Příklady 6.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 2.4. 16:00):

Označme $\mathcal{C}^* = (\mathbb{C}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupu nenulových komplexních čísel s násobením, $\mathcal{C}_n$ podgrupu $\mathcal{C}^*$ tvořenou množinou $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{C}_{p^\infty}$ podgrupu $\mathcal{C}^*$ tvořenou množinou $\mathbb{C}_{p^\infty} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{C}_{p^k}$ pro každé prvočíslo p (tzv. Prüferovu grupu).

1. (7 bodů) Dokažte pro každé $k \in \mathbb{N}$, že platí $\mathcal{C}_{p^\infty}/\mathcal{C}_{p^k} \simeq \mathcal{C}_{p^\infty}$.

2. (8 bodů) Najděte prostý homomorfismus grupy $\mathcal{C}_{p^\infty}$ do grupy $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +, -, 0)$

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Příklady vhodné na cvičení:

3. Jak vypadá faktorgrupa a) $(\mathbb{R}, +, -, 0)/(\mathbb{Z}, +, -, 0)$, b) $(\mathbb{Q}, +, -, 0)/(\mathbb{Z}, +, -, 0)$?

4. S kterou známou grupou je izomorfní faktorgrupa
a) $(\mathbb{C}, +, -, 0)/(\mathbb{R}, +, -, 0)$, b) $(\mathbb{C}^*, \cdot, ^{-1}, 1)/(\mathbb{R}^+, \cdot, ^{-1}, 1)$?

5. Dokažte, že platí $\mathcal{C}^*/\mathcal{C}_n \simeq \mathcal{C}^*$ (značení viz Domácí úlohy).

6. Dokažte, že je-li $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ a $[\mathbf{G} : \mathbf{H}] = 2$, pak $\mathbf{H} \trianglelefteq \mathbf{G}$. Dokažte, že obdobné tvrzení neplatí pro $[\mathbf{G} : \mathbf{H}] = 3$.

7. Najděte v dihedrální grupě $\mathbf{D}_8$ podgrupy $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, aby $\mathbf{A} \trianglelefteq \mathbf{B} \trianglelefteq \mathbf{D}_8$ a $\mathbf{A} \ntrianglelefteq \mathbf{D}_8$

Další doporučené příklady na domácí počítání:

8. Najděte všechny normální podgrupy dihedrální grupy $\mathbf{D}_8$.

9. Je-li $\mathbf{Q}$ osmiprvková kvaternionová grupa, ověřte, že $\{\pm 1\}$ tvoří normální podgrupu $\mathbf{N}$ a rozhodněte, zda je $\mathbf{Q}/\mathbf{N}$ izomorfní grupě $\mathbb{Z}_4$ nebo grupě $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

10. Uvažujte grupu $\mathbf{D}_{2n}$ symetrií pravidelného n-úhelníka pro *sudé* $n \geq 4$.
a) Dokažte, že středová symetrie (tj. otočení o 180 stupňů) generuje normální podgrupu, označme ji $\mathbf{N}$.
b) V závisosti na n rozhodněte, zda je grupa $\mathbf{D}_{2n}/\mathbf{N}$ abelovská.