Domácí úkoly na cvičení Lineární algebry ve středu od 17:20

Nejsme-li domluveni jinak , odevzdávejte prosím domácí úkoly nejpozději na cvičení, které následuje po tom, na němž byl domácí úkol zadán (obvykle tedy za týden).

12.10. Nechť $\mathbf{A}$ je nenulová reálná čtvercová matice řádu n, kde n je přirozené číslo. Dokažte, že existují reálné čtvercové matice $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ a $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n$ řádu n, pro které

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_1 + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_n = \mathbf{I}_n.$$

(5%)

19.10. Najděte všechny matice $\mathbf{X}$ s koeficienty v GF(2) $= \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ (s obvyklým násobením a se sčítáním: $0+0 = 1+1 = 0$ a $0+1 = 1+0 = 1$), které s počítáním v GF(2) splňují rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4%)

2.11. Existují-li, najděte reálnou čtvercovou matici $\mathbf{C}$ řádu 3 a reálnou čtvercovou matici $\mathbf{D}$ řádu 4, aby $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}_3$, $\mathbf{D} \neq \mathbf{I}_4$, $\mathbf{C}^3 = \mathbf{I}_3$ a $\mathbf{D}^3 = \mathbf{I}_4$ (za 3%). Dokažte, že neexistuje reálná čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu 1 splňující $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}_1$ a $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}_1$ (za 2%).

(5%)

9.11. Buď $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ reálná matice. Spočítejte LU rozklad matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ (za 2%) a dokažte, že existuje LU rozklad matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pro každou reálnou regulární horní trojúhelníkovou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ (za 2%).

(4%)

23.11. Spočítejte dimenze řádkového, sloupcového, nulového a levého nulového prostoru matic nad tělesy $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}.$$

(3%)

30.11. Kolik existuje singulárních čtvercových matic řádu 3 nad tělesem $\mathbf{Z}_5$? Své tvrzení dokažte.

(4%)

7.12. Najděte aspoň jednu permutaci $\sigma \in S_9$, aby platilo $\sigma \circ (134)(2975) = (1269)(587) \circ \sigma$. Kolik takových permutací $\sigma \in S_9$ existuje? Své tvrzení dokažte. Všechny permutace uvažujeme v S_9.

(4%)

14.12. Uvažujme parametrickou matici $\mathbf{A}(a) = \begin{pmatrix} 3+a & a^2 & 1-a & 2a \\ a & 1+a & 3 & 4 \\ a-1 & a^2 & 1-a & 2a \\ 4a^3+1 & -a & 1+a & 3a \end{pmatrix}$.
Rozhodněte, pro která $a \in \mathbf{Z}_5$ existuje matice $\mathbf{A}(a)^{-1}$ nad $\mathbf{Z}_5$ a pro která $a \in \mathbf{Z}_7$ existuje matice $\mathbf{A}(a)^{-1}$ nad $\mathbf{Z}_7$.

(3%)

21.12. Uvažujme regulární matici $\mathbf{A}$ nad konečným tělesem T a definujme $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^k$ pro každé přirozené k. Dokažte, že existuje přirozené n, pro které $\det(\mathbf{A}^n) = 1$ (nad tělesem T) (za 3%). Dokažte dále, že nad tělesem reálných čísel tvrzení neplatí (za 1%).

(4%)

4.1. Nechť $\mathbf{A}$ je reálná obdélníková matice. Existuje-li QR-rozklad matice $\mathbf{A}$, dokažte, že $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je regulární.

(4%)