname{Im} f^k$ a $\operatorname{Ker} f^k$ jsou invariantní podprostory endomorfismu $\varphi$ pro každé $k \geq 1$.*

**Poznámka (6.3)**

Buď $f$ endomorfismus na vektorovém prostoru konečné dimenze. Je-li $r > 1$ a $B$ lineárně nezávislá podmnožina nějakého doplňku $\operatorname{Ker} f^{r-1}$ v $\operatorname{Ker} f^r$, pak je $f[B]$ lineárně nezávislá podmnožina nějakého doplňku $\operatorname{Ker} f^{r-2}$ v $\operatorname{Ker} f^{r-1}$.

## Věta (6.4)

*Buď $\varphi$ endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze $n$, $\lambda \in \sigma(\varphi)$ a nechť platí, že $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^k = V$ pro nějaké $k > 0$. Potom $\sigma(\varphi) = \{\lambda\}$ a existuje báze $B$ prostoru $V$ a taková čísla $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1} \in \{0, 1\}$, že*

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \epsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Mějme čtvercové komplexní matice

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{pmatrix}.$$

Potom matici $\mathbf{J}_i$, která má na diagonále komplexní číslo $\lambda_i$, nad diagonálou, tj. na pozicích $(i, i+1)$, jedničku a všude jinde nuly, nazveme *Jordanovou buňkou* a matici $\mathbf{J}$ obsahující v blocích na diagonále Jordanovy buňky $\mathbf{J}_i$ nazveme *Jordanovou maticí*.

Mějme čtvercové komplexní matice

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{pmatrix}.$$

Potom matici $\mathbf{J}_i$, která má na diagonále komplexní číslo $\lambda_i$, nad diagonálou, tj. na pozicích $(i, i+1)$, jedničku a všude jinde nuly, nazveme *Jordanovou buňkou* a matici $\mathbf{J}$ obsahující v blocích na diagonále Jordanovy buňky $\mathbf{J}_i$ nazveme *Jordanovou maticí*.

### Poznámka (6.5)

Nechť $\mathbf{J}$ je Jordanova matice podobná matici $\mathbf{A}$, buď $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$. Označíme-li $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$, pak $h(\mathbf{F}^{s-1}) + h(\mathbf{F}^{s+1}) - 2h(\mathbf{F}^s)$ udává právě počet Jordanových buněk matice stupně $s$ s hodnotou $\lambda$ na diagonále v matici $\mathbf{J}$.

### Důsledek (6.6)

Nechť $\varphi$ je endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze, $\lambda \in \sigma(\varphi)$ a nechť platí, že $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id})^k = V$ pro nějaké $k > 0$. Potom existuje báze $B$ prostoru $V$ taková, že je $[\varphi]_B$ Jordanova matice. Tato matice je určena jednoznačně až na pořadí Jordanových buněk

## Důsledek (6.6)

Nechť $\varphi$ je endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze, $\lambda \in \sigma(\varphi)$ a nechť platí, že $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id})^k = V$ pro nějaké $k > 0$. Potom existuje báze $B$ prostoru $V$ taková, že je $[\varphi]_B$ Jordanova matice. Tato matice je určena jednoznačně až na pořadí Jordanových buněk

## Věta (6.7, Jordanova věta)

*Buď $\varphi$ endomorfismus na konečně dimenzionálním komplexním vektorovém prostoru $V$. Pak existuje báze $B$ prostoru $V$, pro níž je $[\varphi]_B$ Jordanovou maticí. Tato matice je určena jednoznačně až na pořadí Jordanových buněk.*

Jordanovu matici podobnou komplexní čtvercové matici $\mathbf{A}$ nazveme *Jordanovým kanonickým tvarem matice* $\mathbf{A}$.

Jordanovu matici podobnou komplexní čtvercové matici **A** nazveme *Jordanovým kanonickým tvarem matice* **A**.

## Důsledek

(1) Každá kompexní čtvercová matice má Jordanův kanonickým tvar, který je určen jednozmačně až na pořadí buněk.
(2) Dvě kompexní čtvercové matice jsou podobné, právě když mají až na pořadí Jordanových buněk stejný Jordanův kanonický tvar.

Jordanovu matici podobnou komplexní čtvercové matici **A** nazveme *Jordanovým kanonickým tvarem matice* **A**.

**Důsledek**

(1) Každá kompexní čtvercová matice má Jordanův kanonickým tvar, který je určen jednozmačně až na pořadí buněk.
(2) Dvě kompexní čtvercové matice jsou podobné, právě když mají až na pořadí Jordanových buněk stejný Jordanův kanonický tvar.

*Spektrálním poloměrem* komplexní čtvercové matice **A** nazveme reálné číslo $\rho(\mathbf{A}) = max\{|\lambda| \in \mathbf{R} \mid \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$.

**Poznámka (6.9)**

Je-li **A** komplexní čtvercová matice a $k$ přirozené číslo, pak

(a) $\sigma(\mathbf{A}^k) = \{\lambda_1^k, \dots, \lambda_s^k\}$, jestliže $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$,
(b) $\rho(\mathbf{A}^k) = \rho(\mathbf{A})^k$,
(c) $\rho(\mathbf{A}) = 0$, právě když existuje $k > 0$ tak, že $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$,
(d) $\rho(a \cdot \mathbf{A}) = |a|\rho(\mathbf{A})$ pro každé $a \in \mathbf{C}$.

## Poznámka (6.10)

Nechť je $\mathbf{A}$ komplexní čtvercová matice a $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^n) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$.

## Poznámka (6.10)

Nechť je $\mathbf{A}$ komplexní čtvercová matice a $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

a) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$,

b) $\lim_{n\to\infty} (\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^n) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$.

7.**Nezáporné matice**

Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ dvě reálné matice stejného typu, potom budeme psát $A > B$ resp. $A \geq B$, pokud $a_{ij} > b_{ij}$ resp. $a_{ij} \geq b_{ij}$ pro všechny indexy $i, j$. Podobně pro reálné (řádkové nebo sloupcové) vektory $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ budeme psát $\mathbf{u} > \mathbf{v}$ resp. $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ pokud $u_i > v_i$ resp. $u_i \geq v_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

**Poznámka (6.10)**

Nechť je $\mathbf{A}$ komplexní čtvercová matice a $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

a) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$,

b) $\lim_{n\to\infty} (\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^n) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$.

## 7.Nezáporné matice

Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ dvě reálné matice stejného typu, potom budeme psát $A > B$ resp. $A \geq B$, pokud $a_{ij} > b_{ij}$ resp. $a_{ij} \geq b_{ij}$ pro všechny indexy $i, j$. Podobně pro reálné (řádkové nebo sloupcové) vektory $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ budeme psát $\mathbf{u} > \mathbf{v}$ resp. $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ pokud $u_i > v_i$ resp. $u_i \geq v_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Nechť $A$ je matice. Řekneme, že $A$ je *kladná* resp. *nezáporná*, pokud je reálná a $A > \mathbf{0}$ resp $A \geq \mathbf{0}$. Podobně nazveme vektor $\mathbf{v}$ *kladným* resp. *nezáporným*, pokud se jedná o reálný vektor a $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, resp. $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$.

## Poznámka (7.1)

Nechť $\mathbf{N}_1$ a $\mathbf{N}_3$ jsou nezáporné matice typu $(n, m)$ a $\mathbf{N}_2$ a $\mathbf{N}_4$ jsou nezáporné matice typu $(m, k)$. Pokud $\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{N}_3$ a $\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_4$, pak $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_3\mathbf{N}_4$. Jestlie $\mathbf{N}_1 > \mathbf{N}_3$ a $\mathbf{N}_2 > \mathbf{N}_4$, pak $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 > \mathbf{N}_3\mathbf{N}_4$.

## Poznámka (7.1)

Nechť $\mathbf{N}_1$ a $\mathbf{N}_3$ jsou nezáporné matice typu $(n, m)$ a $\mathbf{N}_2$ a $\mathbf{N}_4$ jsou nezáporné matice typu $(m, k)$. Pokud $\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{N}_3$ a $\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_4$, pak $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_3\mathbf{N}_4$. Jestlie $\mathbf{N}_1 > \mathbf{N}_3$ a $\mathbf{N}_2 > \mathbf{N}_4$, pak $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 > \mathbf{N}_3\mathbf{N}_4$.

Pro reálnou nebo komplexní matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ budeme značit $|\mathbf{A}| = (|a_i j|)$ a podobně pro vektor $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ budeme značit $|\,\mathbf{v}\,| = (|v_1|, \ldots, |v_n|)$.

## Poznámka (7.1)

Nechť $\mathbf{N}_1$ a $\mathbf{N}_3$ jsou nezáporné matice typu $(n, m)$ a $\mathbf{N}_2$ a $\mathbf{N}_4$ jsou nezáporné matice typu $(m, k)$. Pokud $\mathbf{N}_1 \geq \mathbf{N}_3$ a $\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_4$, pak $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 \geq \mathbf{N}_3\mathbf{N}_4$. Jestlie $\mathbf{N}_1 > \mathbf{N}_3$ a $\mathbf{N}_2 > \mathbf{N}_4$, pak $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 > \mathbf{N}_3\mathbf{N}_4$.

Pro reálnou nebo komplexní matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ budeme značit $|\mathbf{A}| = (|a_i j|)$ a podobně pro vektor $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ budeme značit $|\,\mathbf{v}\,| = (|v_1|, \ldots, |v_n|)$.

## Poznámka (7.2)

Nechť $\mathbf{P}$ je kladná a $\mathbf{N}$ nezáporná čtvercová matice. Potom

(a) $\mathbf{P}^k$ je kladná a $\mathbf{N}^k$ je nezáporná matice pro každé $k > 0$,
(b) $\mathbf{N}\,\mathbf{u}^\mathsf{T} \geq \mathbf{N}\,\mathbf{v}^\mathsf{T}$, jestliže $\mathbf{u} \geq \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ a mají-li součiny smysl,
(c) $\mathbf{P}\,\mathbf{u}^\mathsf{T} > \mathbf{P}\,\mathbf{v}^\mathsf{T}$, jestliže $\mathbf{u} \geq \mathbf{v} \geq 0$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$ a mají-li součiny smysl,
(d) $\mathbf{N}|\,\mathbf{u}\,|^\mathsf{T} \geq |\mathbf{N}\,\mathbf{u}^\mathsf{T}\,|$ pro každý vektor $\mathbf{u}$, mají-li součiny smysl,
(e) $\rho(\mathbf{P}) > 0$.

## Věta (7.3)

*Nechť* $\mathbf{A}$ *je kladná čtvercová matice. Potom* $\rho(\mathbf{A})$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$*, a pokud je* $\mathbf{v}$ *vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$*, pak* $|\mathbf{v}|$ *je kladným vlastním vektorem příslušným* $\rho(\mathbf{A})$*.*

## Věta (7.3)

*Nechť* $\mathbf{A}$ *je kladná čtvercová matice. Potom* $\rho(\mathbf{A})$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$*, a pokud je* $\mathbf{v}$ *vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$*, pak* $|\,\mathbf{v}\,|$ *je kladným vlastním vektorem příslušným* $\rho(\mathbf{A})$*.*

## Věta (7.4, Perronova věta)

*Nechť* $\mathbf{A}$ *je kladná čtvercová matice. Potom* $\rho(\mathbf{A})$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *a existuje právě jeden jeho kladný vlastní vektor* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ *tak, že* $p_1 + \cdots + p_n = 1$*. Navíc každý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$ *je násobkem vektoru* $\mathbf{p}$*.*

## Věta (7.3)

*Nechť* $\mathbf{A}$ *je kladná čtvercová matice. Potom* $\rho(\mathbf{A})$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$, *a pokud je* $\mathbf{v}$ *vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$, *pak* $|\,\mathbf{v}\,|$ *je kladným vlastním vektorem příslušným* $\rho(\mathbf{A})$.

## Věta (7.4, Perronova věta)

*Nechť* $\mathbf{A}$ *je kladná čtvercová matice. Potom* $\rho(\mathbf{A})$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *a existuje právě jeden jeho kladný vlastní vektor* $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ *tak, že* $p_1 + \cdots + p_n = 1$. *Navíc každý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$ *je násobkem vektoru* $\mathbf{p}$.

## Poznámka (7.5)

Jsou-li $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ dvě nezáporné čtvercové matice stejného stupně a $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$, pak $\rho(\mathbf{A}) \geq \rho(\mathbf{B})$.

## Věta (7.6)

*Nechť* $\mathbf{A}$ *je nezáporná čtvercová matice. Pak* $\rho(A)$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *a existuje nezáporný vlastní vektor matice* $A$ *příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$*.*

### Věta (7.6)

*Nechť* **A** *je nezáporná čtvercová matice. Pak* $\rho(A)$ *je vlastní číslo matice* **A** *a existuje nezáporný vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$.

Řekneme, že matice **A** je *primitivní*, pokud je nezáporná čtvercová a existuje $k > 0$ takové, že $\mathbf{A}^k > \mathbf{0}$.

## Věta (7.6)

*Nechť* **A** *je nezáporná čtvercová matice. Pak* $\rho(A)$ *je vlastní číslo matice* **A** *a existuje nezáporný vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$*.*

Řekneme, že matice **A** je *primitivní*, pokud je nezáporná čtvercová a existuje $k > 0$ takové, že $\mathbf{A}^k > \mathbf{0}$.

## Věta (7.7, Perronova-Frobeniova věta)

*Nechť* **A** *je primitivní matice. Potom* $\rho(\mathbf{A})$ *je kladné vlastní číslo matice* **A** *a existuje právě jeden kladný vlastní vektor* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ *tak, že* $p_1 + \cdots + p_n = 1$*. Navíc každý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$ *je násobkem vektoru* **p***.*

### Věta (7.6)

*Nechť* $\mathbf{A}$ *je nezáporná čtvercová matice. Pak* $\rho(A)$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *a existuje nezáporný vlastní vektor matice* $A$ *příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$.

Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je *primitivní*, pokud je nezáporná čtvercová a existuje $k > 0$ takové, že $\mathbf{A}^k > \mathbf{0}$.

### Věta (7.7, Perronova-Frobeniova věta)

*Nechť* $\mathbf{A}$ *je primitivní matice. Potom* $\rho(\mathbf{A})$ *je kladné vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *a existuje právě jeden kladný vlastní vektor* $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ *tak, že* $p_1 + \cdots + p_n = 1$. *Navíc každý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{A})$ *je násobkem vektoru* $\mathbf{p}$.

Jednoznačně určenému vektoru $\mathbf{p}$ z [7.4] a [7.7] budeme říkat *Perronův vektor* matice $\mathbf{A}$.

*Stochastickou maticí* budeme rozumět nezápornou čtvercovou matici, jejíž každý řádek ma součet hodnot roven jedné.

*Stochastickou maticí* budeme rozumět nezápornou čtvercovou matici, jejíž každý řádek ma součet hodnot roven jedné.

**Poznámka (7.8)**

Součin stochastických matic stejného stupně je stochastickou maticí.

*Stochastickou maticí* budeme rozumět nezápornou čtvercovou matici, jejíž každý řádek ma součet hodnot roven jedné.

### Poznámka (7.8)

Součin stochastických matic stejného stupně je stochastickou maticí.

### Poznámka (7.9)

Nechť $\mathbf{A}$ je stochastická matice stupně $n$ a $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$. Pak $\mathbf{A}\mathbf{e}^\mathsf{T} = \mathbf{e}^\mathsf{T}$ a $\rho(\mathbf{A}) = 1$.

*Stochastickou maticí* budeme rozumět nezápornou čtvercovou matici, jejíž každý řádek ma součet hodnot roven jedné.

**Poznámka (7.8)**

Součin stochastických matic stejného stupně je stochastickou maticí.

**Poznámka (7.9)**

Nechť $\mathbf{A}$ je stochastická matice stupně $n$ a $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$. Pak $\mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathsf{T}} = \mathbf{e}^{\mathsf{T}}$ a $\rho(\mathbf{A}) = 1$.

**Poznámka (7.10)**

Nechť $\mathbf{S}$ je stochastická matice a $\mathbf{A}$ nezáporná matice, pro níž $\mathbf{A} \neq \mathbf{S}$, $S \geq \mathbf{A}$ a existuje kladný vlastní vektor matice $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ příslušný vlastnímu číslu $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$. Pak $\rho(\mathbf{A}) < 1$.