21./27.10.

2. Aritmetické vektorové prostory a lineární nezávislost

2.1. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $(1,1,0,1)$, $(2,1,1,1)$, $(3,1,2,1)$ z vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ nad tělesem R lineárně závislá či nezávislá.

Potřebujeme zjistit, zda existuje nějaké netriviální (tj. nenulové) řešení vektorové rovnice

$$x_1 \cdot (1,1,0,1) + x_2 \cdot (2,1,1,1) + x_3 \cdot (3,1,2,1) = (0,0,0,0)$$

Snadno nahlédneme, že řešení dané vektorové rovnice jsou právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí levých stran $\mathbf{A}$ (pravé strany jsou nulové, u matice homogenní soustavy rovnic vynecháváme sloupec nulových pravých stran, který se žádnými úpravami nemění). Tu následně obvyklým způsobem upravujeme:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aniž musíme nenulové řešení dopočítávat, ale zjevně jím jsou všechny násobky vektoru $(1,-2,1)$, zjišťujeme, že homogenní soustava rovnic s maticí $\mathbf{A}$, a tudíž i výše uvedená vektorová rovnice mají netriviální řešení, a proto jsou přímo podle definice vektory $(1,1,0,1)$, $(2,1,1,1)$, $(3,1,2,1)$ lineárně závislé. □

2.2. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $(1,0,2,1)$, $(2,0,1,1)$, $(1,0,1,-1)$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^4$ nad tělesem $\mathbf{Q}$ lineárně závislá či nezávislá.

Stejně jako v předchozí úloze se ptáme, zda existuje, a v takovém případě půjde o lineárně závislé vektory, či neexistuje, což by znamenalo, že dané vektory by byly lineárně nezávislé, netriviální řešení vektorové rovnice

$$x_1 \cdot (1,0,2,1) + x_2 \cdot (2,0,1,1) + x_3 \cdot (1,0,1,-1) = (0,0,0,0)$$

Úlohu převedeme na otázku, zda existuje jednoznačné (tedy pouze triviální) řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z upravené soustavy dostáváme jednoznačné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tedy vektory $(1,0,2,1)$, $(2,0,1,1)$, $(1,0,1,-1)$ jsou lineárně nezávislé. □

3./4.11.

2.3. Rozhodněte, zda je vektor $(1,1,4)$ lineární kombinací vektorů posloupnost vektorů $(1,4,3)$, $(3,1,1)$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$. V případě kladné odpovědi najděte $x,y \in \mathbf{Z}_5$, pro něž $x \cdot (1,4,3) + y \cdot (3,1,1) = (1,1,4)$.

Ptáme se, zda existují hodnoty $x, y \in \mathbf{Z}_5$, které řeší vektorovou rovnioci $x \cdot (1,4,3) + y \cdot (3,1,1) = (1,1,4)$, tedy řešíme soustavu 3 rovnic o 2 neznámých (pro každou souřadbici dostáváme jednu rovnici) s maticí, kterou snadno upravíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Okamžitě vidíme (aniž k tomu potřebujeme využívat Frobeniovu větu), že řešení této soustavy existuje, proto $(1,1,4) \in \langle (1,4,3), (3,1,1) \rangle$ a $(x,y) = (2,3)$. □

2.4. Najděte nějakou bázi podprostoru V vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ generovaného vektory $(1,1,0,1)$, $(2,1,1,1)$, $(-1,1,2,0)$, $(0,1,3,0)$, $(3,1,2,1)$ a určete dimenzi V.

Připomeňme, že elementární úpravy provedené na posloupnost vektorů opdle Věty 3.4 z přednášky nezmění podprostor jimi generovaný. Sepíšeme-li si tedy generátory prostoru V do řádků matice a matici budeme obvyklým způsobem upravovat, budou řádky upravené matice generovat stejný vektorový prostor V. Upravíme-li řádky matice tak, aby výsledné nenulové řádky (které můžeme v souladu s pozorováním o podprostorech generovaných řádky vypustit) byly zjevně lineárně nezávislé, budou tyto nenulové řádky tvořit bázi daného prostoru. Tedy upravujme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vektory $(1,1,0,1)$, $(0,-1,1,-1)$, $(0,0,4,-1)$ jsou lineárně nezávislé, protože jsou uspořádány do Gaussovy matice a navíc generují celý prostor V, je posloupnost $(1,1,0,1)$, $(0,-1,1,-1)$, $(0,0,4,-1)$ báze V.

Protože je dimenze definována jako počet prvků (libovolné) báze, máme $\dim(V) = 3$. □

2.5. Vyberte z množiny $X = \{(2,4,0,1,4), (4,3,0,2,3), (1,2,3,4,0), (3,1,1,1,2), (4,3,4,0,2)\}$ bázi podprostoru $U = \langle X \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Potřebujeme si uvědomit, které vektory z daného seznamu jsou lineární kombinací předchozích. Seřadíme si tedy vektory do posloupnosti a budeme zjišťovat, které vektory jsou lineární kombinací předchozích členů posloupnosti. Nejprve si tedy seřadíme vektory do řádků matice, čímž máme dánu posloupnost vektorů, a tu budeme upravovat Gaussovou eliminací dokud nezískáme Gaussovu matici. Jedná se tedy o posloupnost elementárních úprav, kdy k níže položeným řádkům přičítáme výše položené řádky, případně nelze-li nějakým řádkem upravit níže položené řádky, pak takový vektor) vyměníme z níže položeným vektorem přehazujeme násob tvar. Přitom si řádky původní matice označíme římskými číslicemi a budeme zaznamenávat všechna přehazování řádků a stačí zjistit, kterým řádkům původní matice odpovídají nenulové řádky Gaussovy matice.

Poznamenejme, že je podstatné, abychom neměnili pořadí těch vektorů, pomocí nichž jsme upravovali všechny následující, tj. těch řádků matice, které už jsme použili k eliminaci následujících. Takový řádek už totiž odpovídá vektoru, který je lineárně nezávislý na předchozích a jeho případná záměna za některý z následujících vektorů pro něj samozřejmě podmínku linární nezávislosti na předchozích řádcích nemusí zachovat. V daném případě nejprve přičteme vhodné násobky prvního řádku k ostatním a poté přehodíme druhý a třetí řádek, jímž stejným způsobem vynulujeme pátý a šestý řádek:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 3 & ii \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & iii \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & iv \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 2 & v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ii \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & iii \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & iv \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & iii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iv \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{array}\right).$$

Ukázalo se, že řádek ii je násobkem řádku i a řádky iv a v jsou lineární kombinací řádků i a iii. Naopak řádek iii není lineární kombinací řádku i. Hledanou bázi tvoří například první a třetí vektor množiny X, tedy množina $\{(2,4,0,1,4),(1,2,3,4,0)\}$.

□

2.6. Doplňte lineárně nezávislou posloupnost $B = ((2,4,0,1,4),(1,2,1,0,3))$ na bázi aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^5$.

Nejprve najdeme bázi podprostoru $\langle B\rangle$ tak, aby její vektory uspořádané do matice daly Gaussovu (nebo tzv. odstupňovanou) matici.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní snadno doplníme matici na Gaussovu čtvercovou matici, jejíž všechny řádky jsou nenulové, například vektory kanonické báze (i-tý přidáme, právě když i-tý sloupec matice neobsahuje pivot) a přitom si všimneme, že:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Zřejmě má podprostor generovaný řádky matice $\mathbf{A}$ dimenzi 5, proto je podle Věty 2.22 z přednášky roven $\mathbf{Z}_5^5$. Tedy posloupnost $((2,4,0,1,4),(1,2,1,0,3),(0,1,0,0,0),$ $(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1))$ tvoří bázi $\mathbf{Z}_5^5$ rozšiřující posloupnost B.

□

2.7. Je-li podprostor $\mathbf{U} = \langle(2,4,0,1,4),(1,2,1,0,3)\rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, najděte bázi nějakého takového podprostoru $\mathbf{V}$, aby $\mathbf{U}\vee\mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^5$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.

Uvážíme, že jsme úlohu fakticky vyřešili v Příkladu 2.6 Nejprve položme $\mathbf{V} = \langle(0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\rangle$ (tedy V je podprostor generovaný těmi vektory, jimiž jsme $(2,4,0,1,4)$, $(1,2,1,0,3)$ doplnili na bázi). Potom zřejmě $\mathbf{U}\vee\mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^5$. Buď dále $\mathbf{w}\in\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$, tedy existují takové prvky $a,b,c,x,y\in\mathbf{Z}_5$, že

$$\mathbf{w} = x\cdot(2,4,0,1,4)+y\cdot(1,2,1,0,3) = a\cdot(0,1,0,0,0)+b\cdot(0,0,0,1,0)+c\cdot(0,0,0,0,1),$$

proto

$$a\cdot(0,1,0,0,0)+b\cdot(0,0,0,1,0)+c\cdot(0,0,0,0,1)-x\cdot(2,4,0,1,4)-y\cdot(1,2,1,0,3) = \mathbf{0}.$$

Protože je všech pět vektorů lineárně nezávislých, dostáváme přímo z definice lineární nezávislosti, že $a = b = c = x = y = 0$, tedy $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Dokázali jsme, že bází hledaného podprostoru $\mathbf{V}$ je tedy například posloupnost vektorů $((0,1,0,0,0),$ $(0,0,0,1,0),$ $(0,0,0,0,1))$. $\square$

10./11.11.

2.8. Uvažujme posloupnosti vektorů $\mathbf{u}_1 = (1,2,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,2,1)$ a $\mathbf{v}_1 = (0,1,1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,1), \mathbf{v}_3 = (2,1,0,2)$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_3^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_3$. Ověřte, že je posloupnost $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ linárně nezávislá a rozhodněte, zda ji lze doplnit na bázi prostoru $\mathbf{Z}_3^4$ pomocí vektorů z vybraných posloupnosti $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. V případě, že ji doplnit lze, vyberte z $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ doplňující vektory.

Nejprve uvážíme, že vektor $(1,2,1,1)$ zjevně není násobkem vektoru $(2,1,2,1)$, tedy posloupnost $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ je linárně nezávislá.

Podle Steinitzovy věty (Věta 2.13) potřebujeme ověřit, zda posloupnost $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ generuje celý vektorový. Zjistíme-li, že tato posloupnost generuje prostor dimenze 4 znamená to, že posloupnost na bázi doplnit lze a bude třeba vektory vybrat. Proto si podobně jako v úloze 2.5 rovnou očíslujeme vektory umístěné do řádku matice, kterou budeme následně gaussovsky upravovat. Předem poznamenejme, že na první 2 řádky umístíme vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, které nesmíme eliminovat pomocí ostatních, což je vzhledem k lineární nezávislosti $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ jistě splnitelný požadavek.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & i \\ 2 & 1 & 2 & 1 & ii \\ 0 & 1 & 1 & 2 & iii \\ 0 & 1 & 1 & 1 & iv \\ 2 & 1 & 0 & 2 & v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 2 & ii \\ 0 & 1 & 1 & 2 & iii \\ 0 & 1 & 1 & 1 & iv \\ 0 & 0 & 1 & 0 & v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & i \\ 0 & 1 & 1 & 2 & iii \\ 0 & 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 2 & ii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & iv \end{array}\right).$$

Nyní stejnou úvahou jako v příkladu 2.5 dostáváme závěr, že posloupnost tvořená původními řáídky i, iii, ii a iv tvoří bázi $\mathbf{Z}_3^4$, tedy vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ doplňují na bázi například vejktory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. $\square$

2.9. Najděte nějakou bázi podprostorů $\mathbf{U} = \langle(2,1,1,1),(4,2,1,3),(3,4,3,0)\rangle$, $\mathbf{V} = \langle(2,0,3,4),(1,3,1,2),(1,4,0,2)\rangle$ a $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$. vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$. Určete dále dimenzi průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

Nejprve obvyklým způsobem seřadíme generující vektory obou prostorů do řádků matic a upravíme je pomocí elementárních transformací:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Tedy například posloupnost vektorů $((2,1,1,1),(0,0,4,1))$ tvoří bázi podprostoru $\mathbf{U}$ a posloupnost $((1,0,4,2),(0,3,2,0))$ tvoří bázi poprostoru $\mathbf{V}$. Všimneme si, že žádné dva vektory v obou generujících množinách nejsou svými násobky, tedy nejsou lineárně závislé, proto každá dvojice vektorů z množiny $\{(2,1,1,1),$ $(4,2,1,3),$

$(3,4,3,0)\}$ tvoří bázi dvojdimenzionálního prostoru $\mathbf{U}$, stejně jako každá dvojice vektorů z množiny $\{(2,0,3,4),(1,3,1,2),(1,4,0,2)\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}$.

Dále si uvědomme, že $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$ je podprostor generovaný všemi vektory $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$. Stačí nám ovšem uvažovat jen báze $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$, které už jsme nalezli, tedy platí, že $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = \langle (2,1,1,1),(0,0,4,1),(1,0,4,2),(0,3,2,0)\rangle$. Bázi spojení $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$ najdeme obvyklým způsobem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že bázi $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$ tvoří například posloupnost vektorů $(2,1,1,1)$, $(0,2,1,4)$, $(0,0,4,1)$ a $(0,0,0,2)$, tedy $\dim(\mathbf{U} \vee \mathbf{V}) = 4$. To ovšem znamená, že $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^4$ a mohli jsme tedy vzít jakoukoli jinou bázi $\mathbf{Z}_5^4$, například kanonickou bázi, která by byla bazí $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$. Konečně si zbývá uvědomit, že podle Věty 2.23 (o dimenzi spojení a průniku) je $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U} \vee \mathbf{V}) = 2 + 2 - 4 = 0$. $\square$

2.10. Určete dimenzi průniku podprostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ racionálního vektorového prostoru $\mathbf{Q}^3$, je-li $\mathbf{U} = \langle (1,2,1),(1,0,2)\rangle$ a $\mathbf{V} = \langle (1,1,0),(1,-1,1)\rangle$.

Obvyklým způsobem zjistíme, že $\dim \mathbf{U} = \dim \mathbf{V} = 2$ a $\dim(\mathbf{U} \vee \mathbf{V}) = 3$, proto je podle Věty 2.23 $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} \vee \mathbf{V}) = 1$. $\square$

2.11. Najděte nějakou bázi průniku podprostorů $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_3$, jestliže $\mathbf{U} = \langle (1,1,1,1),(0,2,1,1),(0,0,1,2)\rangle$ a $\mathbf{V} = \langle (1,2,2,1)$, $(0,1,2,1)$, $(0,0,2,2)\rangle$.

Potřebujeme najít všechny vektory, které leží zároveň v $\mathbf{U}$ i ve $\mathbf{V}$, tedy které jsou zároveň lineárními kombinacemi generátorů $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$. Vyjádříme si vektor ležící v průniku rovnicí:

$$x_1 \cdot (1,1,1,1) + x_2 \cdot (0,2,1,1) + x_3 \cdot (0,0,1,2) =$$

$$= y_1 \cdot (1,2,2,1) + y_2 \cdot (0,1,2,1) + y_3 \cdot (0,0,2,2),$$

kterou upravíme do standardního tvaru

$$x_1 \cdot (1,1,1,1) + x_2 \cdot (0,2,1,1) + x_3 \cdot (0,0,1,2) + y_1 \cdot (2,1,1,2) + y_2 \cdot (0,2,1,2) + y_3 \cdot (0,0,1,1)$$

$$= (0,0,0,0).$$

Budeme hledat množinu všech řešení homogenní soustavy s maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Snadno nyní dopočítáme, že množina všech řešení soustavy je podprostor tvaru $\langle(1,2,2,1,0,0),\ (0,2,2,0,1,1)\rangle$, proto bázi prostoru všech řešení tvoří například dvojice $(1,2,2,1,0,0)$, $(0,2,2,0,1,1)$. Zjistili jsme, že:

$$1\cdot(1,1,1,1)+2\cdot(0,2,1,1)+2\cdot(0,0,1,2)=$$
$$=1\cdot(1,2,2,1)+0\cdot(0,1,2,1)+0\cdot(0,0,2,2)=(1,2,2,1),$$

a

$$0\cdot(1,1,1,1)+2\cdot(0,2,1,1)+2\cdot(0,0,1,2)=$$
$$=0\cdot(1,2,2,1)+1\cdot(0,1,2,1)+1\cdot(0,0,2,2)=(0,1,1,0).$$

Tudíž vektory $(1,2,2,1)$ a $(0,1,1,0)$ leží v podprostoru $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$. Konečně si uvědomíme, že libovolné řešení soustavy lze napsat ve tvaru

$$a_1\cdot(1,2,2,1,0,0)+a_2\cdot(0,2,2,0,1,1)=(a_1,2a_1+2a_2,2a_1+2a_2,a_1,a_2,a_2),$$

kde $a_1,a_2\in\mathbf{Z}_3$, proto lze každý vektor z průniku vyjádřit:

$$a_1\cdot(1,1,1,1)+(2a_1+2a_2)\cdot(0,2,1,1)+(2a_1+2a_2)\cdot(0,0,1,2)=$$
$$=a_1\cdot(1,2,2,1)+a_2\cdot(0,1,1,0).$$

Tím jsme zjistili, že každý vektor z podprostoru $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ lze napsat ve tvaru $a_1\cdot(1,2,2,1)+a_2\cdot(0,1,1,0)$, tedy posloupnost $((1,2,2,1),(0,1,1,0))$ podprostor $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ generuje. Zjevně se jedná o množinu lineárně nezávislou, tedy jde o bázi průniku. Není přitom těžké si uvědomit, že výsledné vektory budou jistě lineárně nezávislé, jestliže jsme hledali jejich souřadnice vzhledem k bázím prostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$.

Závěrem si ještě všimněme, že jsme soustavu nemuseli dopočítávat, neboť nám stačilo najít souřadnice báze řešení odpovídající proměnným y_i (tj. poslední 3 souřadnice) nebo x_i (tj. první 3 souřadnice). □

18./24.11.

3. Hodnost matice a soustavy lineárních rovnic

3.1. Určete nad tělesy $\mathbf{R}$ a $\mathbf{Z}_5$ hodnost matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}$ a matice $\mathbf{A}^T$.

Připomeňme, že hodností maticr rozumíme dimenzi podprostoru generovaného řádky matice, kterou můžeme spočítat jako počet nenulových řádků příslušné Gaussovy matice (viz Věta 4.9 z přednášky). Upravujme tedy naší matici posloupností elementárních úprav nejprve nad tělesem reálných čísel:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-5\\0&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že nad tělesem $\mathbf{R}$ hodnost $h(\mathbf{A})=3$. Věta 5.5 z přednášky nám říká, že $h(\mathbf{A})=h(\mathbf{A}^T)$, proto $h(\mathbf{A}^T)=3$. Podobně určíme hodnost $\mathbf{A}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Tedy nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ je $h(\mathbf{A})=h(\mathbf{A}^T)=2$. □

18.9.

3.2. Rozhodněte, zda lze nad reálnými čísly převést posloupnpstí elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Budeme-li matici $\mathbf{C}$ definovat jako matici obsahující postupně všechny řádky matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B}$, stačí nám zjistit, zda $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{C})$. Předpokládáme-li, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{C})$, pak podprostory generované řádky matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ (a tedy i $\mathbf{C}$) jsou shodné, proto řádky $\mathbf{B}$ je možné dostat jako lineární kombinaci řádků $\mathbf{A}$ a obráceně. V opačném případě by podprostory generované řádky matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ byly různé, tudíž by nebylo možné matici $\mathbf{A}$ posloupností elementárních úprav převést na matici $\mathbf{B}$. Okamžitě vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$. Zbývá standardním způsobem určit hodnost matice $\mathbf{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že $h(\mathbf{C}) = 3$, proto matici $\mathbf{A}$ nelze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici $\mathbf{B}$. □

3.3. Rozhodněte, zda lze nad tělesem racionálních čísel převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ na matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Postupujeme-li obdobně jako v předchozí úloze, zjistíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = 2$ a

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy i $h(\mathbf{C}) = 2$. Matici $\mathbf{A}$ proto lze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici $\mathbf{B}$.

Všimněme si, že jsme také mohli postupovat přímo, t.j. uvědomit si, že oba řádkové vektory $(1, 0, -1)$ a $(1, 3, 5)$ matice $\mathbf{B}$ dostaneme jako lineární kombinaci řádkových vektorů matice $\mathbf{A}$. □

3.4. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ všechna řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Potřebujeme upravit matici $\mathbf{A}$ na Gaussovu matici. Nejprve přičteme druhý řádek ke třetímu a trojnásobek prvního k druhému:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní si uvědomme, že jsme zjistili hodnost matice $\mathbf{A}$, konkrétně $h(\mathbf{A}) = 3$. Podle Věty 5.8 je množina všech řešení naší soustavy poprostorem vektorového porstoru

$\mathbf{Z}_5^5$ dimenze $5 - h(\mathbf{A}) = 5 - 3 = 2$. Potřebujme tedy najít bázi tohoto podprostoru. Vidíme, že získané Gaussova matice $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$ má pivotální, tj. první nenulové, pozice v prvním, třetím a čtvrtém sloupci. To znamená, že můžeme volit hodnoty x_2 a x_5. Vezmeme-li za (x_2, x_5) postupně vektory kanonické (nebo nějaké jiné) báze $\mathbf{Z}_5^2$ a dopočítáme-li hodnoty x_1, x_3 a x_4, budou nalezené vektory řešení lineárně nezávislé, tedy nutně půjde o hledanou bázi. Položíme-li tedy $x_2 = 1$ a $x_5 = 0$, pak snadno najdeme vektor $(3, 1, 0, 0, 0)$ řešící soustavu a podobně pro volbu $x_2 = 0$ a $x_5 = 1$ dostáváme řešení $(1, 0, 2, 3, 1)$.

Spočítali jsme, že množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$ je podprostor $\langle (3, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 2, 3, 1) \rangle$. □

3.5. Existuje nějaký vektor pravých stran $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}_5^3$, pro který neexistuje žádné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, kde $\mathbf{A}$ je matice z úlohy 3.4?

Stačí aplikovat Frobeniovu větu (Věta 5.6), která říká, že řešení obecné soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ existuje právě tehdy, když je hodnost matice $\mathbf{A}$ stejná jako hodnost rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$. Poznamenejme, že vždy platí nerovnost $h(\mathbf{A}) \leq h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$. Protože jsme zjistili, že $h(\mathbf{A}) = 3$ a matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T)$ má tři řádky, tedy $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T) \leq 3$, vidíme, že $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}^T) = 3$, a proto je soustava $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ řešitelná pro každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}_5^3$. □

3.6. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ všechna řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1, 2, 4)^T$, kde $\mathbf{A}$ je matice z úlohy 3.4.

Díky Větě 5.7 nám stačí najít jedno řešení $\mathbf{u}$ nehomogenní soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1, 2, 4)^T$. Každé řešení potom budou právě tvaru $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ pro vhodné řešení $\mathbf{w}$ homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$. Postupujeme analogicky výpočtu v příkladu 3.4. Nejprve rozšířenou matici stejnými elementárními úpravami upravíme na Gaussovu matici a poté dopočítáme řešení například pro volbu $x_2 = 0$ a $x_5 = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Soustavu tedy řeší například vektor $(2, 0, 3, 1, 0)$, tedy množina všech řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1, 2, 4)^T$ je tvaru $(1, 0, 3, 1, 0) + \langle (3, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 2, 3, 1) \rangle$ □

3.7. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ všechna řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1, 1, 1)^T$ s maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Opět upravíme rozšířenou matici soustavy na Gaussovu matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Protože je hodnost matice homogenní soustavy rovnic menší než hodnost rozšířenou matici soustavy, zřejmě je množina všech řešení soustavy prázdná. □

4. Obecné vektorové prostory

4.1. Dokažte, že množina komplexních čísel $\mathbf{C}$ tvoří s obvyklým sčítáním a násobením vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$.

Je třeba zcela přímočaře ověřit platnost axiomatiky vektorového prostoru. Přitom víme, že $\mathbf{C}$ je se sčítáním a násobením těleso, odkud okamžitě dostáváme asociativitu a komutativitu sčítání, stejně jako existenci nulového vektoru (0). Protože $r(c+d) = rc + rd$ pro všechna komplexní r, c, d platí tato rovnost i v případě, že zvolíme $r \in \mathbf{R}$. Stejný argument ukazuje, že pro každé $r, s \in \mathbf{R}$ a $c \in \mathbf{C}$ máme $(r+s)c = rc + sc$ a $(rs)c = r(sc)$. Konečně zřejmě $1c = c$. $\square$

4.2. Najděte nějakou bázi a určete dimenzi $\mathbf{C}$ jako vektorového prostoru nad tělesem $\mathbf{R}$.

Protože $\mathbf{C} = \{a + bi |\ a, b \in \mathbf{R}\}$, okamžitě vidíme, že posloupnost $1, i$ generuje $\mathbf{C}$ nad $\mathbf{R}$. Předpokládáme-li, že $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$ pro nějaká reálná $a, b \in \mathbf{R}$, pak nutně $a = b = 0$, čímž jsme ověřili, že $1, i$ je báze $\mathbf{C}$ nad $\mathbf{R}$, tedy $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$. $\square$

4.3. Rozhodněte, zda dvojice komplexních čísel $3 - i$, $2 + 3i$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{C}$ nad tělesem $\mathbf{R}$.

Díky tomu, že jsme v předchozím příkladu spočítali, že $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$, stačí zjistit, zda je dvojice $3 - i$, $2 + 3i$ lineárně nezávislá nebo generující, zbývající vlastnost je totiž podle Věty 2.19 důsledkem každé z nich. Ukážeme například, že jde o lineárně nezávislou množinu. Jestliže $0 = a(3 - i) + b(2 + 3i) = (3a + 2b) + (-a + 3b)i$, tedy z reálné i imaginární části dostáváme jednu rovnici:
$\begin{array}{rcrl} 3a & + & 2b & = 0 \\ -a & + & 3b & = 0 \end{array}$ a řešíme homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, která má zjevně hodnost 2, tedy pouze triviální řešení.

Tím jsme dokázali, že je dvojice $3 - i$, $2 + 3i$ lineárně nezávislá, tedy jde o bázi $\mathbf{C}$ nad $\mathbf{R}$. $\square$

4.4. Najděte nenulový reálný polynom stupně (nejvýše) 2, jehož kořenem je komplexní číslo $3 - i$.

Stačí když uvážíme, že jsou vektory $(3-i)^0 = 1$, $(3-i)^1 = 3 - i$ a $(3-i)^2 = 8 - 6i$ nad tělesem $\mathbf{R}$ nutně lineárně závislé, tedy existuje trojice $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, pro níž $a_0 + a_1(3 - i) + a_2(8 - 6i) = 0$. Obdobnou úvahou jako v předchozím příkladu zjistíme, že potřebujeme vyřešit homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Snadno zjistíme, že řešením je například trojice $(a_0, a_1, a_2) = (10, -6, 1)$, proto je komplexní číslo $3 - i$ kořenem polynomu $x^2 - 6x + 10$. $\square$

4.5. Najděte všechny reálné polynom stupně nejvýše 2, jejichž kořenem je komplexní číslo $3 - i$.

V předchozí úloze jsme si uvědomili, že každý takový polynom odpovídá řešení homogení soustavy lineárních rovnic s maticí typu (2,3) hodnosti 2. Protože je množina všech řešení podprostor dimenze 1, jsou hledané reálné polynomy tvaru $rx^2 - 6rx + 10r$ pro libovolné reálné $r \in \mathbf{R}$. $\square$

25.10./1.11.

4.6. Dokažte, že množina reálných čísel $\mathbf{R}$ tvoří s obvyklým sčítáním a násobením vektorový prostor nad tělesem racionálních čísel $\mathbf{Q}$.

Argumenmtace je shodná s argumentací v úloze 4.1. $\square$

4.7. Dokažte, že množina reálných čísel $\mathbf{R}$ tvoří s obvyklým sčítáním a násobením vektorový prostor nad tělesem racionálních čísel $\mathbf{Q}$.

Argumentace je shodná s argumentací v úloze . $\square$

4.8. Dokažte, že je množina $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}|\ a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ podprostor racionálního vektorového prostoru $\mathbf{R}$ a navíc, že $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Stačí pro libovolné $d, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_3 \in \mathbf{Q}$ nahlédnout, že

$$(a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4})+(a_2+b_2\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt[3]{2}+(c_1+c_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$$

a dále, že

$$d(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) = da_1 + db_1\sqrt[3]{2} + dc_1\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$$

a konečně, že $(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}) =$

$$= (a_1a_2+2b_1c_2+2c_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2+2c_1c_2)\sqrt[3]{2}+(a_1c_2+c_1a_2+b_1b_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}].$$

$\square$

4.9. Najděte nenulový racionální polynom stupně (nejvýše) 3, jehož kořenem je reálné číslo $1 - \sqrt[3]{2}$.

Uvažujeme stejně jako v úloze 4.4. Opět si všimneme, že $\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]) \leq 3$, proto jsou vektory $(1 - \sqrt[3]{2})^0 = 1$, $(1 - \sqrt[3]{2})^1 = 1 - \sqrt[3]{2}$, $(1 - \sqrt[3]{2})^2 = 1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ a $(1 - \sqrt[3]{2})^3 = -1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ nad tělesem $\mathbf{Q}$ lineárně závislé. Najdeme tedy opět netriviální řešení vektorové rovnice

$$a_0 + a_1(1 - \sqrt[3]{2}) + a_2(1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + a_3(-1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}) = 0,$$

která vede na homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že řešením je čtveřice $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 3, -3, 1)$, tudíž je číslo $1 - \sqrt[3]{2}$ kořenem polynomu $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. $\square$

4.10. Dokažte, že množina reálných polynomů jedné neurčité $\mathbf{R}[x]$ tvoří nad tělesem $\mathbf{R}$ vektorový prostor.

Stačí přímočaře ověřit platnost axiomatiky vektorového prostoru pro sčítání polynomů a pro násobení polynomu reálným číslem. □

4.11. Dokažte, že vektorový prostor $\mathbf{R}[x]$ není nad tělesem $\mathbf{R}$ konečné dimenze.

Předpokládejme, že M je nějaká konečná množina polynomů a označme m maximum ze stupňů polynomů v M. Potom polynom x^{m+1} neleží v $\langle M \rangle$, tedy $\mathbf{R}[x]$ nemůže být konečné dimenze. □

4.12. Ověřte, že množina $X = \{x^i \mid i \geq 0\}$ tvoří bázi reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}[x]$.

Zřejmě je každý polynom lineární kombinací (konečně mnoha) polynomů z X. Položíme-li nule nějakou lineární kombinaci $a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = 0$, pak všechna $a_i = 0$, tedy přímo z definice vidíme, že X je lineárně nezávislá množina. □

Další úlohy

(1) Určete dimenzi vektorového prostoru komplexních čísel $\mathbf{C}$ nad tělesem $\mathbf{R}$.
(2) Dokažte, že vektorový prostoru reálných čísel $\mathbf{R}$ nad tělesem racionálních čísel $\mathbf{Q}$ není konečné dimenze.
(3) Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $(1, 3, 2, 1)$, $(3, 0, 1, 1)$, $(1, 4, 2, 4)$ lineárně závislá ve vektorovém prostorech $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{C}^4$, $\mathbf{Z}_5^4$ a $\mathbf{Z}_7^4$.
(4) Najděte nějakou bázi a určete dimenzi podprostoru $\langle (1, 3, 2, 1), (3, 0, 1, 1), (1, 4, 2, 4) \rangle$ vektorových prostorů $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{C}^4$, $\mathbf{Z}_5^4$ a $\mathbf{Z}_7^4$.
(5) Najděte všechny podmnožiny množiny vektorů $X = \{(1, 2, 1, 1, 1), (3, 1, 3, 3, 3), (2, 4, 2, 2, 2), (1, 0, 1, 3, 2)\}$, které tvoří bázi podprostoru $U = \langle X \rangle$ vektorových prostorů $\mathbf{Q}^5$, $\mathbf{Z}_5^5$, $\mathbf{Z}_7^5$.
(6) Kolik existuje bází podprostoru $\langle (1, 1, 2, 0), (4, 1, 3, 1), (1, 3, 2, 1) \rangle$ vektorových prostorů $\mathbf{Z}_5^4$ a $\mathbf{Z}_7^4$?
(7) Kolika způsoby lze lineárně nezávislou posloupnost $((1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 0))$ doplnit na bázi (chapanou jako posloupnost, tj. záleží na pořadí prvků) vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^4$?
(8) Buď n přirozené číslo, p prvočíslo a $\mathbf{U}$ podprostor vektorového prostoru $\mathbf{Z}_p^n$ nad tělesem $\mathbf{Z}_p$. Určete kolik existuje podprostorů $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{Z}_p^n$, pro něž platí, že $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^5$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.
(9) Určete dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U} \vee \mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ vektorových prostorů $\mathbf{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$, jestliže $\mathbf{U} = \langle (1, 2, 1, 3), (1, 2, 4, 1), (3, 4, 1, 0) \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle (4, 1, 2, 3), (0, 3, 3, 1), (1, 2, 1, 3) \rangle$.
(10) Uvažujme podprostor $\mathbf{W} = \langle (1, 6, 2, 4, 5) \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. Najděte báze nějakých takových podprostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$, aby $\dim(\mathbf{U}) = \dim(\mathbf{V}) = 3$, $\mathbf{U} \vee \mathbf{V} = \mathbf{Z}_7^5$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \mathbf{W}$.
(11) Uvažujme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ z příkladu 3.3. Najděte nějakou posloupností elementárních řádkových úprav, pomocí nichž lze převést matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$.

(12) Určete nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, matice $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.

(13) Najděte nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ všchna řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$ z předchozí úlohy.

(14) Najděte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$ a $\mathbf{Z}_7$ všechna řešení nehomogenní soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.