Příklady 3.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 12.3. 16:00):

1. (8 bodů) Buď $\mathbf{G} = (G, \circ, ^{-1}, id)$ grupa a $a \in G$. Definujeme zobrazení $\psi_a : G \to G$ předpisem $\psi_a(x) = axa^{-1}$. Dokažte, že

a) ψ_a je automorfismus grupy $\mathbf{G}$ (těmto automorfismům se říká *vnitřní*);

b) zobrazení $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{Aut}(\mathbf{G})$, které prvku a přiřazuje zobrazení ψ_a, je homomorfismus;

2. (7 bodů) Dokažte, že $(\mathbb{C}^*, \cdot, ^{-1}, 1) \simeq (\mathbb{R}^+, \cdot, ^{-1}, 1) \times (\mathbf{S}, \cdot, ^{-1}, 1)$, kde $\mathbb{R}^+$ značí podgrupu $\mathbb{R}^*$ sestávající z kladných čísel a $\mathbf{S}$ značí podgrupu $\mathbb{C}^*$ sestávající z čísel s absolutní hodnotou 1.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Příklady vhodné na cvičení:

3. Dokažte, že je invariantem pro každou algebru $(A, \circ)$ vlastnost

a) existuje $a \in A$, pro něž platí $a \circ a = a$,

b) pro každé $a \in A$ platí $a \circ a = a$,

c) $|\{a \in A|\ a \circ a = a\}| = 2$,

d) $|\{a \in A|\ a \circ a = a\}| > 5$.

4. Najděte všechny homomorfismy aditivních grup:
a) $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$, b) $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$, c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$, d) $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, e) $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_6$, f) $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$.

5. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení $a \mapsto i^a$ homomorfismy do grupy $(\mathbb{C}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$, uvažujeme-li ho na grupě a) $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$, b) $(\mathbb{Z}_5, +, -, 0)$, c) $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$.

6. Jak vypadají všechny homomorfismy $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0) \to (\mathbb{C}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$?

7. Najděte a) všechny endomorfismy grupy $\mathbb{Q}$, b) všechny spojité endomorfismy grupy $\mathbb{R}$, c) nějaký nespojitý endomorfismus grupy $\mathbb{R}$.

Další doporučené příklady na domácí počítání:

8. Buď $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa. Dokažte, že následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\mathbf{G}$ je abelovská;

(2) zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ na G je automorfismus grupy $\mathbf{G}$;
(3) zobrazení $x \mapsto x^{2}$ na G je endomorfismus grupy $\mathbf{G}$.

9. Najděte všechny homomorfismy $(\mathbf{S}_3, \circ, ^{-1}, id) \to (\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$, v závislosti na n.

10. Rozhodněte, zda $\mathbf{A}_4$ (grupa sudých permutací na 4 prvcích) je izomorfní grupě $\mathbf{D}_{12}$ (grupa symetrií pravidelného šestiúhelníka).