5. Vektorové prostory a lineární nezávislost

5.1. Rozhodněte, zda je množina U podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, jestliže
(a) $U = \{(0,0,0)^T\}$, (b) $U = \{(0,0,0)^T, (1,2,3)^T\}$, (c) $|U| = 4$,
(d) $U = \{(0,0,0)^T, (1,2,3)^T, (2,4,1)^T, (3,1,4)^T, (4,3,2)^T\}$,
(e) $|U| = 6$, (f) $|U| = 125$, (g) $|U| = \emptyset$,

(a) Protože $(0,0,0)^T + (0,0,0)^T = (0,0,0)^T$ a $t(0,0,0)^T = (0,0,0)^T$ pro každé $t \in T$, je podle Tvrzení 5.6 z přednášky množina $\{(0,0,0)^T\}$ podprostorem $\mathbf{Z}_5^3$.

(b) Vidíme, že $(1,2,3)^T + (1,2,3)^T = 2(1,2,3)^T = (2,4,1)^T \notin U$, proto podle Tvrzení 5.6 U není podprostorem.

(c) Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ nenulový vektor, potom množina $\langle \mathbf{u} \rangle = \{a\,\mathbf{u} \mid a \in \mathbf{Z}_5\}$ obsahuje právě tolik různých vektorů,kolik prvků obsahuje těleso $\mathbf{Z}_5$. Proto čtyřprvkový podprostor (který by nutně obsahoval nenulový vektor) nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ nemůže existovat.

(d) Snadno pomocí Tvrzení 5.14 z přednášky nahlédneme, že $U = \langle (1,2,3)^T \rangle$, tedy se jedná o podprostor.

(e) Kdyby existoval šestiprvkový podprostor nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, pak obsahoval nějaký nenulový vektor $\mathbf{u}$ a pak ještě jeden vektor $\mathbf{v} \in U \setminus \langle \mathbf{u} \rangle$. Podle Tvrzení 5.26 by množin $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ byla lineárně nezávislá, a proto by vektor $2\,\mathbf{u} \notin \langle \mathbf{u} \rangle \cup \{\mathbf{v}\}$, což je spor s předpokladem $|U| = 6$. Tudíž žádný šestiprvkový podprostor nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ neexistuje.

(f) Všimneme-li si, že 125 prvků má celý aritmetický prostor $\mathbf{Z}_5^3$, vidíme, že $U = \mathbf{Z}_5^3$ je podprostorem $\mathbf{Z}_5^3$.

(g) Prázdná množina sice triviálně splňuje podmínku uzavřenosti na operace, ale za podprostor ji nepovažujeme. $\square$

5.2. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $(1,0,2,1)^T$, $(2,0,1,1)^T$, $(1,0,1,-1)^T$ v aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^4$ nad tělesem $\mathbf{Q}$ lineárně závislá či nezávislá.

Využijeme Tvrzení 5.26, podle nějž se stačí zeptat, zda existuje, a v takovém případě půjde o lineárně závislé vektory, či neexistuje, což by znamenalo, že dané vektory by byly lineárně nezávislé, netriviální řešení vektorové rovnice

$$x_1 \cdot (1,0,2,1)^T + x_2 \cdot (2,0,1,1)^T + x_3 \cdot (1,0,1,-1)^T = (0,0,0,0)$$

Úlohu převedeme na otázku, zda existuje jednoznačné (tedy pouze triviální) řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z upravené soustavy dostáváme jednoznačné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tedy vektory $(1,0,2,1)^T$, $(2,0,1,1)^T$, $(1,0,1,-1)^T$ jsou lineárně nezávislé. $\square$

5.3. Najděte nějakou bázi podprostoru U aritmetického vektorového prostoru T^4 nad nad tělesem T, jestliže

(a) $U = \{(0,0,0,0)^T\}$ pro libovolné těleso T,
(b) $U = \langle (1,0,1,1)^T \rangle$ pro libovolné těleso T,
(c) $U = \langle (1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T \rangle$ pro $T = \mathbf{Q}$,
(d) $U = \langle (2,1,1,1)^T, (4,2,1,3)^T, (3,4,3,0)^T, (1,3,4,2)^T \rangle$ pro $T = \mathbf{Z}_5$,
(e) $U = \langle (2,0,3,4)^T, (3,3,1,2)^T, (3,1,1,2)^T \rangle$ pro $T = \mathbf{Z}_5$,
(f) $U = \langle (1,1,3,6)^T, (5,5,1,0)^T, (3,3,2,6)^T \rangle$ pro $T = \mathbf{Z}_7$.

(a) Protože podprostor $\{(0,0,0,0)^T\}$ generuje dokonce prázdná množina, je právě prázdná posloupnost $\emptyset$ báze U.

(b) Snadno nahlédneme, že kterýkoli vektor $t \cdot (1,0,1,1)^T = (t,0,t,t)^T$ pro nenulové $t \in T$ tvoří bázi U.

(c) Protože množina $\{(1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T\}$ podle definice generuje U a v předchozím příkladu jsme dokázali, že jde o lineárně nezávislou množinu aritmetických vektorů, tvoří bázi U množina $\{(1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T\}$.

(d) Seřadíme si vektory generující podprostor U do řádků matice, již upravíme na odstupňovanou, a využijeme Tvrzení 5.22 a 5.33, která nám říkají, že nenulové řádky matice tvoří lineárně nezávislou generující množinu vektorů:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že posloupnost $((1,3,4,2)^T, (0,0,3,2)^T)$ je báze podprostoru U. Závěrem poznamenejme, že $U = \mathrm{Im}\mathbf{A}$.

(e) Stejně jako v (d) si podprostor U vyjádříme jako řádkový vektorový prostor jisté matice $\mathbf{B}$, kterou upravíme na odstupňovaný tvar:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tedy bázi $U = \mathrm{Im}\mathbf{B}$ tvoří například posloupnost $((2,0,3,4)^T, (0,3,4,1)^T, (0,0,1,4)^T)$.

(f) Opět upravujme matici do jejíž řádku jsme sepsali generující vektory podprostoru U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že bázi U tvoří například posloupnost $((1,1,3,6)^T, (0,0,0,5)^T)$. □

27.11.

5.4. Spočítejte dimenzi podprostorů z předchozí úlohy.

Podle definice stačí spočítat počty vektorů báze, kterou jsme našli v předchozím příkladu:

(a) $\dim U = 0$,
(b) $\dim U = 1$,
(c) $\dim U = 3$,
(d) $\dim U = 2$,
(e) $\dim U = 3$,

(f) $\dim U = 2$.

$\square$

5.5. Rozhodněte, zda vektor a) $(1,1,4)^T$ a b) $(4,1,1)^T$ leží v podprostoru $U = \langle (1,4,3)^T,\ (3,1,1)^T \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Ptáme se, zda existují hodnoty $x, y \in \mathbf{Z}_5$, které řeší vektorovou rovnici $x \cdot (1,4,3)^T + y \cdot (3,1,1)^T = \mathbf{v}$, tedy chceme zjistit, zda existuje řešení soustavy 3 rovnic o 2 neznámých (pro každou souřadnici dostáváme jednu rovnici) s maticemi, které snadno upravíme na odstupňovaný tvar.

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že hodnost matice homogenní soustavy i matice rozšířené se shodují, tedy podle Frobeniovy věty (5.80) řešení existuje a vektor $(1,1,4)^T$ je lineární kombinací vektorů $(1,4,3)^T$, $(3,1,1)^T$, proto $(1,1,4)^T \in U$.

b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Tentokrát soustava zjevně řešení nemá, tedy $(4,1,1)^T \notin U$. $\square$

5.6. Ověřte, že $B = ((1,4,3)^T,\ (3,1,1)^T)$ je báze podprostoru $U = \langle (1,4,3)^T,\ (3,1,1)^T \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a najděte souřadnice vektoru $(1,1,4)^T$ vzhledem k bázi B. $(1,4,3)^T$, $(3,1,1)^T$

Okamžitě z definice vidíme, že posloupnost B je lineárně nezávislá, tedy jde o bázi U. Nyní hledáme hodnoty $x, y \in \mathbf{Z}_5$, které řeší vektorovou rovnici $x \cdot (1,4,3)^T + y \cdot (3,1,1)^T = (1,1,4)^T$, kterou jsme řešili už v minulé úloze. Zbývá tedy zpětnou substitucí dopočítat (jednoznačné) řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Spočítali jsme, že souřadnice $(1,1,4)^T$ vzhledem k bázi B jsou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\square$

5.7. Vyberte z množiny $X = \{(2,1,1,1)^T, (4,2,1,3)^T, (3,4,3,0)^T,\ (1,3,4,2)^T\}$, resp. $Y = \{(2,0,3,4)^T, (1,3,1,2)^T, (1,0,1,2)^T\}$ báze podprostorů $\mathbf{U} = \langle X \rangle$, resp. $\mathbf{V} = \langle Y \rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^4$.

Nejprve si všimněme, že už jsme v Příkladu 5.3(d),(e) báze U i V hledali. Nešlo ovšem o báze vybrané. Využijme tedy spočítaných dimenzi a hledáme dvouprvkovou lineárně nezávislou množinu v $\mathbf{U}$, tedy dvojici vektorů, které nejsou svými násobky, což zřejmě splňuje například dvojice vektorů $(2,1,1,1)^T, (3,4,3,0)^T$ nebo $(3,4,3,0)^T, (1,3,4,2)^T$ a tříprvkovou generující množinu $\mathbf{U}$, jíž je zřejmě celé Y. $\square$

5.8. Doplňte lineárně nezávislou množinu $B = \{(2,4,0,1,4)^T, (1,2,1,0,3)^T\}$ na bázi aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^5$.

Připomeňme, že podle Důsledku 5.23 se řádkový vektorový prostor matice nezmění, upravíme-li ji posloupností elementárních řádkových úprav. Seřadíme-li vektory množiny B do řádků matice, kterou upravíme na odstupňovanou matici, vidíme, že

$$\langle B\rangle = \mathrm{Im}(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix})^T = \mathrm{Im}(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix})^T$$

Nyní snadno doplníme matici na odstupňovanou čtvercovou matici, jejíž všechny řádky jsou nenulové, například vektory standardní báze (i-tý přidáme, právě když i-tý sloupec matice není bázový) a přitom si všimneme, že:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Zřejmě má řádkový prostor matice $\mathbf{A}$ dimenzi 5, proto je roven $\mathbf{Z}_5^5$. Tedy množina $\{(0,1,0,0,0)^T, (0,0,0,1,0)^T, (0,0,0,0,1)^T\}$ doplňuje množinu B na bázi $\mathbf{Z}_5^5$. □

5.9. Najděte nějakou bázi podprostoru $\mathbf{U} = \langle(3,1,4,2)^T, (2,3,5,1)^T, (1,5,6,1)^T\rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^4$ a doplňte ji bázi celého prostoru $\mathbf{Z}_7^4$.

I tentokrát můžeme využít Důsledku 5.23 o řádkovém vektorovém prostoru matice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, pro níž platí, že $\mathbf{U} = \mathrm{Im}\mathbf{M}^T$. Nejprve standardní cestou upravíme matici $\mathbf{M}$ na matici odstupňovanou:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{N}.$$

Vidíme, že báze $\mathrm{Im}\mathbf{M}^T = \mathrm{Im}\mathbf{N}^T = \mathbf{U}$ je tvořena například nenulovými řádkovými vektory odstupňované matice $\mathbf{N}$. Tedy $\{(3,1,4,2)^T, (0,0,0,1)^T\}$ je báze $\mathbf{U}$. Nyní už postupujeme stejně jako v předchozí úloze, doplníme nenulové řádky matice $\mathbf{N}$ pomocí vektorů standardní báze, abychom dostali odstupňovanou regulární matici $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tudíž posloupnost $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ doplňuje posloupnost $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na bázi celého $\mathbf{Z}_7^4$. □

5.10. Určete nad tělesy $\mathbf{R}$ a $\mathbf{Z}_5$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a matice $\mathbf{A}^T$ a dimenze prostorů $\mathrm{Im}\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\mathbf{A}^T$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}^T$.

Podle Vět 5.73, 5.82 a definice hodnosti stačí spočítat hodnost matice:

Upravujme matici posloupností elementárních úprav nejprve nad tělesem reálných čísel:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-5\\0&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že nad tělesem $\mathbf{R}$ hodnost $\operatorname{rank}(\mathbf{A})=3$. Tedy že $\operatorname{rank}(\mathbf{A})=\operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)=\dim\operatorname{Im}\mathbf{A}=\dim\operatorname{Im}\mathbf{A}^T=3$. a Díky 5.82 potom $\operatorname{Ker}\mathbf{A}=3-\operatorname{rank}(\mathbf{A})=3-3=0$ a podobně $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T=3-\operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)=3-3=0$.

Podobně určíme hodnost $\mathbf{A}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Tedy nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ je $\operatorname{rank}(\mathbf{A})=\operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)=\dim\operatorname{Im}\mathbf{A}=\dim\operatorname{Im}\mathbf{A}^T=2$ a $\operatorname{Ker}\mathbf{A}=\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T=3-\operatorname{rank}(\mathbf{A})=3-2=1$. □

5.11. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ báze prostorů $\operatorname{Im}\mathbf{A}$, $\operatorname{Im}\mathbf{A}^T$, $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$, $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T$ pro matici $\mathbf{A}$ z předchozí úlohy.

Z odstupňovaného tvaru matice

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Okamžitě vidíme, že $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ je báze $\operatorname{Im}\mathbf{A}^T$ a snadno spočítáme bázické řešení $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$, tj. bázi $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$. Pro nalezení báze $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T$ řádkově upravíme $\mathbf{A}^T$:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&4\\3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Zpětnou substitucí najdeme bázi $\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ prostoru $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T$. Zároveň vidíme, že báze $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ je například $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ (nebo kterákoli jiná dvojice lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru). □

4.12.

5.12. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $M=(1,0,2)^T$, $(2,1,1)^T$, $(1,1,1)^T$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Q}^3$ nad tělesem $\mathbf{Q}$.

Podle pozorování 5.57 z přednášky stačí ověřit, zda je posloupnost lineárně nezávislá či zda generuje celý prostor $\mathbf{Q}^3$ a to nastává právě tehdy, když je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ regulární. Budeme tedy matici $\mathbf{A}$ upravovat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že M je bází $\mathbf{Q}^3$. □

5.13. Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $M = (1,0,2)^T$, $(2,1,1)^T$, $(1,1,1)^T$, jestliže

$$\text{(a)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hledáme aritmetický vektor $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, aby $\mathbf{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tedy budeme počítat řešení nehomogenní soustavy rovnic:

(a) Pro $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zřejmě $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Tentorát je vektor $\mathbf{v}$ jedním z bázových vektorů báze M, proto bez počítání vidíme, že $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Nyní obvyklým způsobem spočítáme jedoznačné řešení nehomogenní soustavy s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$. Zjistili jsme, že $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

5.14. Vyberte z posloupnosti

$$X = ((2,4,0,1,4)^T, (4,3,0,2,3)^T, (1,2,3,4,0)^T, (3,1,1,1,2)^T, (4,3,4,0,2)^T)$$

bázi podprostoru $U = \langle X \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Potřebujeme si uvědomit, které vektory z daného seznamu jsou lineární kombinací předchozích. Seřadíme si tedy vektory do posloupnosti a budeme zjišťovat, které vektory jsou lineární kombinací předchozích členů posloupnosti. Nejprve si tedy seřadíme vektory do řádků matice, čímž máme dánu posloupnost vektorů, a tu budeme upravovat Gaussovou eliminací dokud nezískáme odstupňovanou matici. Jedná se tedy o posloupnost elementárních úprav, kdy k níže položeným řádkům přičítáme výše položené řádky, případně nelze-li nějakým řádkem upravit níže položené řádky, pak takový vektor) vyměníme z níže položeným vektorem přehazujeme násob tvar. Přitom si řádky původní matice označíme římskými číslicemi a budeme zaznamenávat všechna přehazování řádků a stačí zjistit, kterým řádkům původní matice odpovídají nenulové řádky Gaussovy matice.

Poznamenejme, že je podstatné, abychom neměnili pořadí těch vektorů, pomocí nichž jsme upravovali všechny následující, tj. těch řádků matice, které už jsme použili k eliminaci následujících. Takový řádek už totiž odpovídá vektoru, který je lineárně nezávislý na předchozích a jeho případná záměna za některý z následujících vektorů pro něj samozřejmě podmínku lineární nezávislosti na předchozích řádcích nemusí zachovat. V daném případě nejprve přičteme vhodné násobky prvního řádku k ostatním a poté přehodíme druhý a třetí řádek, jímž stejným způsobem vynulujeme pátý a šestý řádek:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 3 & ii \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & iii \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & iv \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 2 & v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ii \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & iii \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & iv \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & iii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iv \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{array}\right).$$

Ukázalo se, že řádek ii je násobkem řádku i a řádky iv a v jsou lineární kombinací řádků i a iii. Naopak řádek iii není lineární kombinací řádku i. Hledanou bázi tvoří například první a třetí vektor množiny X, tedy množina $\{(2,4,0,1,4)^T, (1,2,3,4,0)^T\}$.

□

5.15. Uvažujme podprostory $U = \langle (2,1,1,1)^T, (4,2,1,3)^T, (3,4,3,0)^T, (1,3,4,2)^T \rangle$ a $V = \langle (2,0,3,4)^T, (3,3,1,2)^T, (3,1,1,2)^T \rangle$ pro $T = \mathbf{Z}_5$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^4$, Spočítejte dimenze součtu $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ a průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

Připomeňme, že $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \{\mathbf{u}+\mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$ je podprostor generovaný všemi vektory $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$, ovšem stačí nám uvažovat jen báze $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$, které už jsme nalezli, tedy platí, že $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$. Dimenzi součtu $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ nyní najdeme stejně jako v 5.3, tedy seřadíme generující vektory do sloupců matice a upravujeme

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \dim(\mathrm{Im}\mathbf{C}) = \mathrm{rank}(\mathbf{C}) = 4$.

Konečně si zbývá uvědomit, že jsme dimneze $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ spočítali v úlohách 5.3(d),(e) a podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů je tedy $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = 2+3-4 = 1$. □

5.16. Určete dimenzi průniku podprostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ racionálního vektorového prostoru $\mathbf{Q}^3$, je-li $\mathbf{U} = \langle (1,2,1)^T, (1,0,2)^T \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle (1,1,0)^T, (1,-1,1)^T \rangle$.

Snadno zjistíme, že $\dim \mathbf{U} = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) = 2$, $\dim \mathbf{V} = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 2$ a $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 3$, proto je díky Větě o dimenzi součtu a průniku podprostorů

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 1.$$

□

5.17. Najděte nějakou bázi podprostorů $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^4$ z úlohy 5.15.

V úloze 5.15 jsme zjistili, že dimenze podprostoru $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ je 4, což podle Věty 4.11 z přednášky znamená, že $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^4$, protože $\dim \mathbf{Z}_5^4 = 4$. Tedy bázi $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ tvoří například standardní báze $(1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T$.

Nyní potřebujeme najít všechny vektory, které leží zároveň v $\mathbf{U}$ i ve $\mathbf{V}$, tedy které jsou zároveň lineárními kombinacemi generátorů $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$. Připomeneme-li, že jsme v 5.7 našli bázi $\{(2,1,1,1)^T, (4,2,1,3)^T\}$ podprostoru $\mathbf{U}$ a bázi $\{(2,0,3,4)^T, (1,3,1,2)^T, (1,0,1,2)^T\}$ podprostoru $\mathbf{V}$ a že množina $\{-(2,0,3,4)^T, -(1,3,1,2)^T, -(1,0,1,2)^T\} = \{(3,0,2,1)^T, (4,2,4,3)^T, (4,0,4,3)^T\}$ je rovněž báze $\mathbf{V}$, pak hledáme lineární kombinace splňující

$$x_1 \begin{pmatrix} 2\\1\\1\\1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4\\2\\1\\3 \end{pmatrix} = -y_1 \begin{pmatrix} 2\\0\\3\\4 \end{pmatrix} - y_2 \begin{pmatrix} 1\\3\\1\\2 \end{pmatrix} - y_3 \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix},$$

kterou upravíme do standardního tvaru

$$x_1 \begin{pmatrix} 2\\1\\1\\1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4\\2\\1\\3 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 2\\0\\3\\4 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1\\3\\1\\2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}.$$

Hledáme tedy jádro Ker$\mathbf{C}$ matice $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2&4&2&1&1\\1&2&0&3&0\\1&1&3&1&1\\1&3&4&2&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&4&2&1&1\\0&4&2&3&3\\0&0&4&0&2\\0&0&0&2&2 \end{pmatrix}$.
Nyní snadno najdeme jedno netriviální řešení $(0,4,2,4,1)^T$ soustavy s maticí $\mathbf{C}$, tedy hledaným bázovým vektorem podprostoru $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ je

$$\begin{pmatrix} 1\\3\\4\\2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2\\1\\1\\1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 4\\2\\1\\3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2\\0\\3\\4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1\\3\\1\\2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}.$$

□

5.18. Najděte nějakou bázi průniku podprostorů $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_3$, jestliže $\mathbf{U} = \langle (1,1,1,1)^T, (0,2,1,1)^T, (0,0,1,2)^T \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle (1,2,2,1)^T, (0,1,2,1)^T, (0,0,2,2)^T \rangle$.

Postupujeme stejně jako v předchozí úloze, tedy hledáme všechny vektory, které leží zároveň v $\mathbf{U}$ i ve $\mathbf{V}$, což si opět vyjádříme rovnicí:

$$x_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix},$$

kterou opět upravíme na

$$x_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Znovu počítáme všechna řešení homogenní soustavy s maticí:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\1&2&0&1&2&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&2&2&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&2&0&2&2&0\\0&1&1&2&1&1\\0&1&2&0&2&1\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&2&0&2&2&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&2&2&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&2&0&2&2&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

Nyní potřebujeme najít bázi $(1,2,2,1,0,0)^T$, $(0,2,2,0,1,1)^T$ podprostoru Ker$\mathbf{D}$. Zjistili jsme, že:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix},$$

a

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix},$$

$$0 \cdot (1,1,1,1) + 2 \cdot (0,2,1,1) + 2 \cdot (0,0,1,2) =$$
$$= 0 \cdot (1,2,2,1) + 1 \cdot (0,1,2,1) + 1 \cdot (0,0,2,2) = (0,1,1,0).$$

Tudíž vektory $(1,2,2,1)^T$ a $(0,1,1,0)^T$ leží v podprostoru $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Konečně si uvědomíme, že libovolné řešení soustavy lze napsat ve tvaru

$$a_1 \cdot (1,2,2,1,0,0)^T + a_2 \cdot (0,2,2,0,1,1)^T = (a_1, 2a_1 + 2a_2, 2a_1 + 2a_2, a_1, a_2, a_2)^T,$$

kde $a_1, a_2 \in \mathbf{Z}_3$, proto lze každý vektor z průniku vyjádřit:

$$a_1 \cdot (1,1,1,1)^T + (2a_1 + 2a_2) \cdot (0,2,1,1)^T + (2a_1 + 2a_2) \cdot (0,0,1,2)^T =$$
$$= a_1 \cdot (1,2,2,1)^T + a_2 \cdot (0,1,1,0)^T.$$

Tím jsme zjistili, že každý vektor z podprostoru $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ lze napsat ve tvaru

$$a_1 \cdot (1,2,2,1)^T + a_2 \cdot (0,1,1,0)^T$$

, tedy množina $\{(1,2,2,1)^T, (0,1,1,0)^T\}$ podprostor $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ generuje. Zjevně se jedná o množinu lineárně nezávislou, tedy jde o bázi průniku. Není přitom těžké si uvědomit, že výsledné vektory budou jistě lineárně nezávislé, jestliže jsme hledali jejich souřadnice vzhledem k bázím prostorů **U** a **V**.

Závěrem si ještě všimněme, že jsme soustavu nemuseli dopočítávat, neboť nám stačilo najít souřadnice báze řešení odpovídající proměnným y_i (tj. poslední 3 souřadnice) nebo x_i (tj. první 3 souřadnice). □

11.12.

5.19. Dokažte, že množina komplexních čísel **C** tvoří s obvyklým sčítáním a násobením vektorový prostor nad tělesem reálných čísel **R**.

Je třeba zcela přímočaře ověřit platnost axiomatiky vektorového prostoru. Přitom víme, že **C** je se sčítáním a násobením těleso, odkud okamžitě dostáváme asociativitu a komutativitu sčítání, stejně jako existenci nulového vektoru (0). Protože $r(c+d) = rc + rd$ pro všechna komplexní r, c, d platí tato rovnost i v případě, že zvolíme $r \in \mathbf{R}$. Stejný argument ukazuje, že pro každé $r, s \in \mathbf{R}$ a $c \in \mathbf{C}$ máme $(r+s)c = rc + sc$ a $(rs)c = r(sc)$. Konečně zřejmě $1c = c$. □

5.20. Najděte nějakou bázi a určete dimenzi **C** jako vektorového prostoru nad tělesem **R**.

Protože $\mathbf{C} = \{a + bi |\ a, b \in \mathbf{R}\}$, okamžitě vidíme, že posloupnost $1, i$ generuje **C** nad **R**. Předpokládáme-li, že $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$ pro nějaká reálná $a, b \in \mathbf{R}$, pak nutně $a = b = 0$, čímž jsme ověřili, že $1, i$ je báze **C** nad **R**, tedy $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$. □

5.21. Rozhodněte, zda dvojice komplexních čísel $3-i$, $2+3i$ tvoří bázi vektorového prostoru **C** nad tělesem **R**.

Díky tomu, že jsme v předchozím příkladu spočítali, že $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$, stačí zjistit, zda je dvojice $3-i$, $2+3i$ lineárně nezávislá nebo generující, zbývající vlastnost je totiž podle Věty 2.19 důsledkem každé z nich. Ukážeme například, že jde o lineárně nezávislou množinu. Jestliže $0 = a(3-i) + b(2+3i) = (3a+2b) + (-a+3b)i$, tedy z reálné i imaginární části dostáváme jednu rovnici:

$$\begin{array}{rcrl} 3a & + & 2b & = 0 \\ -a & + & 3b & = 0 \end{array}$$ a řešíme homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, která má zjevně hodnost 2, tedy pouze triviální řešení.

Tím jsme dokázali, že je dvojice $3-i$, $2+3i$ lineárně nezávislá, tedy jde o bázi **C** nad **R**. □

5.22. Najděte nenulový reálný polynom stupně (nejvýše) 2, jehož kořenem je komplexní číslo $3-i$.

Stačí když uvážíme, že jsou vektory $(3-i)^0 = 1$, $(3-i)^1 = 3-i$ a $(3-i)^2 = 8-6i$ nad tělesem **R** nutně lineárně závislé, tedy existuje trojice $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, pro níž $a_0 + a_1(3-i) + a_2(8-6i) = 0$. Obdobnou úvahou jako v předchozím příkladu zjistíme, že potřebujeme vyřešit homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Snadno zjistíme, že řešením je například trojice $(a_0, a_1, a_2) = (10, -6, 1)$, proto je komplexní číslo $3-i$ kořenem polynomu $x^2 - 6x + 10$. □

5.23. Najděte všechny reálné polynom stupně nejvýše 2, jejichž kořenem je komplexní číslo $3 - i$.

V předchozí úloze jsme si uvědomili, že každý takový polynom odpovídá řešení homogení soustavy lineárních rovnic s maticí typu (2,3) hodnosti 2. Protože je množina všech řešení podprostor dimenze 1, jsou hledané reálné polynomy tvaru $rx^2 - 6rx + 10r$ pro libovolné reálné $r \in \mathbf{R}$. □

5.24. Dokažte, že je množina $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} |\ a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ podprostor racionálního vektorového prostoru $\mathbf{R}$ a navíc, že $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Stačí pro libovolné $d, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_3 \in \mathbf{Q}$ nahlédnout, že

$$(a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4})+(a_2+b_2\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt[3]{2}+(c_1+c_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$$

a dále, že

$$d(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) = da_1 + db_1\sqrt[3]{2} + dc_1\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$$

a konečně, že $(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}) =$

$$= (a_1a_2+2b_1c_2+2c_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2+2c_1c_2)\sqrt[3]{2}+(a_1c_2+c_1a_2+b_1b_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}].$$

□

5.25. Najděte nenulový racionální polynom stupně (nejvýše) 3, jehož kořenem je reálné číslo $1 - \sqrt[3]{2}$.

Uvažujeme stejně jako v úloze 5.22. Opět si všimneme, že $\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]) \leq 3$, proto jsou vektory $(1 - \sqrt[3]{2})^0 = 1$, $(1 - \sqrt[3]{2})^1 = 1 - \sqrt[3]{2}$, $(1 - \sqrt[3]{2})^2 = 1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ a $(1 - \sqrt[3]{2})^3 = -1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ nad tělesem $\mathbf{Q}$ lineárně závislé. Najdeme tedy opět netriviální řešení vektorové rovnice

$$a_0 + a_1(1 - \sqrt[3]{2}) + a_2(1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + a_3(-1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}) = 0,$$

která vede na homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že řešením je čtveřice $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 3, -3, 1)$, tudíž je číslo $1 - \sqrt[3]{2}$ kořenem polynomu $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. □

6. Permutace a determinanty

6.1. Zapište v cyklickém zápisu a redukovaném cyklického zápisu permutace $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$. Kolika různými způsoby lze v redukovaném a neredukovaném tvaru permutaci p a q zapsat?

Postupně vyčerpáme všechny prvky z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, abychom zapsali cykly permutací $p = (13)(246)(5)$ a $q = (1)(2365)(4)$. V redukovaném cyklickém zápisu vynecháme všechny jednocykly, tedy pevné body daného zobrazení, a proto $p = (13)(246)$ a $q = (2365)$.

Zápis každého cyklu konkrétní permutace je určen svou první hodnotou, tedy n-cyklus lze zapsat n způsoby. Protože můžeme cykly v cyklickém zápisu ještě vzájemně libovolně permutovat, vidíme, že permutaci p lze v redukovaném cyklickém zápisu zapsat právě $2 \cdot 3 \cdot 2! = 12$ způsoby a v neredukovaném cyklickém zápisu ji lze zapsat právě $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3! = 36$ způsoby. Stejnou úvahou dostaneme, že permutaci q můžeme v redukovaném cyklickém zápisu zapsat právě 4 způsoby a v neredukovaném cyklickém zápisu právě $4 \cdot 3! = 24$ způsoby. $\square$

6.2. Mějme permutace $p = (1298)(36)(574)$ a $q = (34875)$ z množiny S_9 v redukovaném cyklickém zápisu. Určete jejich maticový zápis.

Z cyklického zápisu permutace p vidíme, že $p(1) = 2$, $p(2) = 9$, $p(9) = 8$, $p(8) = 1$, $p(3) = 6$, $p(6) = 3$, $p(5) = 7$, $p(7) = 4$ a $p(4) = 5$. Nyní snadno tyto údaje zaznamenáme do matice

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 7 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Snadno rozšíříme redukovaný cyklický zápis permutace q na neredukovaný zápis $q = (34875)(1)(2)(6)(9)$ a obdobným způsobem jako u permutace p najdeme matici

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 6 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\square$

6.3. Nechť $p = (135)(4798)(26)$ a $q = (18)(247693)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočítejte permutace $p \circ q$, $q \circ p$, p^{-1} a q^{-1}.

Nejprve přímo použitím definice snadno zjistíme hodnoty (skládáme zprava doleva):

$$p \circ q = (1495)(27)(368), \quad q \circ p = (129)(3587)(46).$$

Dále snadno nahlédneme, že inverzní permutací je právě „zrcadlový obraz" permutace, tedy

$$p^{-1} = (62)(8974)(531), \quad q^{-1} = (18)(239674).$$

$\square$

6.4. Určete znaménka permutací p a q z předchozí úlohy.

Stačí, abychom spočítali počet cyklů sudé délky v cyklickém zápisu každé z permutací, je-li jich sudý počet, je znaménko 1, v opačném případě je znaménko -1. V obou případech vidíme, že $p = (135)(4798)(26)$ i $q = (18)(247693)(5)$ obsahují 2 cykly sudý délky, proto $\operatorname{sgn} p = \operatorname{sgn} q = 1$. $\square$

6.5. Určete znaménka permutací $p = (17)(36)(2458)$, p^{-1}, $q = (245)(3687)$, $r = (13)(2675), p \circ q \circ r, q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q \in S_8$.

Nejprve opět ¨spočítáme cykly sudé délky, abychom zjistili, že

$$\text{sgn } p = \text{sgn } ((17)(36)(2458)) = (-1)^{8-3} = -1,$$
$$\text{sgn } q = \text{sgn } ((1)(245)(3687)) = (-1)^{8-3} = -1,$$
$$\text{sgn } r = \text{sgn } ((13)(2675)(4)(8)) = (-1)^{8-4} = 1.$$

V předchozí úloze jsme si mohli všimnout, že inverzní permutace má stejně cyklů jako permutace původní, proto sgn p^{-1} = sgn $p = -1$. Konečně Tvrzení 6.11 nám říká, že znaménko složení permutací se rovná součinu znamének, proto

$$\text{sgn } (p \circ q \circ r) = \text{sgn } p \cdot \text{sgn } q \cdot \text{sgn } r = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1$$

Spojením posledních dvou pozorování dostáváme:

$$\text{sgn } (q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q) = \text{sgn } q \cdot \text{sgn } r \cdot \text{sgn } p \cdot \text{sgn } q = \text{sgn } r \cdot \text{sgn } p = -1.$$

□

6.6. Napište permutace $p = (13475)$ a $q = (19)(267)(3548)$ z S_9 jako součin transpozic.

Připomeňme, že transpozice je permutace, která vyměňuje právě dva prvky, tj. můžeme ji v redukovaném cyklickém zápisu zapsat ve tvaru (ab). Snadno spočítáme, že

$$(13475) = (15) \circ (17) \circ (14) \circ (13) = (13) \circ (34) \circ (47) \circ (75).$$

Přímo z definice cyklického zápisu vidíme, že $(19)(267)(3548) = (19) \circ (267) \circ (3548)$, tedy nejprve úlohu vyřešíme pro každý z cyklů (19), (267) a (3548) a poté nalezené transpozice složíme, tedy

$$(19)(267)(3548) = (19) \circ (267) \circ (3548) =$$
$$= (19) \circ (27) \circ (26) \circ (38) \circ (34) \circ (35) = (19) \circ (26) \circ (67) \circ (35) \circ (54) \circ (48).$$

□

6.7. Nechť p a s jsou permutace z grupy S_n a nechť $p(a) = b$, kde $a, b \in \{1, \ldots, n\}$. Dokažte, že $[sps^{-1}](s(a)) = s(b)$.

Důkaz tvrzení je zcela přímočarý. Důležitým důsledkem je ovšem pozorování, že permutace p a sps^{-1} mají stejný počet stejných cyklů, neboť jsme právě dokázali, že

$$s \circ [\ldots (\ldots ab \ldots) \ldots] \circ s^{-1} = \ldots (\ldots s(a)s(b) \ldots) \ldots.$$

□

6.8. Mějme $p = (1346)(27)(589)$ a $q = (16)(29)(345)$ dvě permutace z grupy S_9. Spočítejte hodnoty pqp^{-1} a qpq^{-1}.

Postupujeme podle předchozího pozorování:

$$[(1346)(27)(589)] \circ [(16)(29)(345)] \circ [(1346)(27)(589)]^{-1} = (31)(75)(468)$$

a

$$[(16)(29)(345)] \circ [(1346)(27)(589)] \circ [(16)(29)(345)]^{-1} = (6451)(97)(382).$$

□

6.9. Mějme permutace $p_1 = (126)(37)(458)$ a $p_2 = (12)(345)(678)$ z grupy S_8. Rozhodněte, zda jsou permutace p_1 a p_2 konjugované, tj. zda existuje permutace $q \in S_8$ s vlastností $qp_1q^{-1} = p_2$ a případně takovou permutaci q najděte.

Využijeme opačný postup k postupu v předchozím příkladu. Obě permutace jsou stejného typu (což je zřejmě nutná podmínka, aby permutace q existovala). Seřaďme stejnými n-cykly pod sebe, například:

$$\begin{matrix}(126)(37)(458)\\(345)(12)(678)\end{matrix}$$

Zřejmě potom permutace $q = (13)(24657)(8)$ splňuje podmínku $qp_1q^{-1} = p_2$. □

18.12.

6.10. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Postupujeme přímo podle definice. Rozmyslíme si, že $S_2 = \{\mathrm{Id}, (12)\}$. a proto $\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. Obvyklá úvaha o počítání v tělesech $\mathbf{Z}_p$ nám umožní využít výsledku spočítaného v tělese reálných (či racionálních) čísel, který nakonec stačí upravit modulo p. To znamená, že $\det(\mathbf{A}) = (5) \mathrm{mod}\ 5 = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{A}) = (5) \mathrm{mod}\ 7 = 5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □

6.11. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

I tentokrát budeme fakticky postupovat podle definice. Sudým permutacím Id, (123) a (132) z S_3 odpovídají po řadě součiny $1 \cdot 0 \cdot 1$, $2 \cdot 3 \cdot 2$ a $1 \cdot 4 \cdot 3$ (vždy bereme nejprve hodnotu z prvního řádku, poté z druhého a nakonec z třetího) a lichým permutacím (12), (13) a (23) odpovídají součiny $2 \cdot 4 \cdot 1$, $1 \cdot 0 \cdot 2$ a $1 \cdot 3 \cdot 3$, proto

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - (2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3).$$

Tedy $\det(\mathbf{B}) = 7$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{B}) = 2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{B}) = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □

6.12. Rozhodněte, zda je nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ regulární matice:
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{A}^{555}$.

Díky Tvrzení 6.22 stačí zjistit, zda jsou determinanty jednotlivých matic nenulové. Spočítejme nejprve determinanty matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = -5$$

nad $\mathbf{Q}$, $\det \mathbf{A} = 0$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det \mathbf{A} = 2$ nad $\mathbf{Z}_7$, což znamená, že je $\mathbf{A}$ regulární nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$ a $\mathbf{A}$ je singulární nad $\mathbf{Z}_5$. Podobně

$$\det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

nad $\mathbf{Q}$, $\det \mathbf{B} = 1$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det \mathbf{B} = 6$ nad $\mathbf{Z}_7$, tedy $\mathbf{B}$ jr regulární nad všemi tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$. Použijeme-li Větu 6.26, která říká, že $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$, pak vidíme, že $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq 0$ právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$ a $\det \mathbf{B} \neq 0$. Tudíž matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je regulární nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$ a není regulární nad $\mathbf{Z}_5$. Konečně indukčním rozšířením Věty 6.26 dostaneme, že $\det(\mathbf{A}^{555}) = \det(\mathbf{A})^{555}$, a proto je matice $\mathbf{A}^{555}$ regulární právě nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_7$. □

6.13. Určete nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinanty matic

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice $\mathbf{C}_1 = (c_{ij})$ můžeme opět spočítat podle definice, uvědomíme-li si, že pro každou neidentickou permutaci $\sigma \in S_5$ bude existovat aspoň jedno j, pro něž $j > \sigma(j)$, a proto $c_{j\sigma(j)} = 0$ a $c_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot c_{5\sigma(5)} = 0$. Tedy determinant Gaussovy čtvercové matice $\mathbf{C}_1$ je právě součin hodnot na hlavní diagonále, tj. $\det(\mathbf{C}_1) = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 48$ nad tělesy $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{C}_1) = (48) \bmod 5 = 3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{C}_1) = (48) \bmod 7 = 6$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$.

Nyní si všimněme, že matici $\mathbf{C}_2$ dostaneme z matice $\mathbf{C}_1$ výměnou 1. a 4. řádku. Proto podle Tvrzení 6.18 a 6.19 je $\det(\mathbf{C}_2) = -\det(\mathbf{C}_1)$, tudíž $\det(\mathbf{C}_2) = -48$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{C}_2) = (-48) \bmod 5 = 2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{C}_2) = (-48) \bmod 7 = 1$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □

6.14. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Připomeňme, že Tvrzení 6.18 a 6.19 nám říkají, jak se změní determinant matice, provedeme-li některou z řádkových úprav. V předchozí úloze jsme si navíc uvědomili, že je velmi snadné určit determinant Gaussovy matice jako součin hodnot na hlavní diagonále. Budeme-li tedy standardními prostředky pomocí elementárních úprav řádků převádět matici $\mathbf{D}$ na její Gaussovu matici, budeme v každém kroku znát, jak jsme původní determinant změnili. Tedy upravujme a počítejme:

$$\det(\mathbf{D}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}) =$$

$$= \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5.$$

Tedy zjistili jsme, že $\det(\mathbf{D}) = 5$ nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{D}) = 0$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{D}) = 5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. □

6.15. Spočítejte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ determinant matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Tentokrát k výpočtu použijeme Tvrzení 6.18 Větu 6.32 a budeme determinant rozvíjet podle 2. řádku:

$$\det(\mathbf{G}) = (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}) + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}) +$$

$$+(-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}) + (-1)^{2+4} \cdot 0 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}) =$$

$$= -3 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}) = -3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2) = 30.$$

Tedy jako obvykle $\det(\mathbf{G}) = 18$ nad $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$, $\det(\mathbf{G}) = 3$ nad $\mathbf{Z}_5$ a $\det(\mathbf{G}) = 4$ nad $\mathbf{Z}_7$. □

Poznamenejme, že jsme determinanty ani další členy rozvoje, které přísluší nulovému prvku z řádku, podle nějž determinant rozvíjíme, vůbec nemuseli psát. Navíc si uvědomme, že tato metoda je vhodná právě v případě, kdy některý z řádků nebo sloupců, využijeme-li pozorování obsahuje ,,hodně"nul.

6.16. Spočítejte determinant matice $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel.

V matici $\mathbf{H}$ sice žádný řádek ani sloupec neobsahuje větší počet nul, ovšem první a čtvrtý sloupec se liší jen na jedné pozici. Víme, že odečteme-li od jednoho z těchto sloupců druhý, nezmění se podle Tvrzení 6.19 hodnota determinantu. Po této úpravě už ovšem můžeme použít metodu rozvoje podle sloupce (tedy Větu 6.32):

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}) =$$

$$= (-1)\cdot(-2)\cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}).$$

Nyní odečteme od prvního řádku upravené matice trojnásobek druhého řádku. Na prvním řádku zůstanou dva nenulové prvky, podle nichž determinant rozvedeme a snadno dopočítáme:

$$\det(\mathbf{H}) = 2\cdot\det(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}) = 2\cdot\det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2 & 7\end{pmatrix}) =$$

$$= 2\cdot(-5)\cdot\det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 7\end{pmatrix}) - 2\cdot 1\cdot\det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}) =$$

$$= -10\cdot(14-1+3+14) - 2\cdot(4+1+12+4+4-3) = -344.$$

□

6.17. Rozhodněte pro která reálná a jsou reálné matice $\mathbf{P}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ a & 1 & a\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{Q}(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1\\ a-1 & 1 & 1\\ a+1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}(a)\cdot\mathbf{Q}(a)$ a $\mathbf{P}(a)^{257}\cdot\mathbf{Q}(a)^{374}$ regulární.

Nejprve spočítáme determinanty $\det(\mathbf{P}(a)) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ a & 1 & a\\ 1 & a & 0\end{pmatrix} = a - a^2,$ a

$$\det(\mathbf{Q}(a)) = \det\begin{pmatrix} a & -1 & -1\\ a-1 & 1 & 1\\ a+1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & 0\\ a-1 & 1 & 1\\ a+1 & 1 & 0\end{pmatrix} = 1-2a.$$

Věta 6.22 z přednášky říká, že je matice regulární, právě když je její determinant nenulový. Determinanty matic $\mathbf{P}(a)$ a $\mathbf{Q}(a)$ už jsme spočítali, zbývá nám s využitím Věty 6.26 spočítat $\det(\mathbf{P}(a)\cdot\mathbf{Q}(a)) = \det(\mathbf{P}(a))\cdot\det(\mathbf{Q}(a)) = a(1-a)(1-2a)$. Vidíme, že je matice $\mathbf{P}(a)$ regulární, právě když $a \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$, matice $\mathbf{Q}(a)$ je regulární, právě když $a\in\mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ a součin $\mathbf{P}(a)\cdot\mathbf{Q}(a)$ je regulární, právě když $a\in\mathbf{R}\setminus\{0,\frac{1}{2},1\}$.

Konečně indukční aplikací Věty 6.26 dostáváme, že

$$\det(\mathbf{P}(a)^{257}\cdot\mathbf{Q}(a)^{374}) = \det(\mathbf{P}(a))^{257}\cdot\det(\mathbf{Q}(a))^{374} = a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}.$$

Protože polynom $a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}$ v proměnné a nemá jiné kořeny než 0, $\frac{1}{2}$, 1, vidíme, že je matice $\mathbf{P}(a)^{257}\cdot\mathbf{Q}(a)^{374}$ regulární opět právě tehdy, když $a\in\mathbf{R}\setminus\{0,\frac{1}{2},1\}$. □

6.18. Rozhodněte pro která $x \in \mathbf{Z}_5$ je matice $\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ singulární.

Opět spočítáme determinant matice $\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$, nejprve přičteme třetí sloupec k druhému a pak rozvedeme podle třetího řádku:

$$\det \begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x & 3x+4 & 2x+1 \\ x+4 & 3x & 3 \\ x+1 & 0 & 4x \end{pmatrix} =$$

$$= (x+1) \cdot (4x^2 + x + 2) + 4x \cdot (3x^2 + 4x + 4) = x^3 + x^2 + 4x + 2.$$

Stejně jako v předchozí úloze potřebujeme najít $x \in \mathbf{Z}_5$, pro něž je hodnota $\det(\mathbf{A}(x)) = x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0$, což snadno zjistíme dosazováním jednotlivých prvků tělesa $\mathbf{Z}_5$:

$\det(\mathbf{A}(0)) = 2$, $\det(\mathbf{A}(1)) = 1^3+1^2+4\cdot 1+2 = 3$, $\det(\mathbf{A}(2)) = 2^3+2^2+4\cdot 2+2 = 2$,

$$\det(\mathbf{A}(3)) = 3^3 + 3^2 + 4 \cdot 3 + 2 = 0, \qquad \det(\mathbf{A}(4)) = 4^3 + 4^2 + 4 \cdot 4 + 2 = 3.$$

Zjistili jsme, že je matice $\mathbf{A}(x)$ singulární, právě když je $x = 3$. □

6.19. Vyřešte nad reálnými čísly soustavu rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x}^T = (1,0,0)^T$ s reálným parametrem a, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 2a \\ a & 1 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Pro počítání použijeme Cramerovo pravidlo, tedy Věty 6.28 z přednášky. Nejdříve určíme $\det \mathbf{A} = 2a \cdot (a+1)$. To znamená, že Cramerovo pravidlo můžeme využít pro parametr $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1\}$, t.j. je-li matice A regulární. Dále určíme determinant matic $\mathbf{A}_i$, které vzniknou z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran vektorem, tedy $(1,0,0)^T$:

$\det \mathbf{A}_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$, $\det \mathbf{A}_2 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & 2a \\ a & 0 & a+1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a$ a $\det \mathbf{A}_3 = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2a$.

Nyní pomocí Věty 6.28 spočítáme hodnotu i-té neznámé jako $x_i = (\det \mathbf{A})^{-1} \cdot \det \mathbf{A}_i$. Tedy $x_1 = x_2 = \frac{2a}{2a(a+1)} = \frac{1}{a+1}$ a $x_3 = \frac{-2a}{2a(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$. Konečně standardním postupem zjistíme, že soustava pro $a = -1$ nemá řešení a pro $a = 0$ leží všechna řešení v množině $(1,0,0)^T + \rangle((0,1,-1)\langle$. □

6.20. Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ adjungovanou matici k maticím $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Postupujme nejprve podle definice, na i-tém řádku a v j-tém sloupci adjungované matice se nachází subdeterminant původní matice, v níž vyškrtneme j-tý řádek a i-tý sloupec, vynásobený hodnotou $(-1)^{i+j}$:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U poslední matice, pro niž už jsme (v úloze 1.13.) zjistili, že je regulární, a známe její inverz $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Nyní stačí abychom spočítali determinant $\det(\mathbf{D}) = 5$ a využili Věty 6.38, které říká, že $\operatorname{adj}(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}^{-1}$, tedy $\operatorname{adj}(\mathbf{D}) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\square$

6.21. Spočítejte adjungovanou matici ke čtvercové matici stupně 100, která má hodnost 98.

Uvážíme-li, že matice, kterou dostaneme z původní vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce má hodnost nejvýše 98, je taková matice singulární a má tedy determinant rovný nule. To znamená, že hledaná adjungovaná matice je nulová. $\square$

7. Lineární zobrazení

7.1. Nechť $f : \mathbf{Z}_5^3 \to \mathbf{Z}_5^2$ je zobrazení dané předpisem $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$. Rozhodněte, zda jde o lineární zobrazení.

Podle Tvrzení 4.20 z přednášky zobrazení dané násobením sloupcového vektoru (tedy matice typu $(n, 1)$) maticí splňuje axiomy lineárního zobrazení, tedy

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}(r \cdot \mathbf{u}) = r \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u})$$

pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_5^3$ a $r \in \mathbf{Z}_5$. $\square$

7.2. Pro lineární zobrazení f z předchozího příkladu popište podprostory $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$.

Připomeňme, že $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{v} |\ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{v} |\ \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Tedy $\operatorname{Ker} f$ je právě množina všech řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$. Snadno spočítáme, že $\operatorname{Ker} f = \langle (2, 0, 1)^T \rangle$.

Vezmeme-li libovolnou generující množinu G vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ (například kanonickou bázi), potom $f(G)$ tvoří generující množinu podprostoru $\mathrm{Im} f = f(\mathbf{Z}_5^3)$. Vidíme, že $f((1,0,0)^T) = (4,1)^T$, $f((0,1,0)^T) = (1,2)^T$ a $f((0,0,1)^T) = (2,3)^T$ (tj. obrazy vektorů kanonické báze tvoří právě sloupce matice $\mathbf{A}$). Zbývá si všimnout, že $\langle (4,1)^T, (1,2)^T, (2,3)^T \rangle = \mathbf{Z}_5^2$. $\square$

Označujme K_n kanonickou bázi libovolného aritmetického vektorového prostoru T^n nad tělesem T a její i-tý vektor $\mathbf{e}_i$.

7.3. Najděte matici lineárního zobrazení f z předchozí úlohy vzhledem ke kanonickým bázím.

Podle definice nejprve potřebujeme zjistit souřadnice vektorů $f(\mathbf{e}_i)$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbf{Z}_5^2$:

$$[f(\mathbf{e}_1)]_{K_2} = [\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[f(\mathbf{e}_2)]_{K_2} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$[f(\mathbf{e}_3)]_{K_2} = [\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá souřadnicové vektory uspořádat do sloupců matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím $[f]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\square$

7.4. Nechť $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ je zobrazení určené předpisem

$$g((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2, 4x_1 - x_2, 2x_2).$$

Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení.

Snadno zjistíme, že lze předpis definující zobrazení g vyjádřit jako součin matice a aritmetického vektoru: $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Proto jde podle Tvrzení 4.20 o lineární zobrazení. $\square$

7.5. Najděte matici vzhledem ke kanonickým bázím lineárního zobrazení g z předchozího příkladu.

Postupujeme stejně jako v Příkladu 7.3. Stačí tedy dosadit vektory kanonické báze do g a seřadíme je do sloupců matice $[g]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$

7.6. Mějme $A = ((1,4)^T, (3,1)^T)$ bázi prostoru $\mathbf{Z}_7^2$ a $B = ((1,1,2)^T, (1,0,3)^T, (6,0,5)^T)$ bázi prostoru $\mathbf{Z}_7^3$. Najděte matici lineárního zobrazení $h : \mathbf{Z}_7^2 \to \mathbf{Z}_7^3$ vzhledem k bázím A a B, známe-li matici h vzhledem ke kanonickým bázím $[h]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Dvojí aplikací Tvrzení 7.15(3) můžeme vyjádřit hledanou matici $[h]_B^A$ jakou součin matic:

$$[h]_B^A = [\mathrm{Id}]_B^{K_3} \cdot [h]_{K_3}^A = [\mathrm{Id}]_B^{K_3} \cdot [h]_{K_3}^{K_2} \cdot [\mathrm{Id}]_{K_2}^A.$$

Snadno určíme přímo podle definice matice přechodu od kanonické báze k bázi A resp. B, tj. do sloupečků sepíšeme bázi A resp. B:

$$[\mathrm{Id}]_{K_2}^A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathrm{Id}]_{K_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Konečně zbývá uvážit, že $[\mathrm{Id}]_{K_3}^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{K_3} = [\mathrm{Id}]_{K_3 K_3} = \mathbf{I}_3$, tedy $[\mathrm{Id}]_B^{K_3} = ([\mathrm{Id}]_{K_3}^B)^{-1}$. Dokončení úlohy je už jen rutinním počítáním s maticemi:

$$[h]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hledaný součin matic dopočítáme obvyklým způsobem:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $[h]_B^A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. □

7.7. Buď $A = ((1,1,1)^T, (1,0,1)^T (1,1,0)^T)$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^3$ a $B = ((1,2)^T, (1, 1^T))$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^2$. Najděte maticí lineárního zobrazení $\psi : \mathbf{Z}_3^3 \to \mathbf{Z}_3^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, má-li matici $[\psi]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k bazím A a B.

Postupujeme standardní cestou s využitím Tvrzení 7.15(3):

$$[\psi]_{K_2}^{K_3} = [\mathrm{Id}]_{K_2}^B \cdot [\psi]_B^A \cdot [\mathrm{Id}]_A^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

a některým ze známých způsobů dopočítáme $[\psi]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

7.8. Najděte matici lineárního zobrazení φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, víte-li, že $\varphi((1,2)^T) = (3,0)^T$ a $\varphi((2,1)^T) = (3,3)^T$.

Protože $B = ((1,2)^T, (2,1)^T)$ tvoří bázi $\mathbf{R}^2$, zaručuje nám Tvrzení 7.4, že daná podmínka určuje lineární zobrazení f jednoznačně, a bezprostředně z definice dostaneme matici $[\varphi]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dále postupujeme obvyklým způsobem:

$$[\varphi]_{K_2}^{K_2} = [\varphi]_{K_2}^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{K_2} = [\varphi]_{BK_2} \cdot ([\mathrm{Id}]_{K_2}^B)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

7.9. Najděte ve vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_3^2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_3$ matici přechodu od báze $N = ((1,1)^T, (0,1)^T)$ k bázi $M = ((2,1)^T, (1,1)^T)$.

Připomeňme, že matice přechodu od báze N k bázi M je právě maticí $[\mathrm{Id}]_M^N$ identického lineárního zobrazení vzhledem k bázím N a M. Nyní dostáváme: $[\mathrm{Id}]_N^N = [\mathrm{Id}]_M^{K_2} \cdot [\mathrm{Id}]_{K_2}^N = ([\mathrm{Id}]_{K_2}^N)^{-1} \cdot [\mathrm{Id}]_{NK_2} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

7.10. Je-li $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{Z}_7^4 \to \mathbf{Z}_7^3$ vzhledem k bazím $M = ((1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,1,1)^T, (1,0,0,0)^T)$ a $N = ((3,1,4)^T, (3,3,0)^T, (2,1,6)^T)$. Určete dimenze jádra $\mathrm{Ker} f$ a obrazu $\mathrm{Im} f$.

Nejprve standardní cestou určíme hodnost matice $[f]_N^M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ a zjistíme, že $h([f]_{MN}) = 2$. Nyní využijeme Tvrzení 7.22, které říká, že $\dim(\mathrm{Im} f) = h([f]_{MN}) = 2$ a že $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathbf{Z}_7^4) = 4$. Proto $\dim(\mathrm{Ker} f) = 4 - \dim(\mathrm{Im} f) = 2$. □

8. Skalární součin

8.1. Nechť $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ jsou reálné matice a uvažujme standardní skalární součin na reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$.

(a) Ověřte, že $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^3$,
(b) spočítejte souřadnice vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ a $(1,2,3)^T$ vzhledem k ortonormální bázi B,
(c) ověřte, že $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}^T$ jsou ortonormální matice,
(d) dokažte, že $(\mathbf{Mb}_1, \mathbf{Mb}_2, \mathbf{Mb}_3)$ je opět ortonormální báze.

(a) Podle definice spočítáme

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 3 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{18}}=0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}=2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=0,\quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=2\cdot(\frac{1}{\sqrt{6}})^2+(\frac{2}{\sqrt{6}})^2=1,$$

tedy zjistili jsme, že B je ortonormální, a proto lineárně nezávislá posloupnost. Protože jde o tříprvkovou lineárně nezávislou posloupnost ve vektorovém prostoru dimenze 3, musí jít o bázi. Seřadíme-li vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ do matice $\mathbf{N}$, mohli jsme otázku zformulovat maticově, konkrétně jsme měli zjistit (a zjistili), zda $\mathbf{N}^T\cdot\mathbf{N} = \mathbf{I}_3$.

(b) Připomeňme, že pro každou ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ tvoří souřadnice vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ vzhledem k bázi B jednoznačně určený aritmetický vektor $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$, pro který platí $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{b}_i$. Využijeme-li ortonormality bázi, vidíme, že

$$\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}_j^T \cdot \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{b}_j^T \cdot \mathbf{b}_i = x_j,$$

tedy souřadnice$\mathbf{v}$ jsou právě Fourierovy koeficienty. Konkrétně dostáváme, že

- $\mathbf{N}^T\cdot(0,0,1)^T = (1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\cdot 0, 1\cdot\frac{-2}{\sqrt{6}})^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, 0, -2)^T$ jsou souřadnice vektoru $(0,0,1)^T$ vzhledem k B,

- $\mathbf{N}^T\cdot(2,1,0)^T = (\frac{2+1}{\sqrt{3}}, \frac{2-1}{\sqrt{2}}, \frac{2+1}{\sqrt{6}})^T = (\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})^T$ jsou souřadnice vektoru $(2,1,0)^T$ vzhledem k B a

- $\mathbf{N}^T\cdot(1,2,3)^T = (\frac{1+2+3}{\sqrt{3}}, \frac{1-2}{\sqrt{2}}, \frac{1+2-3\cdot 2}{\sqrt{6}})^T = (2\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}})^T$ jsou souřadnice vektoru $(1,2,3)^T$ vzhledem k B.

(c)Máme zjistit, zda $\mathbf{M}^T\cdot\mathbf{M} = \mathbf{I}_3$, což snad ověříme přímým výpočtem. Protože je matice $\mathbf{M}$ ortogonální, víme z přednášky, že je ortogonální i matice $\mathbf{M}^T$.

(d) Protože matice $\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}$ obsahuje ve svých sloupcích právě vektory $\mathbf{Mb}_1$, $\mathbf{Mb}_2$, $\mathbf{Mb}_3$, ptáme se, zda je tato matice ortogonální. Obě matice jsou ovšem ortogonální, tedy $\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}$ je ortogonální podle tvrzení z přednášky. □

8.2. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ a nechť $V = \langle((1,1,0)^T, (1,3,2)^T\rangle$.

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru V,
(b) najděte ortogonální bázi V obsahující vektor $(2,4,2)^T$,
(c) určete ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ prostoru $\mathbf{R}^3$, pro niž $V = \langle(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\rangle$.

(a) Budeme upravovat například bázi $((1,1,0)^T, (1,3,2)^T)$ Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací. Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(1,1,0)^T\|}(1,1,0)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$. Dále hledáme vektor $\mathbf{u}_2$ ve tvaru $\mathbf{u}_2 = (1,3,2)^T + c\cdot\mathbf{v}_1$. Z podmínky $\mathbf{v}_1^T\cdot\mathbf{v}_2 = 0$ dostáváme, že $c = -\mathbf{v}_1^T\cdot(1,3,2)^T = -\frac{4}{\sqrt{2}}$, proto $\mathbf{u}_2 = (-1,1,2)^T$. Nyní vektor $\mathbf{u}_2$ normalizujeme a dostaneme $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(-1,1,2)^T\|}(-1,1,2)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.

Hledanou ortonormální bází V je tedy posloupnost $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$.

(b) Postupujeme obdobně jako v (a) jen zvolíme bázi V začínající vektorem $(2,4,2)^T$, například bázi $((2,4,2)^T, (1,1,0)^T)$. Poznamenejme, že kdybychom našli postupem (a) ortonormální bázi, jednalo by se určitě i o bázi ortogonální. My nyní použijeme úvahu obdobnou jako v (a), tentokrát ovšem nebudeme (protože nemusíme) normalizovat:

Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = (2,4,2)^T$ a hledáme vektor $\mathbf{v}_2$ ve tvaru $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)^T + c\cdot \mathbf{v}_1$. Z podmínky $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ tentokrát dostáváme, že $c = -\frac{\mathbf{v}_1^T \cdot (1,1,0)^T}{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}$, proto $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)^T - \frac{1}{4}\cdot(2,4,2)^T = \frac{1}{2}(1,0,-1)^T$.

Hledanou ortogonální bází V je tedy posloupnost $((2,4,2)^T, \frac{1}{2}(1,0,-1)^T)$ nebo posloupnost $((2,4,2)^T, (1,0,-1)^T)$.

(c) V (a) jsme nalezli ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$. Připomeňme, že každý vektor kolmá na bázi podprostoru V je kolmý na jeho všechny vektory. Stačí nám tedy najít vektor $\mathbf{u}$, pro $(1,1,0)\,\mathbf{u} = 0$ a $(1,3,2)\,\mathbf{u} = 0$, tedy hledáme řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Snadno spočítáme, že takovým řešením je například vektor $(-1,1,-1)^T$. Stačí tedy tento vektor normalizovat, abychom našli poslední vektor hledané ortonormální báze. Tedy je-li $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$ $\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T$, dostáváme ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ požadovaných vlastností. □

8.3. Buď $M = ((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$ báze reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte ortonormální takovou bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbf{R}^3$, aby $\langle (1,1,0)^T \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ a $\langle (1,1,0)^T, (0,1,1)^T \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

Postupujme opět Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,1,0)^T}{\|(1,1,0)^T\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$.
2. $\mathbf{v}_2' = (0,1,1)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(0,1,1)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = \frac{1}{2}(-1,1,2)^T$. Proto $\|\,\mathbf{v}_2'\,\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.
3. Předně $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(1,1,1)^T = \sqrt{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(1,1,1)^T = \frac{2}{\sqrt{6}}$, proto $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)^T - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(1,-1,1)^T$. Tedy $\|\,\mathbf{v}_3'\,\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T, \frac{1}{3}(1,-1,1)^T)$.

Chceme-li vytvořit ortonormální bázi z báze $((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$ modifikovaným Gramovým-Schmidtovým algoritmem, dostáváme:

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2' = (0,1,1)^T$ a $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)^T$.
2. $\mathbf{v}_2' = \frac{1}{2}(-1,1,2)^T$, $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)^T - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = (0,0,1)^T$ a normujeme $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.
3. $\mathbf{v}_3' = (0,0,1)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(1,-1,1)^T$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

Výsledek modifikovaného algoritmu je stejný jako v případě klasického algoritmu, změnili jsme jen uspořádání úprav. □

Připomeňme, že QR-rozkladem matice $\mathbf{A}$ nad reálným nebo komplexním tělesem rozumíme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, kde $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}$ je jednotková matice a $\mathbf{R}$ je regulární horní trojúhelníková matice s kladnými reálnými hodnotami na diagonále.

8.4. Najděte QR rozklady matic (a) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

Uvažujme obecnou matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_m)$ s lineárně nezávislými sloupci. Připomeňme, že je-li $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ je posloupnost ortonormálních vektorů, kterou z posloupnosti $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ vytvoříme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací a položíme-li $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1|\dots|\mathbf{q}_m)$ a $\mathbf{R} = (r_{ij})$, kde $r_{ij} = \mathbf{q}_i^T \cdot \mathbf{a}_j$, potom je $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ právě QR rozklad matice $\mathbf{A}$. Navíc poznamenejme, že $r_{ii} = \mathbf{q}_i^T \cdot \mathbf{a}_i = \|\mathbf{q}_i'\|$, tedy matice $\mathbf{Q}$ sestává z výsledných ortonormálních vektorů a matice $\mathbf{R}$ obsahuje právě všechny údaje, které při Gramově-Schmidtově ortogonalizaci spočítáme (tedy nad diagonálou všechny potřebné skalární součiny a na diagonále všechny potřebné normy).

(a) Protože jsou sloupce první matice právě první dva vektory z úlohy 8.3, využijeme prvních dvou kroků Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace z 8.3 a sepíšeme údaje do matic

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix}\|(1,1,0)^T\| & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(0,1,1)^T\\ 0 & \|\frac{1}{2}(-1,1,2)^T\|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}.$$

(b) Tentokrát sepíšeme do matic údaje celé Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace z 8.3, první dva sloupce matic $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$ už známe (u prvních dvou sloupců $\mathbf{R}$ přidáme nulový poslední řádek). Tedy dostáváme $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ a

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(1,1,1)^T\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(1,1,1)^T\\ 0 & 0 & \|\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T\|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

(c) Nyní budeme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací upravovat lineárně nezávislou posloupnost vektorů $(1,1,1,1)^T$, $(1,0,1,0)^T$, $(0,1,0,2)^T$ mezivýsledky sepsat do matic Q a R. Všimněme si, že $r_{ii} = \langle \mathbf{q}_i\, \mathbf{a}_i\rangle = \|\mathbf{q}_i'\|$.

1. $\mathbf{q}_1 = \frac{(1,1,1,1)^T}{\|(1,1,1,1)^T\|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ a $r_{11} = \|(1,1,1,1)^T\| = 2$.
2. $\mathbf{q}_2' = (1,0,1,0)^T - \langle\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T, (1,0,1,0)^T\rangle \cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$. Proto $r_{12} = \langle\frac{1}{2}(1,1,1,1), (1,0,1,0)^T\rangle = 1$, $r_{22} = \|\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T\| = 1$ a $\mathbf{q}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
3. Konečně $r_{13} = \langle \mathbf{q}_1, (0,1,0,2)^T\rangle = \frac{3}{2}$, $r_{23} = \langle \mathbf{q}_2, (0,1,0,2)^T\rangle = -\frac{3}{2}$, proto $\mathbf{q}_3' = (0,1,0,2)^T - \frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T + \frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T = (0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$. Tedy $r_{33} = \|(0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\mathbf{q}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

Dostáváme QR rozklad $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. □

8.5. Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \langle((1,1,-2,1)^T, (2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T\rangle$ reálného aritmetického vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ se standardním skalárním součinem.

Nejprve zvolíme vhodnou bázi prostoru V, kterou budeme ortogonalizovat pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace. Vektor $(2,0,1,0)^T$ je zřejmě kolmý na zbývající vektory, zvolme tedy bázi V, tak aby byl vektor $(2,0,1,0)^T$ na jejím prvním místě. Tedy vyjdeme například z báze $((2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T, (1,1,-2,1)^T)$. Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci tentokrát mírně modifikujeme: najdeme nejprve ortogonální bázi a tu budeme normalizovat až na závěr.

Už jsme všimli, že $((2,0,1,0)^T \cdot (0,1,0,1)^T = 0$, tedy máme první dva (zatím jen ortogonální, nikoli ortonormální) vektory hledané báze: $\mathbf{v}_1' = (2,0,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2' = (0,1,0,1)^T$. Nyní budeme hledat třetí bazický vektor ve tvaru $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1)^T - c_1\,\mathbf{v}_1' - c_2\,\mathbf{v}_2'$. Přitom má splňovat podmínky, že $\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_3' = 0$ pro $i = 1,2$, z čehož využitím linearity skalárního součinu v druhé složce dostáváme, že

$$c_1 = \frac{(1,1,-2,1)\cdot(2,0,1,0)^T}{(2,0,1,0)\cdot(2,0,1,0)^T} = 0, \quad c_2 = \frac{(1,1,-2,1)\cdot(0,1,0,1)^T}{(0,1,0,1)\cdot(0,1,0,1)^T} = -1.$$

Všimněme si, že koeficient je roven 0 díky volbě vektoru $\mathbf{v}_1'$ kolmého na všechny následující vektory, proto nám stačilo hledat ortogonální bázi podprostoru $\langle(1,1,-2,1)^T, (0,1,0,1)^T\rangle$, která musí být kolmá na vektor $(2,0,1,0)^T$. Tedy $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1)^T - (0,1,0,1)^T = (1,0,-2,0)^T$ je posledním hledaným kolmým vektorem. Posloupnost vektorů $((2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T, (1,0,-2,0)^T)$ tvoří zřejmě ortogonální bázi prostoru V. Zbývá nám jednotlivé vektory normalizovat: $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_1'}{\|\mathbf{v}_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T$, $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v}_3'}{\|\mathbf{v}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)^T$, Ortonormální bází je tedy například posloupnost vektorů $(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)^T$. □

11./12.1.

8.6. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru $U = \langle(1,2,1,1,1)^T, (0,-1,1,1,2)^T\rangle$.

Připomeňme, že

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^5 |\, \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = 0 \forall\, \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^5 |\, \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = 0 \forall\, \mathbf{u} \in B\},$$

kde B je nějaká báze U. Snadno uvážíme, že potřebujeme najít právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Tedy bázi $U^\perp$ tvoří například vektory $(-3,1,1,0,0)^T, (-3,1,0,1,0)^T, (-5,2,0,0,1)^T$. □

8.7. Spočítejte ortogonální projekci vektoru $(2,2,-1)^T$ do podprostoru V a bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$, kde V je z příkladu 8.2.

Podobně jako v úloze 8.1 lze souřadnice ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor V vzhledem k ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ spočítat jako Fourierovy koeficienty, tj. označíme-li $\mathbf{v}_\mathbf{u} \in V$ ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ na V a $\mathbf{v}_\mathbf{u} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2$, pak $(a_1, a_2) = (\langle\mathbf{b}_1, \mathbf{v}\rangle, \langle\mathbf{b}_2, \mathbf{v}\rangle)$, kde $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$ je ortonormální báze nalezená v úloze 8.2. Tedy

$$(a_1, a_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\cdot(2,2,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\cdot(2,2,-1)^T) = (\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T,$$

a proto

$$\mathbf{v_u} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(7,5,-2)^T.$$

Na závěr si zkontrolujme, že $\mathbf{u} - \mathbf{v_u}$ leží v ortogonálním doplňku V, tedy, že je vektor $(2,2,-1)^T - \frac{1}{3}(7,5,-2)^T = \frac{1}{3}(-1,1,-1)^T$ kolmý na všechny (bazické) vektory prostoru V. $\square$

8.8. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$.

(a) najděte nějakou ortogonální bázi podprostoru $U = \langle (1,1,0,1)^T, (1,0,1,1)^T \rangle$,
(b) najděte nějakou ortogonální bázi ortogonálního doplňku $U^\perp$,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(-1,1,0,4)^T$ do podprostoru $W = \langle (1,2,1,-1)^T,\ (1,1,0,1)^T \rangle$.

(a), (b) Můžeme postupovat několika způsoby. Jednak můžeme doplnit vektory $(1,1,0,1)^T, (1,0,1,1)^T$ na bázi celého prostoru $\mathbf{R}^4$ (například vektory $(1,0,0,0)^T$ a $(0,1,0,0)^T$) a tuto bázi upravit Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. První dva vektory ortogonalizované báze budou přitom tvořit ortogonální bázi U, další dva vektory budou tvořit ortogonální bázi doplňku $U^\perp$.

Rovněž nám stačí najít libovolnou bázi $U^\perp$ (například týmž postupem z 8.6) a obě báze ortogonalizovat. Postupujme druhým způsobem: Bázi $U^\perp$ tvoří například posloupnost $(-1,1,1,0)^T, (0,1,1,-1)^T$. Vektor $(0,1,1,-1)^T$ můžeme upravit jedním krokem Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

$$(0,1,1,-1)^T - \frac{(-1,1,1,0)\cdot(0,1,1,-1)^T}{3}(-1,1,1,0)^T = \frac{1}{3}(2,1,1,-3)^T,$$

a proto posloupnost $(-1,1,1,0)^T, (2,1,1,-3)^T$ tvoří ortogonální bázi $U^\perp$. Obdobně zjistíme, že $((1,1,0,1)^T,\ (1,-2,3,1)^T)$ tvoří ortogonální bázi U.

(c) Potřebujeme nejprve určit souřadnice x_1, x_2 ortogonální projekce $\mathbf{u} = x_1 \cdot (1,2,1,-1)^T + x_2 \cdot (1,1,0,1)^T$, aniž budeme hledat ortogonální bázi W, jak jsme činili v 8.7. Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix} & (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} & (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix} \\ (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix} & (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} & (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, proto $\mathbf{u} = (1,0,-1,3)^T$.

Pro kontrolu ještě ověřme, zda je vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (-2,1,1,1)^T$ skutečně kolmý na podprostor U. Zřejmě $(-2,1,1,1)\cdot(1,2,1,-1)^T = 0$ a $(-2,1,1,1)\cdot(1,1,0,1)^T = 0$. $\square$

8.9. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$, U podprostor $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Najděte vektor $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,

(a) je-li $U = \langle (1,3,-2)^T, (1,1,-1)^T \rangle$ a $\mathbf{v} = (2,4,3)^T$,

(b) je-li $U = \langle (1,2,1)^T, (2,1,-1)^T \rangle$ a $\mathbf{v} = (1,2,4)^T$,
(c) je-li $U = \langle (1,2,1)^T, (2,1,-1)^T \rangle$ a $\mathbf{v} = (4,2,1)^T$.

Postupujme obdobně jako v 8.8(d), tj. hledáme takovou lineární kombinaci vektorů $a(1,3,-2)^T + b(1,1,-1)^T$, aby byl vektor $(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T$ kolmý na prostor U. To můžeme ekvivalentně vyjádřit tak, že vektor $(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T$ je kolmý na vektor $(1,3,-2)^T$ i $(1,1,-1)^T$ a odtud dostáváme soustavu rovnic

$$(1,3,-2)\cdot[(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T] = 0,$$
$$(1,1,-1)\cdot[(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T] = 0.$$

Tuto soustavu upravíme na nehomogenní soustavu lineárních rovnic, sepíšeme do (Gramovy) matice a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $a = 1$ a $b = -1$, ortogonální projekce vektoru $(2,4,3)^T$ na podprostor U je $\mathbf{u} = (1,3,-2)^T - (1,1,-1)^T = (0,2,-1)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (2,4,3)^T - (0,2,-1)^T = (2,2,4)^T$.

(b) I tentokrát standardně najdeme Gramovu matici $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$ vyjadřující podmínku, že $(1,2,4)^T - x(1,2,1)^T - y.(2,1,-1)^T$ je kolmé na podprostor U a dopočítáme $x = 2$ a $y = -1$. Ortogonální projekce vektoru $(1,2,4)^T$ na podprostor U je tedy $\mathbf{u} = 2\cdot(1,2,1)^T - 1\cdot(2,1,-1)^T = (0,3,3)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = (1,2,4)^T - (0,3,3)^T = (1,-1,1)^T$.

(c) Všimněme si, že počítáme-li stejně jako v (b), dostaneme Gramovu matic se stejnými levými stranami, tj. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$ a dopočítáme $x = 1$ a $y = 1$, proto $\mathbf{u} = \cdot(1,2,1)^T + (2,1,-1)^T = (3,3,0)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = (4,2,1)^T - (3,3,0)^T = (1,-1,1)^T$. $\square$

8.10. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{C}^3$, tj. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{v}$.

(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $U = \langle (1,i,1-i)^T,\ (i,2+i,-1)^T \rangle$,
(b) najděte bázi ortogonálního doplňku U^T,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(1,0,-i)^T$ do podprostoru U.

(a) Využijeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci provedenou na posloupnost $\mathbf{u}_1 = (1,i,1-i)^T$, $\mathbf{u}_2 = (i,2+i,-1)^T$. Nejprve určíme $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,i,1-i)^T}{\|(1,i,1-i)^T\|} = \frac{1}{2}(1,i,1-i)^T$. Poté spočítáme $c = \mathbf{v}_1\cdot(i,2+i,-1)^T = \frac{1}{2}(1,-i,1+i)\cdot(i,2+i,-1)^T = \frac{-2i}{2} = -i$ a dále $\mathbf{v}_2' = \mathbf{u}_2 - c\,\mathbf{v}_1 = (i,2+i,-1)^T + \frac{i}{2}(1,i,1-i)^T = \frac{1}{2}(3i,3+2i,-1+i)^T$, proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{24}}(3i,3+2i,-1+i)^T$.

(b) $\mathbf{u}_1\cdot(1,-1,0,0,1)^T = 0$, $\mathbf{u}_1\cdot(1,-1,0,0,1)^T = 0$ Protože potřebujeme najít nenulový vektor $\mathbf{v}$ kolmý na vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, tj. má platit, že $(1,i,1-i)^T\cdot\mathbf{v} = (1,-i,1+i)^T\cdot\mathbf{v} = 0$ a $(i,2+i,-1)^T\cdot\mathbf{v} = (-i,2-i,-1)^T\cdot\mathbf{v}^T = 0$, což snadno zformulujeme maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 & -1+i \\ -i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ 0 & 3-i & -2+i \end{pmatrix}.$$

tedy vidíme, že bází řešení soustavy i bází $U^\perp$ je vektor $(-3-3i,3+i,4+2i)^T$.

(c) Podobně jako v příkladu 8.7(c) stačí, abychom spočítali souřadnice ortogonální projekce vzhledem k ortonormální bázi U, tedy hodnoty

$$a_1 = \mathbf{v}_1 \cdot (1,0,-i)^T = \frac{1}{2}(1,-i,1+i)\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} = \frac{1+(1+i)\cdot(-i)}{2} = \frac{2-i}{2},$$

$$a_2 = \mathbf{v}_2 \cdot (1,0,-i)^T = \frac{1}{\sqrt{24}}(-3i,3-2i,-1-i)\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} = \frac{-3i+i-1}{\sqrt{24}} = \frac{-1-2i}{\sqrt{24}}.$$

Tedy ortogonální projekce je vektor

$$\frac{2-i}{4}(1,i,1-i)^T + \frac{-1-2i}{24}(3i,3+2i,-1+i)^T = \frac{1}{24}(18-9i,7+4i,21+5i)^T.$$

□

Další úlohy

(1) Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $(1,3,2,1)^T$, $(3,0,1,1)^T$, $(1,4,2,4)^T$ lineárně závislá ve vektorovém prostorech $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{C}^4$, $\mathbf{Z}_5^4$ a $\mathbf{Z}_7^4$.

(2) Určete bázi a dimenzi podprostoru $\langle(1,3,2,1)^T, (3,0,1,1)^T, (1,4,2,4)^T\rangle$ vektorových prostorů $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{C}^4$, $\mathbf{Z}_5^4$ a $\mathbf{Z}_7^4$.

(3) Najděte všechny podmnožiny množiny $X = \{(1,2,1,1,1)^T, (3,1,3,3,3)^T, (2,4,2,2,2)^T, (1,0,1,3,2)^T\}$, které tvoří bázi podprostoru $U = \langle X\rangle$ vektorových prostorů $\mathbf{Q}^5$, $\mathbf{Z}_5^5$, $\mathbf{Z}_7^5$.

(4) Kolik existuje bází podprostoru $\langle(1,1,2,0)^T, (4,1,3,1)^T, (1,3,2,1)^T\rangle$ vektorových prostorů $\mathbf{Z}_5^4$ a $\mathbf{Z}_7^4$?

(5) Určete dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ vektorových prostorů $\mathbf{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$, jestliže $\mathbf{U} = \langle(1,2,1,3)^T, (1,2,4,1)^T, (3,4,1,0)^T\langle$ a $\mathbf{V} = \langle(4,1,2,3)^T, (0,3,3,1)^T, (1,2,1,3)^T\rangle$.

(6) Určete nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&0\\3&3&1\end{pmatrix}$, matice $\mathbf{A}+\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$.

(7) Najděte nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ všechna řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$ z předchozí úlohy.

(8) Najděte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$ a $\mathbf{Z}_7$ všechna řešení nehomogenní soustavy rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&2&2&2\\2&0&2&1&1&0\end{array}\right)$.

(9) Je-li podprostor $\mathbf{U} = \langle(2,4,0,1,4)^T, (1,2,1,0,3)^T\rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$, najděte bázi nějakého takového podprostoru $\mathbf{V}$, aby $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \mathbf{Z}_5^5$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$.

(10) Uvažujme podprostor $\mathbf{W} = \langle(1,6,2,4,5)^T\rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^5$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. Najděte báze nějakých takových podprostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$, aby $\dim(\mathbf{U})^T = \dim(\mathbf{V})^T = 3$, $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \mathbf{Z}_7^5$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V} = \mathbf{W}$.

(11) Kolika způsoby lze lineárně nezávislou posloupnost $((1,2,2,1)^T, (2,1,1,0)^T)$ doplnit na bázi (chápanou jako posloupnost, tj. záleží na pořadí prvků) vektorového prostoru $\mathbf{Z}_3^4$?

(12) Buď $k \leq n$ přirozená čísla, p prvočíslo a $\mathbf{U}$ podprostor dimenze k vektorového prostoru $\mathbf{Z}_p^n$ nad tělesem $\mathbf{Z}_p$. Určete kolik existuje podprostorů $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{Z}_p^n$, pro něž platí, že $\mathbf{U}+\mathbf{V}=\mathbf{Z}_5^5$ a $\mathbf{U}+\mathbf{V}=\{\mathbf{0}\}$.

(13) Dokažte, že lze nad tělesem racionálních čísel převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$ na matici $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&3&5\end{pmatrix}$.

(14) Uvažujme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ z předchozího příkladu. Najděte nějakou posloupností elementárních řádkových úprav, pomocí nichž lze převést matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$.

(15) Rozhodněte, zda lze nad reálnými čísly převést posloupností elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

(16) Mějme $p=(174)(256), q=(134765)\in S_7$. Určete permutace $p\circ q$, $q\circ p$, $p^{-1}\circ q$ a $q^{-1}\circ p^{-1}$ a $q\circ q$ najděte u všech těchto permutací jejich rozklad na transpozice.

(17) Mějme $p=(1278)(356), q=(13)(4765)\in S_8$. Určete znaménka permutací $p\circ q$, $q\circ p$, $p^{-1}\circ q$ a $q^{-1}\circ p^{-1}$ a $q\circ q$ najděte u všech těchto permutací jejich rozklad na transpozice.

(18) Spočítejte determinant matic $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&0\\1&1&0&1\\1&2&1&2\\2&1&1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\2&1&1&2\\1&1&2&2\\2&1&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{-1}$ nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$.

(19) Najděte pro libovolná $a\in\mathbf{Q}$ nad $\mathbf{Q}$ rekurentní vzorec pro výpočet determinant čtvercové matice $\mathbf{G}_n=(g_{ij})$ stupně n, kde $g_{ii}=1$, $g_{ii+1}=a$ a $g_{i+1i}=b$ a jinde je $g_{ij}=0$.

(20) Rozhodněte, zda jsou nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ regulární matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}^3$.

(21) Najděte nad tělesy $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$ adjungované matice k maticím z předchozí úlohy.

(22) Rozhodněte, pro která $a\in\mathbf{Z}_7$ je nad $\mathbf{Z}_7$ matice $\begin{pmatrix}a&2+a&1\\3a+2&1&a\\2a^2&a+6&2+a\end{pmatrix}$ regulární.

(23) Najděte pro všechna $a\in\mathbf{Z}_7$, pro něž je to možné, inverzní matici k matici z předchozí úlohy.

(24) Spočítejte $(\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix})^{-1}$ nad tělesy $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}_5$ a $\mathbf{Z}_7$.

(25) Najděte pro všechna $a\in\mathbf{Z}_7$, pro něž je to možné, inverzní matici k matici z předchozí úlohy.

(26) Buď $\cdot$ je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$.

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \langle (1,3,-2,1,1)^T$, $(2,0,1,1,0)^T$, $(1,3,1,2,-1)^T \rangle$,
(b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
(c) určete ortogonální projekci vektoru $(2,1,-1,0,4)^T$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
(d) je-li $U = \langle (2,1,0,1,-1)^T, (1,1,0,-1,3)^T, (4,-1,-1,-2,3)^T \rangle$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1,1,0,0,-2)^T = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,
(e) najděte ortonormální báze podprostorů $U + V$, $U^\perp + V$, $U + V^\perp$, $U^\perp + V^\perp$, $U \cap V$, $U^\perp \cap V$, $U \cap V^\perp$ a $U^\perp \cap V^\perp$.

(27) Mějme komplexní vektorový prostor $\mathbf{C}^4$ se standardním skalárním součinem.
(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $V = \langle (1, 1-i, 1+i, 2-3i)^T$, $(i+1, -1, 1+2i, 2-i)^T \rangle$,
(b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
(c) určete ortogonální projekci vektoru $(1+3i, 2-i, -1, 2i)^T$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
(d) je-li $U = \langle (i, -i, 2+i, 1-3i)^T, (1,1,i,2+3i)^T \rangle$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1+i, 1, i, 2-i)^T = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,