Příklady 10.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 30.4. 16:00):

1. (7 bodů) V rozšíření $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$, spočtěte $[\mathbb{Q}(i, e^{2\pi i/6}) : \mathbb{Q}]$.

2. (8 bodů) Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$. Vyjádřete minimální polynom $m_{a^{-1},\mathbf{T}}$ pomocí koeficientů minimálního polynomu $m_{a,\mathbf{T}}$.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Příklady vhodné na cvičení:

$\mathbf{T}$-automorfismem rozumíme $\mathbf{T}$-izomorfismus tělesa do sebe samého. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme podtělesa a prvky tělesa komplexních čísel.

3. Spočtěte a) $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$, b) $[\mathbb{Q}(i, e^{2\pi i/8}) : \mathbb{Q}]$.

4. Najděte kořenové nadtěleso polynomu $x^5 - 4x - 2$ nad $\mathbb{Q}$.

5. Určete počet prvků kořenového nadtělesa $\mathbf{S}$ polynomu $f(x) = x^4 + x + 1$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Spočtěte řád nějakého kořene tohoto polynomu v grupě $\mathbf{S}^*$.

6. Najděte všechny $\mathbb{Q}$-automorfismy tělesa a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. c) Najděte všechny $\mathbb{R}$-automorfismy tělesa $\mathbb{C}$.

7. Buď $\mathbb{Q} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles, kde $\mathbf{S} \leq \mathbb{C}$ a $[\mathbf{S} : \mathbb{Q}] = 2$. Dokažte, že potom existuje $s \in \mathbb{Z}$ tak, že $\mathbf{S} = \mathbb{Q}(\sqrt{s})$.

Další doporučené příklady na domácí počítání:

8. Buď $\mathbf{T}$ těleso a a algebraický prvek nad $\mathbf{T}$ takový, že $[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}]$ je lichý. Dokažte, že $\mathbf{T}(a) = \mathbf{T}(a^2)$.

9. Předpokládejme, že je číslo $a \in \mathbb{R}$ transcendentní nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že a) číslo $\sqrt{a}$, b) číslo $f(a)$, kde f je libovolný polynom z $\mathbb{Q}[x]$, je také transcendentní nad $\mathbb{Q}$.

10. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a, b \in S$ algebraické nad $\mathbf{T}$. Předpokládejme, že stupně polynomů $m_{a,\mathbf{T}}$, $m_{b,\mathbf{T}}$ jsou nesoudělné. Pak $[\mathbf{T}(a, b) : \mathbf{T}] = [\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}] \cdot [\mathbf{T}(b) : \mathbf{T}]$. Uveďte protipříklad na tuto rovnost, pokud stupně nesoudělné nejsou.

11. Napište, jak vypadá rozkladové nadtěleso $\mathbf{S}$ polynomu $2 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4$ nad tělesem $\mathbb{Q}$. Určete stupeň $[\mathbf{S} : \mathbb{Q}]$. Rada: jeden kořen je i.