Příklady 2.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 5.3. 16:00):

1. (6 bodů) V algebře $(\mathbb{N},+) \times (\mathbb{N},+)$ najděte množinu generátorů minimální vzhledem k inkluzi . Dokažte, že neexistuje konečná množina generátorů této algebry. ($0 \notin \mathbb{N}$!)

2. (9 bodů) Najděte všechny homomorfismy $(\mathbb{Q},+,\cdot) \to (\mathbb{Q},+,\cdot)$.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Příklady vhodné na cvičení:

3. Najděte nejmenší množinu generátorů algebry a) $(\mathbb{Z},+) \times (\mathbb{Z},+)$, b) $(\mathbb{N},\cdot) \times (\mathbb{N},\cdot)$.

4. Rozhodněte, které z následujících zobrazení jsou homomorfismy:

$$\alpha : (\mathbb{C},+,\cdot) \to (M_2(\mathbb{R}),+,\cdot), \qquad a+bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
$$\beta : (\mathbb{Z},+,\cdot) \to (\{0,\dots,n-1\}, +_{\bmod n}, \cdot_{\bmod n}), \qquad x \mapsto x \bmod n$$
$$\gamma : (\{0,\dots,n-1\}, +_{\bmod n}, \cdot_{\bmod n} \to (\mathbb{Z},+,\cdot), \qquad x \mapsto x$$

5. Najděte všechny homomorfismy a)$(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{N},+)$, b) $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{N}\cup\{0\},+)$, c) $(\mathbb{Z},+,\cdot) \to (\mathbb{Z},+,\cdot)$, d)$(\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Z},+)$.

6. Rozhodněte, které z následujících algeber jsou izomorfní: $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{R}^+,+)$, $(\mathbb{R}^+,\cdot)$.

7. Dokažte, že $(\mathbb{R}^2,\cdot) \not\simeq (\mathbb{R}^3,\cdot)$, zatímco $(\mathbb{R}^2,+) \simeq (\mathbb{R}^3,+)$.

8. Dokažte, že $(\mathbb{Z},+) \not\simeq (\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Q},+) \not\simeq (\mathbb{Q}^+,\cdot)$, ale $(\mathbb{R},+) \simeq (\mathbb{R}^+,\cdot)$.

Další doporučené příklady na domácí počítání:

9. Napište, jak vypadají operace algebry $\mathcal{A} = (\mathbb{Z},+,\cdot)\times(\mathbb{Z},\cdot,+)$. Spočtěte $\langle (1,0),(0,1)\rangle_{\mathcal{A}}$.

10. Mějme algebry $\mathcal{A} = (A,F)$ a $\mathcal{A}_1 = (A_1,F_1),\dots,\mathcal{A}_n = (A_n,F_n)$ ve stejném jazyce Σ a $f_i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_i$, $i = 1,\dots,n$, homomorfismy. Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{A} \to \prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ definované $f(a) = (f_1(a),\dots,f_n(a))$, je homomorfismus $\mathcal{A}$ a $\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i$.

11. Dokažte, že žádné dvě z následujících algeber nejsou izomorfní: $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$.