Příklady 12.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do pondělí 19.5. 12:00):

1. (7 bodů) Buď $f \in \mathbb{Q}[x]$ ireducibilní polynom stupně 2 a $\mathbf{S}$ jeho kořenové nadtěleso. Dokažte, že $\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_2$.

2. (8 bodů) Buď $\mathbf{S}$ rozkladové nadtěleso polynomu $x^4 - 2$ nad $\mathbb{Q}$. Určete řád grupy $\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbb{Q})$.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Příklady vhodné na cvičení:

3. Najděte (až na $\mathbb{Q}$-izomorfismus) všechna kořenová nadtělesa a rozkladové nadtěleso polynomu $x^3 - 6x - 9$ nad $\mathbb{Q}$.

4. Dokažte, že $\mathbf{S} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3})$ je rozkladové nadtěleso polynomu $x^3 - 2$ nad $\mathbb{Q}$. Spočtěte jeho stupeň nad $\mathbb{Q}$ a najděte $\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbb{Q})$.

5. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbb{C}$. Je-li $\mathbf{S}$ rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$ nad tělesem $\mathbf{T}$, dokažte, že je grupa $\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbf{T})$ abelovská.

6. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbb{C}$ $a \in T$a . Je-li $\mathbf{S}$ rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - a$ nad tělesem $\mathbf{T}$, dokažte, že je grupa $\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbf{T})$ metaabelovská.

7. Reálné číslo $\gamma = \alpha - \frac{1}{\alpha}$, kde $\alpha = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$, je kořenem polynomu $x^3 + 3x - 2$. Vyjádřete γ^{-1} jako $\mathbb{Q}$-lineární kombinaci nezáporných mocnin prvku γ.

Další doporučené příklady na domácí počítání:

8. Buď $f \in \mathbb{Q}[x]$ ireducibilní polynom stupně 3 s právě jedním reálným kořenem a a $\mathbf{S} = \mathbf{T}(a)$ jeho kořenové nadtěleso. Dokažte, že $|\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbb{Q})| = 1$.

9. Buď $\mathbf{S}$ je rozkladové nadtěleso polynomu $x^4 - 2$ nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že $\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbb{Q}) \simeq \mathbf{D}_8$.

10. Buď $\mathbf{S}$ je rozkladové nadtěleso polynomu $x^4 + 4x^2 + 2$ nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že $\mathbf{S} = \mathbf{T}(a)$, kde a je jeden z kořenů a určete $\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbb{Q})$.

11. Dokažte, že každý $\mathbb{Q}$-automorfismus φ tělesa $\mathbb{R}$ zachovává uspořádání (tj. že $x < y$ právě tehdy, když $\varphi(x) < \varphi(y)$). Návod: $x < y$ právě tehdy, když $y = x + c^2$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

12. Za pomoci předchozí úlohy dokažte, že $|\mathbf{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})| = 1$.

Poznámka: Srovnejte tento výsledek s faktem, že $\mathbf{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ je nekonečná grupa (důkaz tohoto faktu je složitější).