3. Skalární součin

3.1. Dokažte, že je zobrazení $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ skalární součin na $\mathbf{R}^2$ a najděte nějakou jeho ortonormální bázi.

Nad reálným vektorovým prostorem potřebujeme zjistit, zda je f pozitivně definitní symetrická bilineární forma. Snadno nahlédneme, že se jedná o bilineární formu s maticí $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vidíme, že je $[f]_{K_2}$ symetrická matice, proto je f symetrická bilineární forma. Označíme-li $\mathbf{A} = [f]_{K_2}$, pak nám stačí spočítat $\det(5) = 5$ a $\det \mathbf{A} = 4$, tudíž díky Důsledku 13.17 je f skalární součin

Protože ortogonální báze f reálného skalárního součinu je právě polární bází f a ortonormální báze, $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ je ortogonální báze splňující navíc podmínku $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 1$, stačí najít standardním postupem vhodnou polární bázi

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Našli jsme ortonormální bázi $B = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0,1))$. □

3.2. Najděte nějakou ortonormální bázi skalárního součinu h s maticí $[h]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi.

Budeme stejně jako v předchozí úloze hledat pomocí symetrických úprav bázi, vůči níž má pozitivně definitní symetrická bilineární forma h právě jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Našli jsme ortonormální bázi $M = ((1,0,0), (1,1,0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}))$. □

3.3. Nechť $B = ((1,0,1), (1,1,0), (0,1,1))$ je ortonormální báze vzhledem ke skalárnímu součinu $\cdot$ na $\mathbf{R}^3$.

(a) Spočítejte $(1,0,1) \cdot (0,1,1)$, $(1,0,1) \cdot (1,1,1)$ a $(2,1,1) \cdot (2,3,1)$,
(b) najděte matici $\mathbf{A}$, pro níž $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^T$.
(c) označíme-li ω standardní skalární součin, najděte takový izomorfismus $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, aby $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \omega(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$,
(d) určete matice φ a φ^{-1} z (c) vzhledem ke kanonické bázi.

(a) Nejprve si všimněme, že $(1,0,1)$ a $(0,1,1)$ jsou dva různé vektory ortonormální báze, proto z definice ortonormality $(1,0,1) \cdot (0,1,1) = 0$.

Připomeňme, že $\cdot$ je pozitivně definitní symetrická bilineární forma na $\mathbf{R}^3$, tedy ze zadání je jasná matice $\cdot$ vzhledem k bázi B, tj. $[\cdot]_B = \mathbf{E}$. Známe-li souřadnice vektoru vzhledem k bázi B, obvyklým způsobem spočítáme hodnotu bilineární formy. Vidíme (nebo spočítáme), že $\{(1,0,1)\}_B = (1,0,0)$, $\{(1,1,1)\}_B = \frac{1}{2}(1,1,1)$, $\{(2,1,1)\}_B = (1,1,0)$ a $\{(2,3,1)\}_B = (0,2,1)$, proto

$$(1,0,1)\cdot(1,1,1) = \{(1,0,1)\}_B \mathbf{E}\{(1,1,1)\}_B^T = (1,0,0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = 1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$(2,1,1)\cdot(2,3,1) = \{(2,1,1)\}_B \mathbf{E}\{(2,3,1)\}_B^T = (1,1,0)\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 2.$$

(b) Potřebujeme najít právě matici $\cdot$ vzhledem ke kanonické bázi:

$$\mathbf{A} = [1]_{K_3B}^T[\cdot]_B[1]_{K_3B} = ([1]_{BK_3}^T)^{-1}[1]_{BK_3}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}.$$

Stačí tedy určit $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, a potom

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}.$$

(c) Uvážíme-li, že danou podmínku mají splňovat i vektory jakékoli ortonormální báze $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, tedy, že $\delta_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \omega(\varphi(\mathbf{b}_i), \varphi(\mathbf{b}_j))$, vidíme, že hledaný izomorfismus φ zobrazí nutně ortonormální bázi vzhledem k $\cdot$ ortonormální bázi vzhledem k ω. Protože kanonická báze K_3 je ortonormální vzhledem k ω, položme $\varphi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3$. Tím máme jednoznačně zadán izomorfismus $\varphi(\mathbf{v}) = \{\mathbf{v}\}_B$, o němž díky linearitě v obou složkách nahlédneme, že splňuje požadovanou podmínku.

(d) Protože $\varphi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$, máme $\varphi^{-1}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{b}_i$, odkud okamžitě z definice matice endomorfismu dostáváme, že $[\varphi^{-1}]_{K_3} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$. Konečně $[\varphi]_{K_3} = [\varphi^{-1}]_{K_3}^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$. □

29.3.

3.4. Uvažujme standardní skalární součin ω na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$.

(a) Ověřte, že $B = ((\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}))$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^3$ vzhledem $\cdot$,

(b) spočítejte souřadnice $\{(0,0,1)\}_B$, $\{(2,1,0)\}_B$ a $\{(1,2,3)\}_B$,

(c) ověřte, že $C = ((0,0,1), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0))$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^3$ vzhledem $\cdot$,

(d) označme $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, $C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ a dokažte, že pro izomorfismus ψ jednoznačně určený podmínkou $\psi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$, kde $i = 1,2,3$, platí $\|\mathbf{u}\| = \|\psi(\mathbf{u})\|$ pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$,

(e) Rozhodněte, zda jsou matice $[1]_{BK_3}$, $[1]^T_{BK_3}$, $[1]_{K_3B}$, $[1]^T_{K_3B}$, $[1]_{CK_3}$, $[1]^T_{CK_3}$, $[1]_{BC}$ a $[1]^T_{BC}$ ortogonální,

(f) najděte matici izomorfismu ψ a izomorfismu ψ^{-1} vzhledem ke kanonickým bázím.

(a) Podle definice spočítáme

$$\begin{aligned}
\omega((\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})) &= 3\cdot(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 1,\\
\omega((\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)) &= \frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}} = 0,\\
\omega((\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})) &= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{18}} = 0,\\
\omega((\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)) &= 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1,\\
\omega((\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})) &= \cdot\frac{1}{\sqrt{12}}-\frac{1}{\sqrt{12}} = 0,\\
\omega((\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})) &= 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{6}})^2+(\frac{2}{\sqrt{6}})^2 = 1,
\end{aligned}$$

tedy zjistili jsme, že B je ortonormální posloupnopst, tedy lineárně nezávislá posloupnost. Protože jde o tříprvkovou lineárně nezávislou posloupnost ve vektorovém prostoru dimenze 3, musí jít o bázi a $[\omega]_B = \mathbf{E}$. Poznamenejme, že jsme maticově náš výpočet mohli stručně zapsat ve formě $[1]^T_{BK_3}\cdot[1]_{BK_3} = \mathbf{E}$.

(b) Připomeňme, že pro každou ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$ a pro každý vektor $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3$ platí $\{\mathbf{v}\}_B = (\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{v},\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{v},\mathbf{b}_3\cdot\mathbf{v})$, proto

$$\{(0,0,1)\}_B = (1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}},1\cdot 0,1\cdot\frac{-2}{\sqrt{6}}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2},0,-2),$$

dále

$$\{(2,1,0)\}_B = (\frac{2+1}{\sqrt{3}},\frac{2-1}{\sqrt{2}},\frac{2+1}{\sqrt{6}}) = (\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}),$$

$$\{(1,2,3)\}_B = (\frac{1+2+3}{\sqrt{3}},\frac{1-2}{\sqrt{2}},\frac{1+2-3\cdot 2}{\sqrt{6}}) = (2\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}).$$

(c) Stejně jako v (a) přímočaře spočítáme, že $[\omega]_C = \mathbf{E}$.

(d) Položme $\{\mathbf{v}\}_B = (v_1,v_2,v_3)$ a $[\mathbf{w}]_B = (w_1,w_2,w_3)$. Ověříme, že $\omega(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \omega(\psi(\mathbf{v}),\psi(\mathbf{w}))$:

$$\omega(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\sum_{i=1}^{3} v_i\mathbf{b}_i)\cdot(\sum_{j=1}^{3} w_j\mathbf{b}_j) = \sum_{i,j\le 3} v_iw_j(\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^{3} v_iw_i$$

a podobně

$$\omega(\psi(\mathbf{v}),\psi(\mathbf{w})) = (\sum_{i=1}^{3} v_i\psi(b_i))\cdot(\sum_{j=1}^{3} w_j\psi(b_j)) = \sum_{i,j\le 3} v_iw_j(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_j) = \sum_{i=1}^{3} v_iw_i,$$

čímž jsme dokázali, že $\omega(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \omega(\psi(\mathbf{v}),\psi(\mathbf{w}))$, a proto $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\omega(\mathbf{u},\mathbf{u})} = \sqrt{\omega(\psi(\mathbf{u}),\psi(\mathbf{u}))} = \|\psi(\mathbf{u})\|$.

(e) Matice $[1]^T_{BK_3}$ a $[1]^T_{CK_3}$ obsahují v řádcích ortonormální bázi, tedy jde o ortogonální matice přímo podle definice. Protože $[1]_{K_3B} = [1]^{-1}_{BK_3} = [1]^T_{BK_3}$ a

$[1]_{BK_3} = [1]^{-1}_{K_3B} = [1]^T_{K_3B}$ je ortogonální matice podle Věty 2.10, vidíme, že $[1]_{BK_3}$, $[1]_{K_3B}$, $[1]_{K_3C}$ a $[1]_{CK_3}$ jsou opět ortogonální matice. Konečně vezmeme-li dvě ortogonální matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$, pak

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}\cdot(\mathbf{M}\cdot\mathbf{N})^T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}^T\cdot\mathbf{M}^T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{M}^T = \mathbf{E},$$

tedy součin $\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}$ je opět ortogonální. Nyní zbývá připomenout, že

$$[1]_{BC} = [1]_{K_3C}\cdot[1]_{BK_3},$$

kde jsou matice $[1]_{K_3C}$ a $[1]_{BK_3}$ ortogonální, proto je i matice $[1]_{BC}$ ortogonální. Konečně $[1]_{CB} = [1]^{-1}_{BC} = [1]^T_{BC}$ je ortogonální matice díky Větě 2.10.

(f) Označme $[\psi]_{K_3}$ matici ψ vzhledem ke kanonickým bázím, tj. matici $[\psi]_{K_3K_3}$. Z definice ψ okamžitě plyne, že $[\psi]_{BK_3} = [1]_{CK_3}$, proto podle Věty 2.10 (a Věty 10.6)

$$[\psi]_{K_3} = [\psi]_{BK_3}\cdot[1]_{K_3B} = [1]_{CK_3}\cdot[1]_{K_3B} = [1]_{CK_3}\cdot[1]^{-1}_{BK_3} = [1]_{CK_3}\cdot[1]^T_{BK_3}$$

Tedy vynásobíme-li

$$[\psi]_{K_3} = [1]_{CK_3}\cdot[1]^T_{BK_3} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

dostaneme $[\psi]_{K_3} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+1 & -2\sqrt{3}+1 & -2 \\ \sqrt{3}-2 & -\sqrt{3}-2 & 4 \\ \sqrt{10} & \sqrt{10} & \sqrt{10} \end{pmatrix}$.

Protože je matice $[\psi]_{K_3} = [1]_{CK_3}\cdot[1]^T_{BK_3}$ ortogonální máme

$$[\psi^{-1}]_{K_3} = [\psi]^{-1}_{K_3} = [\psi]^T_{K_3} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-2 & \sqrt{10} \\ -2\sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}-2 & \sqrt{10} \\ -2 & 4 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

□

3.5. Uvažujme standardní skalární součin ω na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ a nechť $V = \langle(1,1,0),(1,3,2)\rangle$.

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru V,
(b) najděte ortogonální bázi V obsahující vektor $(2,4,2)$,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(2,2,-1)$ do podprostoru V,
(d) spočítejte bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
(e) určete ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3)$ prostoru $\mathbf{R}^3$, pro niž $V = \langle\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\rangle$.

(a) Budeme upravovat například bázi $((1,1,0),(1,3,2))$ Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací. Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(1,1,0)\|}(1,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. Dále hledáme vektor $\mathbf{u}_2$ ve tvaru $\mathbf{u}_2 = (1,3,2) + c\cdot\mathbf{v}_1$. Z podmínky $\omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = 0$ dostáváme, že $c = -\mathbf{v}_1\cdot(1,3,2) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$, proto $\mathbf{u}_2 = (-1,1,2)$. Nyní vektor $\mathbf{u}_2$ normalizujeme a dostanme $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|-1,1,2\|}(-1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.

Hledanou ortonormální bází V je tedy posloupnost $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2))$.

(b) Postupujeme obdobně jako v (a) jen zvolíme bázi V začínající vektorem $(2,4,2)$, například bázi $((2,4,2),(1,1,0))$. Nyní opět použijeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci, tentokrát ovšem nebudeme normalizovat:

Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = (2,4,2)$ a hledáme vektor $\mathbf{v}_2$ ve tvaru $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)+c\cdot\mathbf{v}_1$. Z podmínky $\omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = 0$ tentokrát dostáváme, že $c = -\frac{\omega(\mathbf{v}_1,(1,1,0))}{\omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}$, proto $\mathbf{v}_2 = (1,1,0) - \frac{1}{4}\cdot(2,4,2) = \frac{1}{2}(1,0,-1)$.

Hledanou ortogonální bází V je tedy posloupnost $((2,4,2),\frac{1}{2}(1,0,-1))$ nebo posloupnost $((2,4,2),(1,0,-1))$.

(c) Na přednášce bylo dokázáno, že podobně jako v úloze 3.4 lze souřadnice ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor V vzhledem k ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)$ spočítat pomocí jako Fourierovy koeficienty, tj. označíme-li $\mathbf{v}_\mathbf{u} \in V$ ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ na V, pak $\{\mathbf{v}_\mathbf{u}]_B = (\omega(\mathbf{b}_1,\mathbf{v}),\omega(\mathbf{b}_2,\mathbf{v}))$. Tedy využijeme-li nalezené ortonormální báze $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2))$ z úlohy (a), máme $\{\mathbf{v}_{(2,2,-1)}] = (\frac{1}{\sqrt{2}}\omega((1,1,0),(2,2,-1)),\frac{1}{\sqrt{6}}\omega((-1,1,2),(2,2,-1))) = (\frac{4}{\sqrt{2}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$, a proto

$$\mathbf{v}_\mathbf{u} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \frac{1}{3}(7,5,-2).$$

Na závěr si zkontrolujme, že $\mathbf{u}-\mathbf{v}_\mathbf{u}$ leží v ortogonálním doplňku V, tedy, že je vektor $(2,2,-1) - \frac{1}{3}(7,5,-2) = \frac{1}{3}(-1,1,-1)$ kolmý na všechny (bázické) vektory V.

(d) Na konci úlohy (c) jsme našli vektor $(-1,1,-1)$ kolmý na celý prostor V. Protože musí mít (nejen) ortogonální doplněk V v $\mathbf{R}^3$ mít dimenzi $3-2=1$, našli jsme jeho bázi $(-1,1,-1)$.

(e) V (a) jsme nalezli ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2))$ prostoru V a v (d) bázický vektor $(-1,1,-1)$ podprostoru $V^\perp$. Stačí tedy poslední vektor normalizovat, tj. položíme-li $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$ $\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$, dostáváme ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3)$ požadovaných vlastností. □

3.6. Buď $M = ((1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,1,1))$ báze reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem ω. Najděte ortonormální takovou bázi $B = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbf{R}^3$, aby $\langle(1,1,0)\rangle = \langle\mathbf{v}_1\rangle$ a $\langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle = \langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle$.

Postupujme opět Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.
2. $\mathbf{v}_2' = (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\omega((1,1,0),(0,1,1))\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,1,2)$. Proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.
3. Předně $\omega(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),(1,1,1)) = \sqrt{2}$ a $\omega(\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),(1,1,1)) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, proto $\mathbf{v}_3' = (1,1,1) - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \frac{1}{3}(1,-1,1)$. Konečně $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\frac{1}{3}(1,-1,1))$. □

5.4.

3.7. Uvažujme standardní skalární součin ω na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru $U = \langle(1,2,1,1,1),(0,-1,1,1,2)\rangle$.

Připomeňme, že

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^5 |\ \omega(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0 \forall\, \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^5 |\ \omega(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0 \forall\, \mathbf{u} \in B\},$$

kde B je nějaká báze U. Snadno uvážíme, že potřebujeme najít právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Tedy bázi $U^\perp$ tvoří například vektory $(-3,1,1,0,0), (-3,1,0,1,0), (-5,2,0,0,1)$. □

3.8. Nechť ω je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$.

(a) najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \langle(1,1,-2,1),(2,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$,
(b) najděte nějakou ortogonální bázi podprostoru $U = \langle(1,1,0,1),(1,0,1,1)\rangle$,
(c) najděte nějakou ortogonální bázi ortogonálního doplňku $U^\perp$,
(d) najděte ortogonální rozklad vektoru $(1,2,0,0)$ vyhledem k podprostoru U, tj. jednoznačně určené vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1,2,0,0) = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$.
(e) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(-1,1,0,4)$ do podprostoru $W = \langle(1,2,1,-1),\ (1,1,0,1)\rangle$.

(a) Nejprve zvolíme vhodnou bázi prostoru V, kterou budeme ortogonalizovat pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace. Vektor $(2,0,1,0)$ je zřejmě kolmý na zbývající vektory, zvolme tedy bázi V, tak aby byl vektor $(2,0,1,0)$ na jejím prvním místě. Tedy ortogonalizujme například bázi $((2,0,1,0),(0,1,0,1),(1,1,-2,1))$. Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci tentokrát mírně modifikujeme: najdeme nejprve ortogonální bázi a tu budeme normalizovat až na závěr.

Už jsme všimli, že $\omega((2,0,1,0),(0,1,0,1)) = 0$, tedy máme první dva (zatím jen ortogonální, nikoli ortonormální) vektory hledané báze: $\mathbf{v}_1' = (2,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2' = (0,1,0,1)$. Nyní budeme hledat třetí bázický vektor ve tvaru $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1) - c_1\,\mathbf{v}_1' - c_2\,\mathbf{v}_2'$. Přitom má splňovat podmínky, že $\omega(\mathbf{v}_i', \mathbf{v}_3') = 0$ pro $i = 1,2$, z čehož využitím linearity skalárního součinu v druhé složce dostáváme, že

$$c_1 = \frac{\omega((1,1,-2,1),(2,0,1,0))}{\omega_2((2,0,1,0))} = 0, \quad c_2 = \frac{\omega((1,1,-2,1),(0,1,0,1))}{\omega_2((0,1,0,1))} = -1.$$

Všimněme si, že koeficient je roven 0 díky volbě vektoru $\mathbf{v}_1'$ kolmého na všechny následující vektory, proto nám stačilo hledat ortogonální bázi podprostoru $\langle(1,1,-2,1),(0,1,0,1)\rangle$, která musí být kolmá na vektor $(2,0,1,0)$. Tedy $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1) - (0,1,0,1) = (1,0,-2,0)$ je posledním hledaným kolmým vektorem. Posloupnost vektorů $((2,0,1,0),(0,1,0,1),(1,0,-2,0))$ tvoří zřejmě ortogonální bázi prostoru V. Zbývá nám jednotlivé vektory normalizovat: $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_1'}{\|\mathbf{v}_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v}_3'}{\|\mathbf{v}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)$, Ortonormální bází je tedy například posloupnost vektorů $(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)$.

(b), (c) Můžeme postupovat několika způsoby. Jednak můžeme doplnit vektory $(1,1,0,1),(1,0,1,1)$ na bázi celého prostoru $\mathbf{R}^4$ (například vektory $(1,0,0,0)$ a $(0,1,0,0)$) a tuto bázi upravit Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. První dva vektory ortogonalizované báze budou přitom tvořit ortogonální bázi U, další dva vektory budou tvořit ortogonální bázi doplňku $U^\perp$.

Rovněž nám stačí najít libovolnou bázi $U^\perp$ (například týmž postupem z 3.7) a obě báze ortogonalizovat. Postupujme druhým způsobem: Bázi $U^\perp$ tvoří například posloupnost $(-1,1,1,0)$, $(0,1,1,-1)$. Vektor $(0,1,1,-1)$ můžeme upravit jedním krokem Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

$$(0,1,1,-1) - \frac{\omega((-1,1,1,0),(0,1,1,-1))}{3}(-1,1,1,0) = \frac{1}{3}(2,1,1,-3),$$

a proto posloupnost $(-1,1,1,0),(2,1,1,-3)$ tvoří ortogonální bázi $U^{\perp}$.

Obdobně $((1,1,0,1),\ (1,-2,3,1))$ tvoří ortogonální bázi U.

(d) V úlohách (b), (c) jsme našli ortogonální báze podprostorů U a $U^{\perp}$, z kterých pouhou normalizací dostaneme ortonormální bázi celého $\mathbf{R}^4$: $M = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) =$

$$= (\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1), \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,3,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1,0), \frac{1}{\sqrt{15}}(2,1,1,-3)),$$

kde $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ a $U^{\perp} = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle$. Spočítáme-li pro libovolný vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^4$ souřadnice

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \{\mathbf{w}\}_M = (\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}), \omega(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}), \omega(\mathbf{u}_3, \mathbf{w}), \omega(\mathbf{u}_4, \mathbf{w})),$$

vidíme, že $\mathbf{w} = (a_1\,\mathbf{u}_1 + a_2\,\mathbf{u}_2) + (a_3\,\mathbf{u}_3 + a_4\,\mathbf{u}_4)$, kde zřejmě $a_1\,\mathbf{u}_1 + a_2\,\mathbf{u}_2 \in U$ a $a_3\,\mathbf{u}_3 + a_4\,\mathbf{u}_4 \in U^{\perp}$. Spočítáme tedy souřadnice

$$\{(1,2,0,0)\}_M = (\sqrt{3}, -\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{15}}),$$

a dostáváme

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(1,1,0,1) - \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt{15}}(1,-2,3,1) = (1,1,0,1) - \frac{1}{5}(1,-2,3,1) = \frac{1}{5}(4,7,-3,4)$$

a podobně

$$\mathbf{u}^{\perp} = \frac{1}{3}(-1,1,1,0) + \frac{4}{15}(2,1,1,-3) = \frac{1}{5}(1,3,3,-4).$$

Na závěr poznamenejme, že jsme vektor $\mathbf{u}^{\perp}$ nemuseli počítat pomocí Fourierových koeficientů, ale stačilo uvážit, že $\mathbf{u}^{\perp} = (1,2,0,0) - \mathbf{u}$.

(e) Potřebujeme nejprve určit souřadnice x_1, x_2 ortogonální projekce $\mathbf{u} = x_1 \cdot (1,2,1,-1) + x_2 \cdot (1,1,0,1)$, aniž budeme hledat ortogonální bázi W, jak jsme činili v 3.5 a (d). Položíme-li $\mathbf{v}_1 = (1,2,1,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0,1)$ a $\mathbf{y} = (-1,1,0,4)$ Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & \omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & \omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{y}) \\ \omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & \omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{y}) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, proto $\mathbf{u} = (1,0,-1,3)$.

Pro kontrolu ještě ověřme, zda je vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (-2,1,1,1)$ skutečně kolmý na podprostor U. Zřejmě $(-2,1,1,1)\cdot(1,2,1,-1) = 0$ a $(-2,1,1,1)\cdot(1,1,0,1) = 0$. $\square$

3.9. Uvažujme skalární součin ω na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$, U podprostor $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Najděte vektor $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^{\perp} \in U^{\perp}$, aby $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^{\perp}$,

(a) je-li $U = \langle (1,3,-2), (1,1,-1) \rangle$ a $\mathbf{v} = (2,4,3)$,
(b) je-li $U = \langle (1,2,1), (2,1,-1) \rangle$ a $\mathbf{v} = (1,2,4)$,
(c) je-li $U = \langle (1,2,1), (2,1,-1) \rangle$ a $\mathbf{v} = (4,2,1)$.

Postupujme obdobně jako v 3.8(d), tj. hledáme takovou lineární kombinaci vektorů $a(1,3,-2) + b(1,1,-1)$, aby byl vektor $(2,4,3) - a(1,3,-2) - b(1,1,-1)$ kolmý na prostor U. To můžeme ekvivalentně vyjádřit tak, že vektor $(2,4,3) - a(1,3,-2) - b(1,1,-1)$ je kolmý na vektor $(1,3,-2)$ i $(1,1,-1)$ a odtud dostáváme soustavu rovnic

$$\omega((1,3,-2),\ [(2,4,3) - a(1,3,-2) - b(1,1,-1)]) = 0,$$
$$\omega((1,1,-1),\ [(2,4,3) - a(1,3,-2) - b(1,1,-1)]) = 0.$$

Tuto soustavu upravíme na nehomogenní soustavu lineárních rovnic, sepíšeme do (Gramovy) matice a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $a = 1$ a $b = -1$, ortogonální projekce vektoru $(2,4,3)$ na podprostor U je $\mathbf{u} = (1,3,-2) - (1,1,-1) = (0,2,-1)$ a $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (2,4,3) - (0,2,-1) = (2,2,4)$.

(b) I tentokrát standardně najdeme Gramovu matici $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$ vyjadřující podmínku, že $(1,2,4) - x(1,2,1) - y.(2,1,-1)$ je kolmé na podprostor U a dopočítáme $x = 2$ a $y = -1$. Ortogonální projekce vektoru $(1,2,4)$ na podprostor U je tedy $\mathbf{u} = 2\cdot(1,2,1) - 1\cdot(2,1,-1) = (0,3,3)$ a $\mathbf{u}^\perp = (1,2,4) - (0,3,3) = (1,-1,1)$.

(c) Všimněme si, že počítáme-li stejně jako v (b), dostaneme Gramovu matic se stejnými levými stranami, tj. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$ a dopočítáme $x = 1$ a $y = 1$, proto $\mathbf{u} = \cdot(1,2,1) + (2,1,-1) = (3,3,0)$ a $\mathbf{u}^\perp = (4,2,1) - (3,3,0) = (1,-1,1)$. □

12.4.

3.10. Najděte přibližné řešení metodou nejmenších čtverců soustavy rovnic

$$\begin{array}{cccl} x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 10 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 7 \\ & x_2 & -x_3 & = 3 \end{array}$$

Snadno nahlédneme, že soustava nemá řešení. Budeme tedy hledat jen přibližné řešení. Máme vektor pravých stran $\mathbf{y} = (1,4,6,2,-1)$ a vektory levých stran $\mathbf{a}_1 = (1,2,1,1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,-2,2,1)$ a $\mathbf{a}_3 = (0,2,1,2,-1)$. Hledáme x_i tak, aby $\sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{a}_i$ byla právě ortogonální projekce vektoru pravých stran do podprostoru $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$.

Poznamenejme, že by nebylo těžké dokázat, že právě ortogonální projekce $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$ vektoru $\mathbf{y}$ dává mezi všemi vektory podprostoru $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$ minimální hodnotu $\omega(\mathbf{y} - \mathbf{v})$, což je právě součet druhých mocnin rozdílů souřadnic původního vektoru pravých stran $\mathbf{y}$, pro nějž soustava neměla řešeni, a nového vektoru $\mathbf{v}$, který získáme ortogonální projekcí (odtud tedy název „metoda nejmenších čtverců").

Předchozí úvaha vede stejně jako v případě ortogonální projekce k soustavě rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \omega(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \omega(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2) & \omega(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3) & \omega(\mathbf{a}_1,\mathbf{y}) \\ \omega(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1) & \omega(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2) & \omega(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) & \omega(\mathbf{a}_2,\mathbf{y}) \\ \omega(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1) & \omega(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_2) & \omega(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3) & \omega(\mathbf{a}_3,\mathbf{y}) \end{array}\right).$$

Dosadíme a hledáme řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 7 & 17 \\ 4 & 14 & 3 & -3 \\ 7 & 3 & 10 & 21 \end{array}\right).$$

Zbývá nám dopočítat, že $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ a $x_3 = 1$. □

3.11. Najděte přibližné řešení metodou nejmenších čtverců soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 2 \\ 3x & + & y & = 4 \\ -2x & - & y & = 3 \end{array}$$

Položíme-li $\mathbf{v}_1 = (1,3,-2)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,-1)$ a $\mathbf{y} = (2,4,3)$ a uvažujme-li stejně jako v příkladu 3.10 potřebujme vyřešit nehomogení soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) & \omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) & \omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{y}) \\ \omega(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1) & \omega(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2) & \omega(\mathbf{v}_2,\mathbf{y}) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Tuto soustavu už jsme vyřešili v úloze 3.9, tedy $(x,y) = (1,-1)$ je přibližné řešení soustavy metodou nejmenších čtverců. □

3.12. Uvažujme reálný vektorový prostor $C_\infty(\langle -1,1\rangle)$ hladkých fukcí a definujme $f\cdot g = \int_{-1}^1 fg$ pro každé $f,g \in C_\infty(\langle -1,1\rangle)$.

(a) Dokažte, že je $\cdot$ skalární součin na $C_\infty(\langle -1,1\rangle)$.

(b) Najděte ortonormální bázi podprostoru $\langle 1, x, x^2\rangle$.

(a) Zvolme $f,g,h \in C_\infty(\langle -1,1\rangle)$, $a,b \in \mathbf{R}$. Stačí připomenout, že $\int_{-1}^1 fg = \int_{-1}^1 gf$ a $\int_{-1}^1 f(ag+bh) = a\int_{-1}^1 fg + d\int_{-1}^1 fh$, proto je $\cdot$ symetrická bilineární forma. Jestliže navíc $f \neq 0$, pak $f\cdot f = \int_{-1}^1 f^2 > 0$, tudíž je $\cdot$ pozitivně definitní symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru, tedy skalární součin.

(b) Postupujeme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací na posloupnost funkcí $1, x, x^2$.

Nejprve spočítáme skalární součin $1\cdot 1 = \int_{-1}^1 1^2 = 2$, tedy $\|1\| = \sqrt{2}$ a $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Protože je $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{2}} = 0$, dostáváme $\tilde{f}_1 = x - (\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{2}}dx)\frac{1}{\sqrt{2}} = x$. Konečně $\int_{-1}^1 x^2dx = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$, proto $\|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$.

Dále spočítáme skalární součiny $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$ a $\sqrt{\frac{3}{2}}x\cdot x^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^1 x^3dx = 0$ a odtud $\tilde{f}_2 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$. Zbývá spočítat

$$\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2dx = \int_{-1}^1 x^4dx - \frac{2}{3}\int_{-1}^1 x^2dx + \frac{1}{9}\int_{-1}^1 1dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Vidíme, že $f_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. □

4. Vlastní čísla a vlastní vektory

4.1. Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory endomorfismu φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2.

Máme zjistit, pro která reálná (vlastní) čísla λ existuje nenulový (vlastní) vektor $\mathbf{v}$, aby $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$. To můžeme ekvivalentně vyjádřit ve tvaru $(\varphi - \lambda\mathrm{Id})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, a v maticovém zápisu pro libovolnou bázi B prostoru $\mathbf{R}^2$ ve tvaru

$$([\varphi]_B - \lambda\mathbf{E})[v]_B^T = [(\varphi - \lambda\mathrm{Id})]_B[v]_B^T = [\mathbf{0}]_B^T = (0,0)^T.$$

Hledáme tedy všechna taková $\lambda \in \mathbf{R}$, pro něž existuje netriviální řešení homogenní soustavy rovnic se čtvercovou maticí $[(\varphi - \lambda\mathrm{Id})]_B$. To nastává právě tehdy, když je matice $[\varphi]_B - \lambda\mathbf{E}$ singulární. Spočítáme tedy nejprve vlastní čísla matice endomorfismu vzhledem k nějaké pevně zvolené bázi. Poznamenejme, že při tom nezáleží na volbě báze, ale je důležité, abychom počítali s maticí endomorfismu, tj. s maticí daného homomorfismu vzhledem k stejné bázi v definičním oboru i oboru hodnot. V našem případě budeme pracovat s maticí $[\varphi]_{K_2}$.

Určíme charkteristický polynom matice

$$\det([\varphi]_{K_2} - \lambda\mathbf{E}) = (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

Vlastní čísla matice $[\varphi]_{K_2}$ jsou tedy právě kořeny charakteristického polynomu, tedy čísla 2 a 7. Dále budeme postupně dosazovat do matice $[\varphi]_{K_2} - \lambda\mathbf{E}$ vypočtená vlastní čísla a budeme hledat vlastní vektory matice $[\varphi]_{K_2}$, tedy nenulová řešení homogenních soustav rovnic s maticemi, která tvoří právě souřadnicové vektory vlastních vektorů endomorfismu φ:

$$[\varphi]_{K_2} - 2\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_2} - 7\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že všechny nenulové násobky vektoru $(-2,1)$ jsou vlastními vektory matice $[\varphi]_{K_2}$ příslušnými vlastnímu číslu 2 a všechny nenulové násobky vektoru $(1,2)$ jsou vlastními vektory matice $[\varphi]_{K_2}$ příslušnými vlastnímu číslu 7.

Konečně máme-li spočítané souřadnice vlastních vektorů $\{\mathbf{v}\}_{K_2}$ vzhledem ke kanonické bázi, okamžitě vidíme, že množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2 tvoří $\langle(-2,1)\rangle - \{(0,0)\}$ a množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 7 tvoří $\langle(1,2)\rangle - \{(0,0)\}$. $\square$

4.2. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$. Kolik vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$ existuje?

Nejprve hledáme nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ kořeny polynomu $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2$. Prostým dosazením, zjistíme, že $p(1) = 0$ a $p(2) = 0$, tedy vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou právě 1 a 2. Dále řešíme homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - 1\cdot\mathbf{E}$ $\mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} - 1\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zřejmě například vektory $(1,0,1)$ a $(0,1,0)$ tvoří bázi podprostoru řešení soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - 1\cdot\mathbf{E}$, tudíž $\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ je množina všechn vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 a vektor $(1,3,4)$ tvoří bázi podprostoru řešení soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{E}$, tudíž $\langle(1,3,4)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ je množina všechn vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2.

Snando spočítáme, že vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 je právě $5^2 - 1 = 24$ a vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2 je právě $5 - 1 = 4$, tedy celkem máme 28 vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. $\square$

4.3. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory endomorfismu ψ na vektorové prostoru $\mathbf{R}^3$ nad tělesem reálných čísel daný předpisem $\psi(x,y,z) = (x + 2y + z, 2x - y + 2z, -2y)$.

Nejprve snadno určíme matici endomorfismu $[\psi]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3 a poté najdeme její vlastní čísla. Máme tři různá vlastní čísla 0, 1 a -1. Vyřešíme-li soustavy s maticemi $[\psi]_{K_3} + 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $[\psi]_{K_3} - 0\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $[\psi]_{K_3} - 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Obvyklým způsobem najdeme právě všechny vlastní vektory $\langle(1,0,-1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\langle(3,1,-2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\langle(-2,1,2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$. □

Další úlohy

(1) Mějme zobrazení $h : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dané předpisem $h((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.
  (a) Ověřte, že je h skalární součin na $\mathbf{R}^3$,
  (b) najděte nějakou ortonormální bázi P skalárního součinu h,
  (c) pro nalezenou bázi spočítejte souřadnice $[(1,0,0)]_P$, $[(-1,1,2)]_P$,
  (d) najděte takový izomorfismus $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, aby $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \omega(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$, a určete matice φ a φ^{-1} z (c) vzhledem ke kanonické bázi,
  (e) spočítejte $\|(2,3,-1)\|$.

(2) Nechť $B = ((0,1,1,1),(0,1,1,-1),(0,1,0,2),(1,1,-1,2))$ je ortonormální báze vzhledem ke skalárnímu součinu $\cdot$ na $\mathbf{R}^4$.
  (a) Spočítejte $(1,0,1,1) \cdot (2,-2,-1,1)$ a $\|(1,1,1,1)\|$,
  (b) najděte matici $\mathbf{A}$, pro níž $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^T$,
  (c) označíme-li ω standardní skalární součin, najděte takový izomorfismus $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, aby $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \omega(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$,
  (d) určete matice φ a φ^{-1} z (c) vzhledem k bázi B.

(3) Buď ω je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$.
  (a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $V = \langle(1,3,-2,1,1),(2,0,1,1,0),(1,3,1,2,-1)\rangle$,
  (b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
  (c) určete ortogonální projekci vektoru $(2,1,-1,0,4)$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
  (d) je-li $U = \langle(2,1,0,1,-1),\ (1,1,0,-1,3),\ (4,-1,-1,-2,3)\rangle$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1,1,0,0,-2) = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,
  (e) najděte ortonormální báze podprostorů $U + V$, $U^\perp + V$, $U + V^\perp$, $U^\perp + V^\perp$, $U \cap V$, $U^\perp \cap V$, $U \cap V^\perp$ a $U^\perp \cap V^\perp$.

(4) Buď ω je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{C}^4$ daný předpisem $\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}^T$.

(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $V = \langle (1, 1-i, 1+i, 2-3i), (i+1, -1, 1+2i, 2-i) \rangle$,

(b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,

(c) určete ortogonální projekci vektoru $(1+3i, 2-i, -1, 2i)$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,

(d) je-li $U = \langle (i, -i, 2+i, 1-3i), (1, 1, i, 2+3i) \rangle$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1+i, 1, i, 2-i) = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,

(5) Najděte přibližné řešení metodou nejmenších čtverců soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$ nad $\mathbf{R}$, jestliže

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = (1, 0, 1, 1, 2)$

(b) $\mathbf{A}$ je jako v (a) a $\mathbf{y} = (2, 1, 0, 2, 1)$,

(c) $\mathbf{A}$ je jako v (a) a $\mathbf{y} = (2, 1, 0, 2, 0)$,

(d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = (2, 3, 0)$.

(6) Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory endomorfismu φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$

(a) $[\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $[\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(c) $[\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, (d) $[\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$,

(e) $\varphi = \mathrm{Id}$, (f) $\varphi = 0$.

(7) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(8) Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.