Příklady 7.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 9.4. 16:00):

Značení: Je-li $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$ komutativní okruh s jednotkou a $f \in R$, budeme hlavní ideál fR značit také (f).

1. (9 bodů) Buď $\mathbf{T}$ těleso. Dokažte, že ideál $\mathbf{I}$ je maximální v okruhu $\mathbf{T}[x]$ právě tehdy, když $I = fT[x]$ pro nějaký ireducibilní polynom f.

2. (6 bodů) Rozhodněte, zda je faktorokruh $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + 2x + 1)$ tělesem.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!

Příklady vhodné na cvičení:

3. Dokažte, že $\mathbf{R}[x]/(x - a) \simeq \mathbf{R}$ pro libovolný komutativní okruh $\mathbf{R}$ a $a \in \mathbf{R}$.

4. Dokažte, že a) $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1) \simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, b) $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1) \simeq \{(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} |\ a \equiv b (\mathrm{mod}\ 2)\}$, c) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$, d) $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

5. S jakými známými okruhy jsou izomorfní faktorové okruhy:
a) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 3)$, b) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$, c) $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 3)$?

6. Rozhodněte kolik má prvků a zda je tělesem okruh a) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$ b) $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$.

Další doporučené příklady na domácí počítání:

7. Všimněte si, že $\mathbb{Z}[x]/(x-1)$ není těleso, tedy ideál $(x-1)\mathbb{Z}[x]$ není maximální. Najděte ideál J takový, že $(x - 1)\mathbb{Z}[x] \subset J \subset \mathbb{Z}[x]$.

8. S kterým známým oborem je izomorfní faktorokruh $\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 4)$?

9. S kterým známým tělesem je izomorfní faktorokruh $\mathbb{Z}[i]/(1 + i)$?

10. Dokažte, že $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{Q}\}$ tvoří ideál podokruhu $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ okruhu $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q})$. Dále dokažte, že $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.