

Příklady 4.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 19.3. 16:00):

1. (7 bodů) Jakému součinu cyklických grup je izomorfní grupa $(\mathbb{Z}_{68}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$? Určete kolik nejméně prvků může mít množina generátorů této grupy.
2. (8 bodů) Je-li $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ cyklická grupa konečného řádu n , dokažte, že jsou grupy $(\text{Aut}(G, \cdot, ^{-1}, 1), ^{-1}, \circ, id_G)$ a $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ izomorfní. V důkazu můžete využít vše dokázané na přednášce včetně faktu, že $(\text{End}(G, \cdot, 1), \circ, id_G) \cong (\mathbb{Z}_n, \cdot, 1)$.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Příklady vhodné na cvičení:

3. Rozhodněte, zda je cyklická grupa a) $(\mathbb{Z}_{101}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$, b) $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$, c) $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$, d) $(\mathbb{Z}_8, +, -, 0) \times (\mathbb{Z}_9, +, -, 0)$, e) $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0) \times (\mathbb{Z}_9, +, -, 0)$, f) $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot, ^{-1}, 1) \times (\mathbb{Z}_9^*, \cdot, ^{-1}, 1)$.
4. Existuje n takové, že \mathbb{Z}_n^* je izomorfní aditivním grupám a) \mathbb{Z}_6 , b) \mathbb{Z}_7 , c) \mathbb{Z}_8 , d) \mathbb{Z}_9 ?
5. Pro každé n přirozené najděte $r > s > n$ taková, že $\mathbb{Z}_r^* \simeq \mathbb{Z}_s^*$.
6. Necht' \mathbf{H} je Kleinova podgrupa grupy \mathbf{S}_4 , tj. podgrupa sestávající z identity a všech tří permutací typu $(i j)(k l)$. Rozhodněte, zda je \mathbf{H} normální podgrupou grupy \mathbf{S}_4 .
7. Rozhodněte, zda množina $\{\pi \in S_4 : \pi^3 = id\}$ tvoří normální podgrupu grupy \mathbf{S}_4 .
8. Najděte nejmenší normální podgrupu grupy \mathbf{S}_3 obsahující a) permutaci $(1 2)$, b) permutaci $(1 2 3)$.

Další doporučené příklady na domácí počítání:

9. Určete až na izomorfismus všechny konečné grupy až do řádu 7.
10. Dokažte, že každá čtyřprvková grupa je izomorfní \mathbb{Z}_4 nebo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Návod: předpokládejme, že není cyklická, takže si vezmeme dva generátory, podíváme se, jaké tak asi mohou mít řády, dokážeme, že musí komutovat, atd.