1. Počítání s maticemi a soustavy lineárníc rovnic

1.1. Uvažujme reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Určete typ matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}^T$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T$ a $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.
(b) Spočítejte součty $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$.
(c) Spočítejte součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$ a $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}$.
(d) Existuje-li, najděte matici inverzní k matici $\mathbf{A}$.
(e) Existuje-li, najděte matici inverzní k matici $\mathbf{A}^T$.
(f) Existuje-li, najděte matici $\mathbf{X}$ splňující rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}$.

(a) Připomeneme-li, že typem matice rozumíme dvojici $m \times n$, kde m je počet jejích řádek a n počet jejích sloupců, pak okamžitě vidíme, že matice $\mathbf{A}$ je typu 2×2, matice $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ jsou typu 2×3 a matice $\mathbf{B}^T$ je typu 3×2 (transpozice převrací matici podle hlavní diagonály). Uvážíme-li dále, že součin matic má tolik řádků, kolik jich má matice vlevo, a tolik sloupců, kolik jich má matice vpravo, vidíme, že matice $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T$ je typu 2×2, $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}$ je typu 3×3 a konečně matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je typu 2×3.

(b) Postupujeme nejprve přímo podle definice součtu matic:

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 & -1+0 \\ 1+3 & 2+5 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Na přednášce bylo ukázáno, že je sčítání matic komutativní, nemusíme samozřejmě druhý součet počítat a přímo vidíme, že $\mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Podobně bylo na přednášce ověřeno, že $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = (\mathbf{B} + \mathbf{C})^T$, tedy nám stačí jen bez dalšího počítání transponovat matici $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, abychom dostali $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Opět nejprve postupujme bezprostředně podle definice, tentokrát se jedná o definici násobení matic: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & -3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Protože bylo na přednášce ověřeno, že $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, vidíme, že

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

To nám ovšem nepomůže pro výpočet $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, který opět provedeme podle definice:

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Při výpočtu součinu $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$ nám pomůže rozklad matice $\mathbf{C}$ na dva bloky $\mathbf{C} = (\mathbf{A}|\mathbf{S})$, kde $\mathbf{A}$ je matice s kterou pracujeme a $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Výpočet nám usnadní jednak to, že jsme již spočítali součin $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$ a dále pozorování, že součin $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{S}$ právě vybere z matice $\mathbf{B}^T$ druhý sloupec:

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} | \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konečně $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{B}^T)^T = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C})^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Ptáme se, zda existuje čtvercová matice $\mathbf{X}$ řádu 2, která by splňovala podmínku $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$. Z přednášky navíc víme, že najdeme-li matice $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, pro něž $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$, pak $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, tedy $\mathbf{X}$ je hledaná inverzní matice. To znamená, že stačí, abychom našli matici $\mathbf{X}$ a nahlédli, že matice $\mathbf{Y}$ existuje. Označíme-li si prvky matice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, potřebujeme vyřešit soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 1x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 1y_1 & + & 2y_2 & = & 0 \\ 3y_1 & + & 5y_2 & = & 1 \end{array}$$

Díky geometrické interpretaci okamžitě vidíme, že (jednoznačné) řešení existuje (obě soustavy lze interpretovat jako hledání průsečíku zjevně různoběžných dvojic přímek) a snadno dopočítáme, že $x_1 = -5$, $x_2 = 3$ a $y_1 = 2$, $y_2 = -1$, tedy $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Zbývá uvážit, jak je to s existencí matice $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, tedy zda existuje řešení soustav

$$\begin{array}{rcrcr} 1u_1 & + & 3u_2 & = & 1 \\ 2u_1 & + & 5u_2 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 1v_1 & + & 3v_2 & = & 0 \\ 2v_1 & + & 5v_2 & = & 1 \end{array}$$

I tentokrát bez počítání vidíme, že se ptáme, zda existují průsečíky různoběžných dvojic přímek, proto matice $\mathbf{Y}$ existuje a máme $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(e) Poté, co jsme spočítali inverzní matici k matici $\mathbf{A}$, nemusíme matici inverzní k matici $\mathbf{A}^T$ hledat, protože podle pozorování učiněného na přednášce je

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(f) Tentokrát už nebudeme řešit soustavu rovnic (šesti o šesti neznámých) jako v úloze (d), nýbrž si všimneme, že jestliže existuje hledaná matice $\mathbf{X}$, potom můžeme obě strany rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}$ vynásobit zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$, již jsme už nalezli, tedy dostaneme $\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}$ a tuto rovnost můžeme dále upravovat:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X},$$

kde druhá rovnost platí díky asociativitě násobení matic, třetí rovnost plyne z definice inverzní matice a poslední rovnost dostáváme z vlastnosti jednotkové matice (tedy, že je $\mathbf{I}_2$ neutrální prvek vzhledem k násobení). Náhledli jsme, že existuje-li $\mathbf{X}$, nutně musí být tvaru $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}$ a zbývá ověřit, že matice $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}$ splňuje danou podmínku. Tedy podobně jako výše upravujeme

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C},$$

kde první rovnost dostáváme z asociativity násobení matic, druhou z definice inverzní matice a poslední rovnost je opět dokázanou vlastností jednotkové matice.

Nyní zbývá dopočítat jediné řešení

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

19./20.10.

1.2. Ověřte, že neexistují inverzní matice k reálným maticím

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Protože $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pro libovolnou čtvercovou matici $\mathbf{M}$ řádu 2, nemůžeme dostat $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Podobně nahlédneme, že $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, tedy ani tentokrát nenajdeme matici, která by po vynásobení maticí $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ měla první řádek ve tvaru $(1, 0)$. Stejnou úvahou zjistíme, že $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tedy násobením zleva nedostaneme matici, která by měla druhý řádek ve tvaru $(0, 1)$. Protože je matice regulární, právě když je regulární matice transponovaná (dle Tvrzení 1.6.3 z přednášky), nemůže existovat inverz ani k matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Násobíme-li matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nebo matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ zprava libovolnou maticí, okamžitě vidíme, že dostaneme matici tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ pro vhodná čísla a a b. Ani v jednom případě tedy samozřejmě nemůžeme obdržet jednotkovou matici. Konečně násobením matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ zprava dostaneme matici tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$, díky pozorování Věty 1.7. a faktu, že druhý řádek matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ je právě trojnásobkem prvního řádku. Tedy ani v tomto případě nemůže být výsledkem takového součinu jednotková matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

Situaci, kdy existuje posloupnost elementárních (řádkových) úprav, která převede nějakou matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$, budeme v následujícím značit $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. Připomeňme, že rozlišujeme tři typy elementárních úprav a že každou z nich umíme vyjádřit pomocí násobení zleva elemntární maticí (Tvrzení 2.2 z přednášky). Konečně jsou-li $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ matice soustav rovnic a platí-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak množiny všech řešení obou soustav jsou stejné (Tvrzení 2.1 z přednášky).

1.3. Najděte reálné rešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Nejprve si soustavu zapíšeme do matice a poté ji pomocí přičtení vhodného násobku jedné rovnice k rovnici druhé upravíme (na střední škole se tento způsob upravování obvykle nazývá „sčítací metoda"), vše si budeme zapisovat pomocí maticového zápisu, jehož hlavní výhodou bude přehlednost, už jsme výše přiomněli, že soustava rovnic na levo od symbolu $\sim$ má stejnou množinu řešeni jako soustava rovnic napravo od něj:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim$$

Druhý řádek první upravené matice, který odpovídá rovnici $5y+4z = 4$, jsme dostali přičtením dvojnásobku rovnice $x + 2y + z = 1$ k rovnici $-2x + y + 2z = 2$ (tedy přičtením dvojnásobku řádku $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ k řádku $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$) a podobně třetí řádek vznikl z původního třetího řádku odečtením prvního. V dalším kroku jsme jen přehodili řádky (tedy rovnice), pokračujme v úpravách dále:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right).$$

Odečtením pětinásobku druhého řádku od třetího už jsme mohli skončit a poté využít zpětné substituce, ale uvědomme si, že můžeme k výsledku dospět i v maticovém zápisu, tj. můžeme levou stranu matice upravit až na jednotkovou matici. To znamená, že ve sloupci vpravo máme postupně jednoznačně nalezené hodnoty $x = -\frac{3}{14}$, $y = \frac{2}{7}$ a $z = \frac{9}{14}$. □

1.4. Najděte všechna racionální rešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_4 & = & 1 \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}$$

Soustavu si opět můžeme zapsat do matice a poté ji (jedinou elementární řádkovou úpravou) upravíme na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Nyní už snadno jednoznačně dopočítáme neznámé zpětnou substitucí. Z posledního řádku $5x_4 = 5$ dostáváme, že $x_4 = 1$, z předposledního řádku $-x_3+2x_4 = 0$ vidíme, že $-x_3+2 = 0$, tedy $x_3 = 2$. Dále z druhé rovnice $x_2+x_3+x_4 = 3$ obdržíme $x_2 = 0$

a konečně z rovnice $x_1 + x_2 - x_4 = 1$ dostaneme $x_1 = 2$. Vidíme, že existuje jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 2, 1)$. □

1.5. Najděte na množině $\mathrm{GF}(2) = \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ (s obvyklým násobením a se sčítáním: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ a $0 + 1 = 1 + 0 = 1$) rešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_1 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Soustavu si i v tomto případě zapíšeme do matice a s počítáním v GF(2) ji budeme upravovat posloupností elementárních úprav:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0&0&1&1&1\\ 1&0&1&1&0\\ 1&0&0&1&1\\ 1&1&1&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 1&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right).$$

Nejprve jsme přehodili první a třetí řádek, a poté přičetli (nový) první řádek k druhému a čtvrtému. Dále jsme třetí řádek přičetli ke čtvrtému, pak druhý k třetímu a nakonec jsme zpřeházeli řádku a dostali jsme jediné řešení soustavy $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ a $x_4 = 0$.

Poznamenejme, že jsme ke stejnému výsledku mohli dospět i jinou posloupností elementárních úprav, například standardním použitím Gaussovy eliminace. □

1.6. Najděte (všechna) reálná rešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

Znovu si soustavu zapíšeme do matice a poté ji pomocí přičtení vhodného násobku jedné rovnice k rovnici druhé upravíme stejně jako v úloze 1.3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1\\ -2&1&2&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1\\ 0&5&4&4 \end{array}\right),$$

Snadno si uvědomíme, že dosadíme-li za z libovolnou hodnotu, pak jednoznačně dopočítáme y a x. Položíme-li například $z = 0$, pak z rovnice $5y + 4 \cdot 0 = 4$ dostáváme, že $y = \frac{4}{5}$ a z rovnice $x + 2 \cdot \frac{4}{5} + 0 = 1$ spočítáme, že $x = -\frac{3}{5}$. Našli jsme tedy jedno řešení dané soustavy, které můžeme zapsat do trojice $(x, y, z) = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$. Podobně jsme jiné řešení mohli dostat po volbě $z = 1$ a jednoznačném dopočítání $y = x = 0$.

Nzní si uvědomme geometrický význam řešení dané soustavy: každou z rovnic chápeme jako rovinu v $\mathbf{R}^3$ (tvořenou všemi trojicemi (x, y, z), které rovnici řeší) a množina řešení celé soustavy je průnik těchto dvou rovin. Všimneme-li si navíc, že roviny zjevně nejsou rovnoběžné, musí množinu všech řešení tvořit přímka, jejíž jeden bod $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ už jsme našli a jejíž směr je dán vektorem $(3, -4, 5)$ (jde právě o netriviální řešení soustav rovnic se stejnými levými a nulovými pravými stranami). Z geometrického náhledu tedy vidíme, že množin všechna řešení je přímka tvaru $\{(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t) |\ t \in \mathbf{R}\}$

Závěrem poznamenejme, že se tento úkol brzy naučíme řešit negeometricky pro všechna tělesa. $\square$

1.7. Najděte (nějaká) racionální rešení soustavy rovnic z úlohy 1.6.

Stačí si rozmyslet, že z množiny řešení předchozí úlohy musíme vybrat ta, která jsou ve všech složkách racionální. Zřejmě mají řešení $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ $(0, 0, 1)$ všechny složky racionální, tedy jde o hledaná racionální řešení. $\square$

2.11./27.10.

1.8. Existuje-li, najděte inverzní matici k maticím

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel,

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel,

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 + 4i \end{pmatrix}$ nad tělesem komplexních čísel,

(d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 + i & 1 \\ 2 & 3 - i \end{pmatrix}$ nad tělesem komplexních čísel.

Nejprve připomeňme Algoritmus 2.5, který se opírá o Větu 2.7 z přednášky: je-li $\mathbf{M}$ čtvercová matice řádu n, budeme elementárními úpravami upravovat matici $\mathbf{M}$ rozšířenou o jednotkovou matici, tedy matici $(\mathbf{M}|\mathbf{I}_n)$ tak, abychom dostali matici $(\mathbf{I}_n|\mathbf{N})$. Podaří-li se nám to, bude matice $\mathbf{N}$ právě inverzní maticí k matici $\mathbf{M}$, protože $(\mathbf{I}_n|\mathbf{N}) = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}|\mathbf{N} \cdot \mathbf{I}_n) = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{M}|\mathbf{I}_n)$, v opačném případě zjsitíme, že $\mathbf{M}$ nebyla regulární.

(a) Upravujeme tedy řádky rozšířené matice:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Postupně jsme odčítali druhý řádek od prvního, přičítali trojnásobek prvního řádku ke druhému, vynásobili první řádek hodnotou -1 a odečetli druhý řádek od prvního, abychom zjsitili, že inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ existuje a že $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Protože matice $\mathbf{B}$ obsahuje jen racionální hodnoty, elementární úpravy povedou opět k matici s racionálními koeficienty, počítáme obdobně jako v předchozím bodě:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vidíme, že $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Snadno si z definice maticového násobení uvědomíme, že máme za úkol spočítat v tělese komplexních čísel hodnotu $(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i}$. Obvyklým způsobem tedy rozšíříme zlomky komplexně sdruženou hodnotou a dostaneme

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Spočítali jsme, že $\mathbf{C}^{-1} = \left((3+4i)^{-1}\right) = \left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right)$.

(d) Postupujeme jako v bodech (a) a (b) s využitím aritmetiky komplexních čísel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3-i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1+i & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-2i}{2} & \frac{i-1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Tentokrát jsme postupně upravovali: 1) $(1-i)$-násobek prvního řádku jsme odečetli od druhého, 2) prvního řádek jsme vynásobili hodnotou $\frac{1}{1+i}$ a druhý řádek hodnotou $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1-i}{2}$-násobek druhého řádku jsme odečetli od prvního. Spočítali jsme, že $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{2} & \frac{i-1}{4} \\ \frac{i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-4i & i-1 \\ 2i-2 & 2 \end{pmatrix}$. □

1.9. Spočítejte součiny reálných matic

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

(a) Označme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Rozšíříme-li matici $\mathbf{A}$ o matici $\mathbf{B}$ a budeme-li vzniklou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ upravovat stejně jako v předchozích úlohách takovými elementárními úpravami, abychom vlevo obdrželi jednotkovou matici, snadno nahlédneme, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \sim \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (\mathbf{I}_2|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}),$$

Tedy vpravo dostaneme hledaný součin $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Počítejme:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 5 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 & 7 \\ -3 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. □

(b) Označme $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Uvědomíme-li si, že $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}^{-1})^T = (\mathbf{D}^{-1})^T \cdot \mathbf{C}^T = (\mathbf{D}^T)^{-1} \cdot \mathbf{C}^T$, můžeme postupovat stejným způsobem jako v bodě (a), ovšem pro součin transponovaných matic v obráceném pořadí:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 12 & 8 & 8 & -4 & 4 \\ 12 & 9 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 18 & -27 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $(\mathbf{D}^T)^{-1}\cdot\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ -8 & 13 & 2 \end{pmatrix}$, a proto $\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -9 & 13 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. □

9.11./3.11.

1.10. Existuje-li, najděte LU rozklad reálné matice:
(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$,
(d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Všimněme si, že stačí provést jedinou elementární úpravu třetího typu, abychom z matice $\mathbf{A}$ dostali odstupňovanou matici $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, což můžeme zapsat v maticové podobě pomocí násobení zleva příslušnou elementární maticí:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Uvědomíme-li si, že inverzní matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ je rovněž dolní trojúhelníková s jednotkami na diagonále a přenásobíme-li výše uvedenou rovnost zleva maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

odkud vidíme, že LU rozklad matice $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) I tentokrát budeme matici $\mathbf{B}$ upravovat elementárními úpravami. Příslušné úpravy si budeme pamatovat a poté si je přepíšem v maticovém zápisu jako součin elementárních matic:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = \mathbf{U}.$$

Při upravování jsme nepotřebovali přehazovat řádky (ani násobit řádek nenulovým skalárem), tedy dostali jsme $\mathbf{L}_k \dots \mathbf{L}_1 \mathbf{B} = \mathbf{U}$, kde $\mathbf{L}_i$ jsou všechno elementární transformační matice odpovídající přičtení výše položeného řádku k řádku níže položenému:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{L}_i$ jsou zřejmě dolní trojúhelníkové s jednotkami na diagonále a okamžitě vidíme, že součin $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1} \dots \mathbf{L}_k^{-1}$ rovněž dolní trojúhelníková matice s jednotkami na diagonále. Navíc $\mathbf{B} = \mathbf{LU}$. Tudíž jsme našli LU rozklad matice $\mathbf{B}$. Vidíme, že součin matic $\mathbf{L}_1^{-1} \dots \mathbf{L}_k^{-1}$ obsahuje na příslušných pozicích hodnoty jednotlivých elementárních matic (tj. i-tý řádek a j-tý sloupec, $i > j$, obsahuje hodotu c_{ij}, právě když jsme během Gaussovy eliminace odečítali od i-tého řádku matice $\mathbf{B}$ a c_{ij}-násobek jejího j-tého řádku):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme tedy (jednoznačně určený) LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že výsledná matice $\mathbf{L}$ obsahuje na i-tém řádku a j-tém sloupci právě opačnou hodnotu k násobku, jímž jsme násobili j-tý řádek při jeho přičítání k i-tému sloupci během elementárních úprav (tedy během Gaussovy eliminace). To, že se jedná o obecný způsob, jak nalézt dolní trojúhelníkovou matici LU rozkladu matice dokazuje Algoritmus 2.7 z přednášky a na témže místě je ukázáno, že hroní trojúhelníková mnatice LU rozkladu je právě odstupňovaná matice, kterou získáme Gaussovou eliminací.

(c) Tentokrát budeme postupovat přímo pomocí Algoritmu 2.7, tedy stačí gaussovsky upravovat matici $\mathbf{C}$ a příslušné (opačné) hodnoty sestavovat do matice $\mathbf{L}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

kde jsme postupně odečetli 1) -1-násobek 1. řádku od 2., 2) 1-násobek 1. řádku od 3. a 3) 2-násobek 2. řádku od 3. Tedy dostáváme tedy LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Opět využijeme Algoritmu 2.7 a gaussovsky upravujeme matici $\mathbf{D}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Provedené úpravy zaznamenáme do matice $\mathbf{L}$ a dostaneme hledaný LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

1.11. Pomocí LU rozkladu reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ spočítejte všechna řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)$.

Máme-li LU rozklad matice $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ a uvažujeme-li nehomogenní soustavu rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}$, potom můžeme úlohu rozdělit na dva jednodušší úkoly, najít nejprve řešení soustavy $\mathbf{L}\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ a poté soustavy $\mathbf{U}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{z}^{\mathrm{T}}$. V obou případech počítáme s trojúhelníkovými maticemi, takže při výpočtu už jen dosazujeme, aniž musíme matice jakkoli dále gaussovsky upravovat.

LU rozklad matice jsme už spočítali: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Potom pro pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)$ spočítáme neznámé $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ přímou substitucí $z_1 = y_1 = -3$, dále $-1z_1 + z_2 = 3 + z_2 = y_2 = 2$, tedy $z_2 = -1$ a konečně $z_3 = -1 - 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) = 4$.

Nyní počítáme soustavu $\mathbf{U}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{z}^{\mathrm{T}}$ a tentokrát tedy postupujeme zpětnou substitucí: $2x_3 = z_3$, tedy $x_3 = 2$, dále $x_2 = \frac{-1-1\cdot 2}{3} = -1$ a $x_1 = \frac{-3-1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2} = 1$. □

Buď v následujícím n přirozené číslo a položme $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Nyní definujme na $\mathbf{Z}_n$ operace $+_n$ a $\cdot_n$ předpisem

$$a +_n b = (a + b) \mathrm{mod}\ n, \qquad a \cdot_n b = (a \cdot b) \mathrm{mod}\ n,$$

kde mod n znamená zbytek po celočíselném dělení hodnotou n.

Není těžké dokázat (a my s k tomu následující cvičení vrátíme), že množina $\mathbf{Z}_n$ splňuje axiomy (A0) – (A4), (M0) – (M3) a (D) z axiomatiky tělesa zavedené na přednášce, navíc za předpokladu $n > 1$ je splněn i axiom (N). Problematický je jen axiom (M4). Na přednášce bylo ukázáno, že pro $n = 2$ a $n = 3$ platí a nyní si uvědomíme, že je splněn i pro $n = 5$ a $n = 7$:

1.12. Najděte inverzní prvky pro všechny nenulové prvky množin $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ vzhledem k operaci násobení (tj. prvky a^{-1}, pro které $a \cdot a^{-1} = 1$).

Budeme postupovat zkusmo. Snadno v $\mathbf{Z}_5$ zjistíme, že $1^{-1} = 1$ (to platí ostatně v každém tělese), z pozorování, že $2 \cdot_5 3 = 1$, plyne, že $2^{-1} = 3$ i že $3^{-1} = 2$, a konečně $4^{-1} = 4$, protože $4 \cdot_5 4 = 1$.

Podobně v $\mathbf{Z}_7$ najdeme inverzy: $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 4$ a $4^{-1} = 2$ (protože $2 \cdot_7 4 = 1$), $3^{-1} = 5$ a $5^{-1} = 3$ (protože $3 \cdot_7 5 = 1$) a $6^{-1} = 6$ (protože $6 \cdot_7 6 = 1$) □

Všechny úlohy, které jsme řešli v tělesech racionáloních, reálných či komplexních čísel umíme stejným postupem řešit i v tělesech $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$:

1.13. Existuje-li, najděte inverzní matici k maticím

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$,

(b) $\mathbf{A}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$,

(c) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$

Postupujeme stejně jako v 1.8 s využitím aritmetiky konkrétního konečného tělesa:

(a) Upravujeme řádky rozšířené matice nad tělesem $\mathbf{Z}_5$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Postupně jsme 1) přičetli 1. řádek ke 2. (protože $-3 = 2$ v $\mathbf{Z}_5$), 2) vynásobili 1. řádek číslem 3 a 2. řádek číslem 2 (protože $2^{-1} = 3$ a $3^{-1} = 2$ v $\mathbf{Z}_5$), 3) odečetli 2. řádek od 1. nebo ekvivalentně řečeno přičetli 4-násobek 2. řádku k 1. (protože $-4 = 1$ v $\mathbf{Z}_5$).

Nyní vidíme, že inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ existuje a že $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

(b) Upravujeme řádky stejné rozšířené matice tentokrát ovšem nad tělesem $\mathbf{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Nyní jsme 1) přičetli 2-násobek 1. řádku ke 2. (protože $2 \cdot 2 = -3$ v $\mathbf{Z}_7$), 2) přičetli 2. řádek k 1. (protože $5 = -2$ v $\mathbf{Z}_7$) 3) vynásobili 1. řádek číslem 4 a 2. řádek číslem 3 (protože $2^{-1} = 4$ a $5^{-1} = 3$ v $\mathbf{Z}_7$).

Spočítali jsme inverzní matici $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$.

(c) Počítáme opět nad $\mathbf{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right).$$

Dostali jsme $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. □

1.14. Existuje-li, najděte LU rozklad matic:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$,

(c) $\mathbf{B}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$,

Postupujeme pomocí Algoritmu 2.7 jako v 1.10 s počítáním v tělesech $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$, tedy gaussovsky upravíme matici na matici $\mathbf{U}$ a příslušné hodnoty sepíšeme do matice $\mathbf{L}$:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a dostáváme LU rozklad $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme LU rozklad matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

(c)

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&4\\1&0&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&1\\0&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Spočítali jsme nad $\mathbf{Z}_7$ LU rozklad matice $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&1&0\\4&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. □

Další úlohy

(1) Pro komplexní matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1+i&3-i&1\\2-i&-i&1+i\\1&1+2i&1-2i\end{pmatrix}$,
$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1-3i&2+3i&1\\2+i&1+2i&i\end{pmatrix}$ a $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1-4i&3&0\\-i&i&1\end{pmatrix}$

(a) spočítejte $\mathbf{B}+\mathbf{C}$, $\mathbf{B}^T+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^T$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^T$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{C}$ a $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}^T$,
(b) existuje-li, najděte matici inverzní k matici $\mathbf{A}$ a k matici $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}^T$,
(b) dokažte, že matice $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{C}$ není regulární,
(d) existuje-li, najděte matici $\mathbf{X}$ splňující rovnost $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{C}$.

(2) Rozhodněte, zda jsou nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ regulární matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&0&2&2\\1&2&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$ a $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$.

(3) Tam, kde je to možné, najděte inverzní matice k maticím z předchozí úlohy.

(4) Spočítejte $(\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix})^{-1}$ nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$.

(5) Najděte nad tělesy $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ aspoň tři řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc}x&+&y&+&z&+&u&=&3\\x&+&2y&+&3z&+&4u&=&0\\x&+&4y&&&&&=&0\end{array}$$

(6) Existuje-li, najděte nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ aspoň jedno rešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc}2x&-&y&+&2z&=&1\\x&+&y&-&z&=&1\end{array}$$

(7) Vyřešte v tělese $\mathbf{Z}_7$ rovnici $5\cdot x+3=4^{-1}+4$.