Příklady 5.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 26.3. 16:00):

1. (8 bodů) Buď $\mathbf{Q}$ osmiprvková kvaternionová grupa. Vypište její podgrupy a ověřte, že jsou všechny normální.

2. (7 bodů) Popište všechny homomorfismy grupy $(\mathbb{Z}_2,+,-,0)\times(\mathbb{Z}_2,+,-,0)$ do symetrické grupy $(S_n,\circ,^{-1},id)$ pro $n\in\mathbb{N}$. Kolik jich v závislosti na n existuje?

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Příklady vhodné na cvičení:

3. Popište všechny automorfismy na grupě a) $(\mathbb{Z}_{100},+,-,0)$ b) $(\mathbb{Z}_{25},+,-,0)\times(\mathbb{Z}_4,+,-,0)$ c) $(\mathbb{Z}^*_{101},\cdot,^{-1},1)$.

4. Popište všechny homomorfismy grupy $\mathcal{G}$ do symetrické grupy $(S_9,\circ,^{-1},id)$, určete kolik jich existuje a rozhodněte, které z homomorfismů jsou prosté, jestliže $\mathcal{G}=$ a) $(\mathbb{Z}_2,+,-,0)$, b) $(\mathbb{Z}_3,+,-,0)$, c) $(\mathbb{Z}_4,+,-,0)$, d) $(\mathbb{Z}_{10},+,-,0)$, e) $(\mathbb{Z}_3,+,-,0)\times(\mathbb{Z}_4,+,-,0)$ f) $(\mathbb{Z}^*_{11},\cdot,^{-1},1)$. Rozhodněte, které (a kolik) z homomorfismů jsou prosté

5. Popište všechny kongruence na algebře a) $(\mathbb{Z},+)$ b) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ c) $(\mathbb{Z},0,1)$ (tj. máme pouze nulární operace) d) $(\mathbb{Z}_n,+)$, e) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.

6. Definujme zobrazení $v_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$ předpisem $v_2(a)=n\Leftrightarrow\frac{a}{2^n}\in\mathbb{Z}$ pro $a\neq 0$ a $\frac{a}{2^{n+1}}\notin\mathbb{Z}$, $v_2(0)=\infty$ a relaci $\sim$ podmínkou $a\sim b\Leftrightarrow v_2(a)=v_2(b)$. Rozhodněte, zda je $\sim$ kongruence na algebře a) $(\mathbb{Z},\cdot)$ b) $(\mathbb{Z},\cdot,+)$, c) $(\mathbb{Z},\cdot,-)$ d) $(\mathbb{Z},\cdot,-,0,1)$ ($-$ uvažujte jako unární operaci).

Další doporučené příklady na domácí počítání:

7. Popište všechny homomorfismy symetrické grupy $(S_n,\circ,^{-1},id)$ do a) cyklické grupy $(\mathbb{Z}_n,+,-,0)$ pro $n\in\mathbb{N}$, b) obecné konečné komutativní grupy.

8. Najděte nějakou obecnou lineární grupu $GL_n(\mathbb{C})$ nad tělesem komplexních čísel, do níž lze vnořit každou konečnou cyklickou grupu.