1. Skalární součin

1.1. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Spočítejte hodnoty $\| \mathbf{u} \|$, $\| \mathbf{v} \|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a určete úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,
(b) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$,
(c) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{v}$,
(d) najděte všechny vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ kolmé zároveň na $\mathbf{u}$ i na $\mathbf{v}$.

(a) Připomeňme, že je standardní skalární součin $\cdot$ na reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ definován maticovým násobením $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}$ a norma je pro každý skalární součin daná podmínkou $\| \mathbf{u} \| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Proto

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad \| \mathbf{v} \| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

Označíme-li φ úhel svíraný vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, víme, že

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tudíž $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

(b) Hledáme množinu všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ splňujících podmínku $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$, tedy množinu všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $(1, 3)$. Snadno najdeme jednoprvkovou bázi $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ tohoto podprostoru, tedy hledanou podmnožinou je právě podprostor $\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Závěrem poznamenejme, že se jedná právě o přímku s normálovým vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ procházející počátkem, která má právě (námi řešenou) rovnici $x_1 + 3x_2 = 0$.

(c) Stejně jako v (b) hledáme parametrický popis podprostoru všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $(2, 1)$. Kterým je právě přímka $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ s bází $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Tentokrát se ptáme, které vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ splňují podmínku $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ a zároveň $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$, což maticově zapsáno znamená, že hledáme řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hledaná množina, jak jsme mohli zjistit i geometrickou úvahou obsahuje pouze nulový vektor. $\square$

1.2. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Spočítejte $\| \mathbf{u} \|$, $\| \mathbf{v} \|$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,
(b) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$,

(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na $\mathbf{v}$,
(d) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$ kolmé zároveň na $\mathbf{u}$ i na $\mathbf{v}$.

(a) Stejně jako v předchozí úloze postupujeme podle definice:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

Označíme-li opět φ úhel svíraný vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, pak

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{-1+2+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

tudíž $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

(b) Opět hledáme množinu všech řešení homogenní soustavy rovnic, tentokrát s maticí $\mathbf{u}^T = (-1,1,2)$. Obvyklým postupem určíme bázi $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ tohoto podprostoru.

(c) Stejným postupem jako v části (b) najdeme bázi $\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ roviny s normálovým vektorem $\mathbf{v}$ rovnicovým popisem $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

(d) Tentokrát řešíme homogenní soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Snadno najdeme jednoprvkovou bázi $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. □

1.3. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ a nechť $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Spočítejte $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,
(b) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^4$, které jsou kolmé na $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,
(c) najděte všechny vektory $\mathbf{x} = (a,b,0,0)^T$, které s vektorem svírají úhel $\frac{\pi}{3}$,
(d) existuje-li, najděte bázi podprostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektor $\mathbf{u}$, v níž jsou každé dva různé vektory vzájemně kolmé.

(a) Opět jen vypočteme z definice:

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1+1+1+1} = 2, \quad \cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

kde φ značí úhel svíraný vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, proto opět $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

(b) Řešíme soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

proto hledanou bází tvoří například posloupnost ($\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

(c) Nejprve poznamenejme, že $(a, b)^T \neq (0, 0)^T$ a že hledáme vektory $\mathbf{x} = (a, b, 0, 0)^T$ splňující podmínku

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\|\,\mathbf{x}\,\|\|\,\mathbf{u}\,\|} = \frac{a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

cože je po přenásobení ekvivalentní podmínce $a + b = \sqrt{a^2 + b^2}$. Umocníme-li a odečteme-li od obou stran $a^2 + b^2$ dostáváme opět ekvivalentní podmínku

$$2ab = 0 \ \text{ a zároveň } \ a + b > 0.$$

To je splněno, právě když $a = 0, b > 0$ nebo $a > 0, b = 0$, tedy hledaný vektory leží právě v množině

$$\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}^+\}$$

proto hledanou bází je například posloupnost ($\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

(d) Postupujeme obdobně jako v úloze (b), jen úvahu používáme induktivně a v každém kroku najdeme jen jeden nenulový kolmý vektor. Nejprve zvolíme vektor například $(0, 0, 1, 1)^T$, který je kolmý na vektor $\mathbf{u}$ a poté hledáme vektor kolmý na oba tyto vektory, tedy řešení soustavy s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jímž je například vektor $(-1, 1, 0, 0)^T$. Nyní zbývá najít vektor kolmý na všechny tři vektor, tj. řešení

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jímž je například $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Našli jsme bázi ($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$) □

1.4. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru

$$U = \langle (1, 2, 1, 1, 1)^T, (0, -1, 1, 1, 2)^T \rangle$$

reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem.

Připomeňme, že

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5 |\, \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = 0 \forall\, \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5 |\, \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = 0 \forall\, \mathbf{u} \in B\},$$

kde B je nějaká báze U. Snadno uvážíme, že potřebujeme najít právě řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Tedy bázi $U^{\perp}$ tvoří například vektory $(-3,1,1,0,0)^T, (-3,1,0,1,0)^T, (-5,2,0,0,1)^T$. □

1.5. Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, definujme zobrazení $\cdot$, které dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z reálného lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$ přiřadí hodnotu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\, \mathbf{A}^T \mathbf{A}\, \mathbf{v}$.

(a) Dokažte, že je $\cdot$ skalární součin,
(b) spočítejte $\|\mathbf{e}_1\|$, $\|\mathbf{e}_2\|$ a $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$ pro vektory kanonické báze a určete $\cos\varphi$ pro úhel φ svíraný vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$,
(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{R}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{e}_1$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\cdot$.

(a) Podmínka linearity v obou složkách plyne okamžitě z linearity násobení maticí a podmínka symetrie plyne ze symetrie čtvercové matice stupně jedna. Zbývá si všimnout, že je matice $\mathbf{A}$ regulární, a proto $\mathbf{A}\,\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ pro všechny nenulové vektory $\mathbf{u}$. Protože je hodnota standardního skalárního součinu vektoru $\mathbf{A}\,\mathbf{u}$ se sebou rovná právě hodnotě $\mathbf{u}^T\, \mathbf{A}^T \mathbf{A}\, \mathbf{u}$, je ta nutně nenulová (a tedy matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ pozitivně definitní).

(b) Spočítáme-li $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, zbývá přímočaře určit

$$\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = \sqrt{\mathbf{e}_1^T \mathbf{B} \mathbf{e}_1} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2} = \sqrt{\mathbf{e}_2^T \mathbf{B} \mathbf{e}_2} = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{B} \mathbf{e}_2 = 1, \quad \cos\varphi = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

(c) Hledáme množinu všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ splňujících podmínku

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1^T \mathbf{B}\, \mathbf{x} = 0,$$

to znamená, že počítáme homogenní soustavy rovnic s maticí $(5,1)$. Snadno najdeme jednoprvkovou bázi $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. □

5.3.

1.6. Je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -2 \end{pmatrix}$, definujme zobrazení $\cdot$, které dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z komplexního lineárního prostoru $\mathbb{C}^2$ přiřadí hodnotu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^*\, \mathbf{A}^* \mathbf{A}\, \mathbf{v}$.

(a) Dokažte, že je $\cdot$ skalární součin,
(b) spočítejte $\|\mathbf{e}_1\|$, $\|\mathbf{e}_2\|$, $\| \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \|$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$,
(c) najděte bázi podprostoru všech vektorů prostoru $\mathbb{C}^2$, které jsou kolmé na $\mathbf{e}_1$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\cdot$,
(d) najděte ortogonální bázi $\mathbb{C}^2$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\cdot$,
(e) najděte ortonormální bázi $\mathbb{C}^2$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\cdot$,

(a) Uvažujeme obdobně jako v předchozí úloze. Linearity v druhé složce plyne z linearity násobení maticí, maticovým výpočtem zjistíme, že

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^* = (\mathbf{u}^* \, \mathbf{A}^* \mathbf{A} \, \mathbf{v})^* = \mathbf{v}^* \, \mathbf{A}^* \mathbf{A} \, \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

protože je matice $\mathbf{A}$ regulární, a tudíž je $\mathbf{A} \, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ pro všechny nenulové vektory $\mathbf{u}$. Protože se hodnota $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ rovná právě standardnímu skalárnímu součinu vektoru $\mathbf{A} \, \mathbf{u}$ se sebou samým, máme $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}^+$.

(b) Opět nejprve určíme $\mathbf{B} = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$. Zřejmě hodnoty $\|\mathbf{e}_1\| = 1$, $\|\mathbf{e}_2\| = 5$ a $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 2i$ určíme přímo z matice $\mathbf{B}$ a snadno přímočaře spočítáme

$$\| \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \| = \|i\| \cdot \|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_2\| = 5,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = -7.$$

(c) Tentokrát hledáme množinu všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$ splňujících podmínku

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_1^* \mathbf{B} \, \mathbf{x} = 0,$$

to znamená, že počítáme homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2i \end{pmatrix}$, pro kterou tvoří bázi například vektor $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Ortogonální bázi jsme našli v předchozím bodě, neboť jsme zjistili, že posloupnost $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix})$ je ortogonální, tudíž lineárně nezávislá i generující.

(e) Nyní stačí, abychom nalezenou ortogonální bázi normalizovali. Už jsme spočítali, že $\|\mathbf{e}_1\| = 1$, zbývá spočítat

$$\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

tedy báze nalezená v bodě (d) už byla ortonormální. □

1.7. Nechť $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ jsou vektory v reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

(a) Ověřte, že $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$,
(b) spočítejte souřadnice vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ a $(1,2,3)^T$ vzhledem k ortonormální bázi B,
(c) určete ortogonální projekce vektorů $(0,0,1)^T$, $(2,1,0)^T$ do podprostoru $U = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$.

(a) Podle definice spočítáme

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 3 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{18}} = 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = 0,\quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{6}})^2+(\frac{2}{\sqrt{6}})^2 = 1,$$

tedy zjistili jsme, že B je ortonormální, a proto lineárně nezávislá posloupnost. Protože jde o tříprvkovou lineárně nezávislou posloupnost ve vektorovém prostoru dimenze 3, musí jít o bázi. Seřadíme-li vektory $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ do matice $\mathbf{N}$, mohli jsme otázku zformulovat maticově, konkrétně jsme měli zjistit (a zjistili), zda $\mathbf{N}^T\cdot\mathbf{N} = \mathbf{I}_3$.

(b) Připomeňme, že pro každou ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$ tvoří souřadnice vektoru $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi B jednoznačně určený aritmetický vektor $(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^3$, pro který platí $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{b}_i$. Využijeme-li ortonormality bázi, vidíme, že

$$\mathbf{b}_j^T\cdot\mathbf{v} = \mathbf{b}_j^T\cdot\sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{b}_j^T\cdot\mathbf{b}_i = x_j,$$

tedy souřadnice$\mathbf{v}$ jsou právě Fourierovy koeficienty. Konkrétně dostáváme, že

$\mathbf{N}^T\cdot(0,0,1)^T = (1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}},1\cdot 0,1\cdot\frac{-2}{\sqrt{6}})^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2},0,-2)^T$ jsou souřadnice vektoru $(0,0,1)^T$ vzhledem k B,

$\mathbf{N}^T\cdot(2,1,0)^T = (\frac{2+1}{\sqrt{3}},\frac{2-1}{\sqrt{2}},\frac{2+1}{\sqrt{6}})^T = (\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})^T$ jsou souřadnice vektoru $(2,1,0)^T$ vzhledem k B a

$\mathbf{N}^T\cdot(1,2,3)^T = (\frac{1+2+3}{\sqrt{3}},\frac{1-2}{\sqrt{2}},\frac{1+2-3\cdot 2}{\sqrt{6}})^T = (2\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}})^T$ jsou souřadnice vektoru $(1,2,3)^T$ vzhledem k B.

(c) V předchozí úvaze jsme zjistili, že

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\mathbf{b}_1 + 0\cdot\mathbf{b}_2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\mathbf{b}_3,$$

proto ortogonální projekci vektoru $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ do U tvoří vektor $\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Obdobně protože

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \sqrt{3}\cdot\mathbf{b}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathbf{b}_2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\mathbf{b}_3,$$

je vektor $\sqrt{3}\cdot\mathbf{b}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ ortogonální projekcí vektoru $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ do do U. □

1.8. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, U podprostor $\mathbb{R}^3$ a $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$. Najděte vektor $\mathbf{u}\in U$ a $\mathbf{u}^\perp\in U^\perp$, aby $\mathbf{v} = \mathbf{u}+\mathbf{u}^\perp$,

(a) je-li $U = \langle(1,3,-2)^T,(1,1,-1)^T\rangle$ a $\mathbf{v} = (2,4,3)^T$,
(b) je-li $U = \langle(1,2,1)^T,(2,1,-1)^T\rangle$ a $\mathbf{v} = (1,2,4)^T$,
(c) je-li $U = \langle(1,2,1)^T,(2,1,-1)^T\rangle$ a $\mathbf{v} = (4,2,1)^T$.

Hledáme takovou lineární kombinaci vektorů $a(1,3,-2)^T + b(1,1,-1)^T$, aby byl vektor $(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T$ kolmý na prostor U. To můžeme ekvivalentně vyjádřit tak, že vektor $(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T$ je kolmý na vektor $(1,3,-2)^T$ i $(1,1,-1)^T$ a odtud dostáváme soustavu rovnic

$$(1,3,-2)\cdot[(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T] = 0,$$

$$(1,1,-1)\cdot[(2,4,3)^T - a(1,3,-2)^T - b(1,1,-1)^T] = 0.$$

Tuto soustavu upravíme na nehomogenní soustavu lineárních rovnic, sepíšeme do (Gramovy) matice a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $a = 1$ a $b = -1$, ortogonální projekce vektoru $(2,4,3)^T$ na podprostor U je $\mathbf{u} = (1,3,-2)^T - (1,1,-1)^T = (0,2,-1)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (2,4,3)^T - (0,2,-1)^T = (2,2,4)^T$.

(b) I tentokrát standardně najdeme Gramovu matici $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$ vyjadřující podmínku, že $(1,2,4)^T - x(1,2,1)^T - y.(2,1,-1)^T$ je kolmé na podprostor U a dopočítáme $x = 2$ a $y = -1$. Ortogonální projekce vektoru $(1,2,4)^T$ na podprostor U je tedy $\mathbf{u} = 2\cdot(1,2,1)^T - 1\cdot(2,1,-1)^T = (0,3,3)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = (1,2,4)^T - (0,3,3)^T = (1,-1,1)^T$.

(c) Všimněme si, že počítáme-li stejně jako v (b), dostaneme Gramovu matic se stejnými levými stranami, tj. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$ a dopočítáme $x = 1$ a $y = 1$, proto $\mathbf{u} = \cdot(1,2,1)^T + (2,1,-1)^T = (3,3,0)^T$ a $\mathbf{u}^\perp = (4,2,1)^T - (3,3,0)^T = (1,-1,1)^T$. $\square$

12.3.

1.9. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ a nechť $V = \langle (1,1,0)^T, (1,3,2)^T \rangle$.

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru V,
(b) najděte ortogonální bázi V obsahující vektor $(2,4,2)^T$,
(c) určete ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, pro niž $V = \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle$.
(d) určete ortogonální projekci vektoru $(2,2,-1)^T$ do podprostoru V,

(a) Budeme upravovat například bázi $((1,1,0)^T, (1,3,2)^T)$ Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací. Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(1,1,0)^T\|}(1,1,0)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$. Dále hledáme vektor $\mathbf{u}_2$ ve tvaru $\mathbf{u}_2 = (1,3,2)^T + c\cdot\mathbf{v}_1$. Z podmínky $\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ dostáváme, že $c = -\,\mathbf{v}_1^T \cdot (1,3,2)^T = -\frac{4}{\sqrt{2}}$, proto $\mathbf{u}_2 = (-1,1,2)^T$. Nyní vektor $\mathbf{u}_2$ normalizujeme a dostaneme $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|(-1,1,2)^T\|}(-1,1,2)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.

Hledanou ortonormální bází V je tedy posloupnost $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$.

(b) Postupujeme obdobně jako v (a) jen zvolíme bázi V začínající vektorem $(2,4,2)^T$, například bázi $((2,4,2)^T, (1,1,0)^T)$. Poznamenejme, že kdybychom našli postupem (a) ortonormální bázi, jednalo by se určitě i o bázi ortogonální. My nyní použijeme úvahu obdobnou jako v (a), tentokrát ovšem nebudeme (protože nemusíme) normalizovat:

Položíme nejprve $\mathbf{v}_1 = (2,4,2)^T$ a hledáme vektor $\mathbf{v}_2$ ve tvaru $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)^T + c \cdot \mathbf{v}_1$. Z podmínky $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ tentokrát dostáváme, že $c = -\frac{\mathbf{v}_1^T \cdot (1,1,0)^T}{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}$, proto $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)^T - \frac{1}{4} \cdot (2,4,2)^T = \frac{1}{2}(1,0,-1)^T$.

Hledanou ortogonální bází V je tedy posloupnost $((2,4,2)^T, \frac{1}{2}(1,0,-1)^T)$ nebo posloupnost $((2,4,2)^T, (1,0,-1)^T)$.

(c) V (a) jsme nalezli ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$. Připomeňme, že každý vektor kolmá na bázi podprostoru V je kolmý na jeho všechny vektory. Stačí nám tedy najít vektor $\mathbf{u}$, pro $(1,1,0)\,\mathbf{u} = 0$ a $(1,3,2)\,\mathbf{u} = 0$, tedy hledáme řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Snadno spočítáme, že takovým řešením je například vektor $(-1,1,-1)^T$. Stačí tedy tento vektor normalizovat, abychom našli poslední vektor hledané ortonormální báze. Tedy je-li $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$ $\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)^T$, dostáváme ortonormální bázi $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ požadovaných vlastností.

(d) Souřadnice ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor V vzhledem k ortonormální bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ lze spočítat jako Fourierovy koeficienty, tj. označíme-li $\mathbf{v}_\mathbf{u} \in V$ ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ na V a $\mathbf{v}_\mathbf{u} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2$, pak $(a_1, a_2) = (\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{v}\rangle, \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{v}\rangle)$, kde $(\mathbf{b}_,\mathbf{b}_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T)$ je ortonormální báze nalezená v úloze (c). Tedy

$$(a_1, a_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \cdot (2,2,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) \cdot (2,2,-1)^T) = (\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T,$$

a proto

$$\mathbf{v}_\mathbf{u} = \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(7,5,-2)^T.$$

Na závěr si zkontrolujme, že $\mathbf{u} - \mathbf{v}_\mathbf{u}$ leží v ortogonálním doplňku V, tedy, že je vektor $(2,2,-1)^T - \frac{1}{3}(7,5,-2)^T = \frac{1}{3}(-1,1,-1)^T$ kolmý na všechny (bazické) vektory prostoru V. □

1.10. Buď $M = ((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$ báze reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte takovou ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$, aby $\langle (1,1,0)^T \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ a $\langle (1,1,0)^T, (0,1,1)^T \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

Postupujme opět Gramovu-Schmidtovu ortogonalizací.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,1,0)^T}{\|(1,1,0)^T\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$.
2. $\mathbf{v}'_2 = (0,1,1)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(0,1,1)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = \frac{1}{2}(-1,1,2)^T$. Proto $\|\,\mathbf{v}'_2\,\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.
3. Předně $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(1,1,1)^T = \sqrt{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(1,1,1)^T = \frac{2}{\sqrt{6}}$, proto $\mathbf{v}'_3 = (1,1,1)^T - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(1,-1,1)^T$. Tedy $\|\,\mathbf{v}'_3\,\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T)$.

Chceme-li vytvořit ortonormální bázi z báze $((1,1,0)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T)$ modifikovaným Gramovým-Schmidtovým algoritmem, dostáváme:

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\mathbf{v}'_2 = (0,1,1)^T$ a $\mathbf{v}'_3 = (1,1,1)^T$.

2. $\mathbf{v}_2' = \frac{1}{2}(-1,1,2)^T$, $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)^T - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = (0,0,1)^T$ a normujeme $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$.
3. $\mathbf{v}_3' = (0,0,1)^T - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T = \frac{1}{3}(1,-1,1)^T$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

Výsledek modifikovaného algoritmu je stejný jako v případě klasického algoritmu, změnili jsme jen uspořádání úprav. □

Připomeňme, že QR-rozkladem matice $\mathbf{A}$ nad reálným nebo komplexním tělesem rozumíme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbb{R}$, kde $\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}$ je jednotková matice a $\mathbb{R}$ je regulární horní trojúhelníková matice s kladnými reálnými hodnotami na diagonále.

1.11. Najděte QR rozklady matic (a) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

Uvažujme obecnou matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_m)$ s lineárně nezávislými sloupci. Je-li $\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_m$ je posloupnost ortonormálních vektorů, kterou z posloupnosti $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$ vytvoříme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací a položíme-li $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1|\dots|\mathbf{q}_m)$ a $\mathbf{R} = (r_{ij})$, kde $r_{ij} = \mathbf{q}_i^T\cdot\mathbf{a}_j$, potom je $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ právě QR rozklad matice $\mathbf{A}$. Navíc poznamenejme, že $r_{ii} = \mathbf{q}_i^T\cdot\mathbf{a}_i = \|\mathbf{q}_i'\|$, tedy matice $\mathbf{Q}$ sestává z výsledných ortonormálních vektorů a matice $\mathbf{R}$ obsahuje právě všechny údaje, které při Gramově-Schmidtově ortogonalizaci spočítáme (tedy nad diagonálou všechny potřebné skalární součiny a na diagonále všechny potřebné normy).

(a) Protože jsou sloupce první matice právě první dva vektory z úlohy 1.10, využijeme prvních dvou kroků Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace z 1.10 a sepíšeme údaje do matic

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix}\|(1,1,0)^T\| & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(0,1,1)^T\\ 0 & \|\frac{1}{2}(-1,1,2)^T\|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}.$$

(b) Tentokrát sepíšeme do matic údaje celé Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace z 1.10, první dva sloupce matic $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$ už známe (u prvních dvou sloupců $\mathbb{R}$ přidáme nulový poslední řádek). Tedy dostáváme $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ a

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)(1,1,1)^T\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)(1,1,1)^T\\ 0 & 0 & \|\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T\|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

(c) Nyní budeme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací upravovat lineárně nezávislou posloupnost vektorů $(1,1,1,1)^T$, $(1,0,1,0)^T$, $(0,1,0,2)^T$ mezivýsledky sepsat do matic $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$. Všimněme si, že $r_{ii} = \langle\mathbf{q}_i\,\mathbf{a}_i\rangle = \|\mathbf{q}_i'\|$.

1. $\mathbf{q}_1 = \frac{(1,1,1,1)^T}{\|(1,1,1,1)^T\|} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$ a $r_{11} = \|(1,1,1,1)^T\| = 2$.
2. $\mathbf{q}_2' = (1,0,1,0)^T - \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T\cdot(1,0,1,0)^T\cdot\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$. Proto $r_{12} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T\cdot(1,0,1,0)^T) = 1$, $r_{22} = \|\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T\| = 1$ a $\mathbf{q}_2 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$.

3. Konečně $r_{13} = \langle \mathbf{q}_1, (0,1,0,2)^T \rangle = \frac{3}{2}$, $r_{23} = \langle \mathbf{q}_2, (0,1,0,2)^T \rangle = -\frac{3}{2}$, proto $\mathbf{q}_3' = (0,1,0,2)^T - \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T + \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T = (0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$. Tedy $r_{33} = \|(0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\mathbf{q}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

Dostáváme QR rozklad $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. □

1.12. Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \langle ((1,1,-2,1)^T, (2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T \rangle$ reálného aritmetického vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem.

Nejprve zvolíme vhodnou bázi prostoru V, kterou budeme ortogonalizovat pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace. Vektor $(2,0,1,0)^T$ je zřejmě kolmý na zbývající vektory, zvolme tedy bázi V, tak aby byl vektor $(2,0,1,0)^T$ na jejím prvním místě. Tedy vyjdeme například z báze $((2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T, (1,1,-2,1)^T)$. Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci tentokrát mírně modifikujeme: najdeme nejprve ortogonální bázi a tu budeme normalizovat až na závěr.

Už jsme všimli, že $((2,0,1,0)^T \cdot (0,1,0,1)^T = 0$, tedy máme první dva (zatím jen ortogonální, nikoli ortonormální) vektory hledané báze: $\mathbf{v}_1' = (2,0,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2' = (0,1,0,1)^T$. Nyní budeme hledat třetí bazický vektor ve tvaru $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1)^T - c_1 \mathbf{v}_1' - c_2 \mathbf{v}_2'$. Přitom má splňovat podmínky, že $\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_3' = 0$ pro $i = 1,2$, z čehož využitím linearity skalárního součinu v druhé složce dostáváme, že

$$c_1 = \frac{(1,1,-2,1) \cdot (2,0,1,0)^T}{(2,0,1,0) \cdot (2,0,1,0)^T} = 0, \quad c_2 = \frac{(1,1,-2,1) \cdot (0,1,0,1)^T}{(0,1,0,1) \cdot (0,1,0,1)^T} = -1.$$

Všimněme si, že koeficient je roven 0 díky volbě vektoru $\mathbf{v}_1'$ kolmého na všechny následující vektory, proto nám stačilo hledat ortogonální bázi podprostoru $\langle (1,1,-2,1)^T, (0,1,0,1)^T \rangle$, která musí být kolmá na vektor $(2,0,1,0)^T$. Tedy $\mathbf{v}_3' = (1,1,-2,1)^T - (0,1,0,1)^T = (1,0,-2,0)^T$ je posledním hledaným kolmým vektorem. Posloupnost vektorů $((2,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T, (1,0,-2,0)^T)$ tvoří zřejmě ortogonální bázi prostoru V. Zbývá nám jednotlivé vektory normalizovat: $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_1'}{\|\mathbf{v}_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T$, $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v}_3'}{\|\mathbf{v}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)^T$, Ortonormální bází je tedy například posloupnost vektorů $(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2,0)^T$. □

1.13. Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^3$, tj. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{v}$.

(a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $U = \langle (1,i,1-i)^T, (i,2+i,-1)^T \rangle$,
(b) najděte bázi ortogonálního doplňku U^T,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(1,0,-i)^T$ do podprostoru U.

(a) Využijeme Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci provedenou na posloupnost $\mathbf{u}_1 = (1,i,1-i)^T$, $\mathbf{u}_2 = (i,2+i,-1)^T$. Nejprve určíme $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,i,1-i)^T}{\|(1,i,1-i)^T\|} = \frac{1}{2}(1,i,1-i)^T$. Poté spočítáme $c = \mathbf{v}_1 \cdot (i,2+i,-1)^T = \frac{1}{2}(1,-i,1+i) \cdot (i,2+i,-1)^T = \frac{-2i}{2} = -i$ a dále $\mathbf{v}_2' = \mathbf{u}_2 - c\,\mathbf{v}_1 = (i,2+i,-1)^T + \frac{i}{2}(1,i,1-i)^T = \frac{1}{2}(3i,3+2i,-1+i)^T$, proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{24}}(3i,3+2i,-1+i)^T$.

(b) $\mathbf{u}_1 \cdot (1,-1,0,0,1)^T = 0$, $\mathbf{u}_1 \cdot (1,-1,0,0,1)^T = 0$ Protože potřebujeme najít nenulový vektor $\mathbf{v}$ kolmý na vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, tj. má platit, že $(1,i,1-i)^T \cdot \mathbf{v} = (1,-i,1+i)^T \cdot \mathbf{v} = 0$ a $(i,2+i,-1)^T \cdot \mathbf{v} = (-i,2-i,-1)^T \cdot \mathbf{v}^T = 0$, což snadno zformulujeme maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 & -1+i \\ -i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ 0 & 3-i & -2+i \end{pmatrix}.$$

tedy vidíme, že bází řešení soustavy i bází $U^\perp$ je vektor $(-3-3i, 3+i, 4+2i)^T$.

(c) Stačí, abychom spočítali souřadnice ortogonální projekce vzhledem k ortonormální bázi U, tedy hodnoty

$$a_1 = \mathbf{v}_1 \cdot (1,0,-i)^T = \frac{1}{2}(1,-i,1+i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1+(1+i)\cdot(-i)}{2} = \frac{2-i}{2},$$

$$a_2 = \mathbf{v}_2 \cdot (1,0,-i)^T = \frac{1}{\sqrt{24}}(-3i, 3-2i, -1-i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{-3i+i-1}{\sqrt{24}} = \frac{-1-2i}{\sqrt{24}}.$$

Tedy ortogonální projekce je vektor

$$\frac{2-i}{4}(1,i,1-i)^T + \frac{-1-2i}{24}(3i,3+2i,-1+i)^T = \frac{1}{24}(18-9i, 7+4i, 21+5i)^T.$$

□

19.3.

1.14. Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$.

(a) najděte nějakou ortogonální bázi podprostoru $U = \langle (1,1,0,1)^T, (1,0,1,1)^T \rangle$,
(b) najděte nějakou ortogonální bázi ortogonálního doplňku $U^\perp$,
(c) spočítejte ortogonální projekci vektoru $(-1,1,0,4)^T$ do podprostoru $W = \langle (1,2,1,-1)^T,\ (1,1,0,1)^T \rangle$.

(a), (b) Můžeme postupovat několika způsoby. Jednak můžeme doplnit vektory $(1,1,0,1)^T, (1,0,1,1)^T$ na bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$ (například vektory $(1,0,0,0)^T$ a $(0,1,0,0)^T$) a tuto bázi upravit Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. První dva vektory ortogonalizované báze budou přitom tvořit ortogonální bázi U, další dva vektory budou tvořit ortogonální bázi doplňku $U^\perp$.

Rovněž nám stačí najít libovolnou bázi $U^\perp$ (například týmž postupem z 1.4) a obě báze ortogonalizovat. Postupujme druhým způsobem: Bázi $U^\perp$ tvoří například posloupnost $(-1,1,1,0)^T$, $(0,1,1,-1)^T$. Vektor $(0,1,1,-1)^T$ můžeme upravit jedním krokem Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

$$(0,1,1,-1)^T - \frac{(-1,1,1,0)\cdot(0,1,1,-1)^T}{3}(-1,1,1,0)^T = \frac{1}{3}(2,1,1,-3)^T,$$

a proto posloupnost $(-1,1,1,0)^T, (2,1,1,-3)^T$ tvoří ortogonální bázi $U^\perp$. Obdobně zjistíme, že $((1,1,0,1)^T,\ (1,-2,3,1)^T)$ tvoří ortogonální bázi U.

(c) Potřebujeme nejprve určit souřadnice x_1, x_2 ortogonální projekce $\mathbf{u} = x_1 \cdot (1,2,1,-1)^T + x_2 \cdot (1,1,0,1)^T$, aniž budeme hledat ortogonální bázi W, jak jsme činili v předchozí úloze. Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix} & (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} & (1,2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix} \\ (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix} & (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} & (1,1,0,1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, proto $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 3)^T$.

Pro kontrolu ještě ověřme, zda je vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (-2, 1, 1, 1)^T$ skutečně kolmý na podprostor U. Zřejmě $(-2, 1, 1, 1)\cdot(1, 2, 1, -1)^T = 0$ a $(-2, 1, 1, 1)\cdot(1, 1, 0, 1)^T = 0$. □

1.15. Nechť $U = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\rangle$ je podprostor reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem.

(a) Najděte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $U^\perp$,
(b) najděte ortogonální bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4)$ prostoru $\mathbb{R}^4$, tak aby $U = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$,
(c) Určete matice $[P_U]^{(\mathbf{v}_i)}_{(\mathbf{v}_i)}$ a $[P_{U^\perp}]^{(\mathbf{v}_i)}_{(\mathbf{v}_i)}$ vzhledem k bázím $(\mathbf{v}_i)$ ortogonální projekce na podprostory U a $U^\perp$, které chápeme jako lineárního operátory na $\mathbb{R}^4$,
(d) Určete matice $[P_U]^{K_4}_{K_4}$ a $[P_{U^\perp}]^{K_4}_{K_4}$ vzhledem ke kanonickým bázím K_4.

(a) Můžeme najít bázi $U^\perp$ a poté použít Grammovu-Schmidtovu ortogonalizaci, ale jednodušší nejprve najít pomocí řešení soustavy rovnic jeden kolmý vektor, například $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ a poté vektor $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ řeší soustavu $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, která na řádcích obsahuje bázi U a dříve nalezený kolmý vektor. Nyní zbývá vektory normalizovat. Ortogonální bázi ortogonálního doplňku $U^\perp$ tvoří například posloupnost $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix})$.

(b) Všimneme-li si, že je generující množina z definice U už je ortogonální báze, stačí nám tyto vektory sepsat spolu s vektory z úlohy (a):

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix})$$

(c) Protože $P_U(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $P_U(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$ a $P_U(\mathbf{v}_3) = P_U(\mathbf{v}_4) = \mathbf{0}$, dostáváme přímo z definice matice lineárního zobrazení, že $[P_U]^{(\mathbf{v}_i)}_{(\mathbf{v}_i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Matici ortogonální projekce $P_{U^\perp}$ dostaneme buď analogickou úvahou nebo díky faktu $\mathrm{Id} = P_U + P_{U^\perp}$, tedy $[P_{U^\perp}]^{(\mathbf{v}_i)}_{(\mathbf{v}_i)} = [\mathrm{Id}]^{(\mathbf{v}_i)}_{(\mathbf{v}_i)} - [P_{U^\perp}]^{(\mathbf{v}_i)}_{(\mathbf{v}_i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Využijeme výsledek a Tvrzení o matici lineárního zobrazení vzhledem ke změněné bázi

$$[P_U]^{K_4}_{K_4} = [\mathrm{Id}]^{(\mathbf{v}_i)}_{K_4} \cdot [P_U]^{(\mathbf{v}_i)}_{(\mathbf{v}_i)} \cdot [\mathrm{Id}]^{K_4}_{(\mathbf{v}_i)}.$$

Všimněme si, že je matice $[\mathrm{Id}]^{(\mathbf{v}_i)}_{K_4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ortogonální, a proto platí, že $[\mathrm{Id}]^{K_4}_{(\mathbf{v}_i)} = ([\mathrm{Id}]^{(\mathbf{v}_i)}_{K_4})^{-1} = ([\mathrm{Id}]^{(\mathbf{v}_i)}_{K_4})^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nyní zbývá vynásobit

$$[P_U]^{K_4}_{K_4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ □

1.16. Napište matici ortogonální projekce reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem na přímku $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ vzhledem ke kanonickým bázím.

Nejprve spočítáme ortonormální bázi $\mathbb{R}^2$, jejíž první vektor generuje právě přímku $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$: $B = (\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$. Nyní přímo z definice matice homomorfismu dostaneme $[\varphi]^B_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zbývá standardní cestou určit matici $[\varphi]^{K_2}_{K_2} = [\mathrm{Id}]^B_{K_2} [\varphi]^B_B [\mathrm{Id}]^{K_2}_B$. Nejprve si všimněme, že báze B je ortonormální, tedy matice přechodu $[\mathrm{Id}]^{K_2}_B$ je ortogonální a je tedy velmi snadné určit matici k ní inverzní

$$[\mathrm{Id}]^{K_2}_B = ([\mathrm{Id}]^B_{K_2})^{-1} = ([\mathrm{Id}]^B_{K_2})^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní snadno dopočítáme:

$$[\varphi]^{K_2}_{K_2} = [\mathrm{Id}]^B_{K_2}[\varphi]^B_B[\mathrm{Id}]^{K_2}_B = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

1.17. Metodou nejmenších čtverců najděte přibližná řešení soustavy reálných rovnic $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{v}$, jestliže

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Podle Tvrzení 8.71 z přednášky máme řešit soustavu rovnic $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^*\,\mathbf{v}$:
(a) Počítáme tedy (jednoznačně řešitelnou) soustavu s maticí

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A}|\mathbf{A}^*\,\mathbf{v}) = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right),$$

jejíž řešení je právě dvojice $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Hledáme tentokrát řešení soustavy rovnic s maticí

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A}|\mathbf{A}^*\,\mathbf{v}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 7 & 17 \\ 4 & 14 & 5 & -1 \\ 7 & 5 & 10 & 19 \end{array}\right).$$

Zbývá nám dopočítat, že $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

26.3.

2. Vlastní čísla a vlastní vektory

2.1. Označme ψ ortogonální projekci reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem na rovinu $\langle (1,2,3)^T, (1,0,1)^T \rangle$.

(a) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory ψ,
(b) rozhodněte, zda je ψ diagonalizovatelný,
(c) určete všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $[\psi]^{K_3}_{K_3}$.

(a) Nejprve si všimneme, že lineární operátor ψ není izomorfismem, protože není na, tedy podle Tvrzení 9.10 a 9.14 je 0 jeho vlastní číslo. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0 tvoří právě jádro $\mathrm{Ker}\psi = \langle (1,2,3)^T, (1,0,1)^T \rangle^\perp = \langle (1,2,-1)^T \rangle$. Protože na rovině $\langle (1,2,3)^T, (1,0,1)^T \rangle$ působí ψ jako identita, jedná se o podprostor všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1. Žádné další nenulové vlastní číslo nemůže existovat, protože jiné přímky než ty, které leží v $\langle (1,2,3)^T, (1,0,1)^T \rangle$ nejsou vzhledem k operátoru ψ invariantní.

Geometrickými úvahami jsme zjistili, že lineární operátor ortogonální projekce má právě vlastní čísla 0 a 1 a množinu vlastních vektorů tvoří všechny nenulové vektory z množiny $\langle (1,2,3)^T, (1,0,1)^T \rangle \cup \langle (1,2,-1)^T \rangle$.

(b) Nahlédneme, že například posloupnost $M = ((1,2,-1)^T, (1,2,3)^T, (1,0,1)^T)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ složenou z vlastních vektorů lineárního operátoru ψ, tedy ortogonální projekce je diagonalizovatelný lineární operátor. Závěrem si všimněme, že $[\psi]_M^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Využijeme-li Tvrzení 9.14, nemusíme nic počítat, protože vlastní čísla lineárního operátoru ψ a matice $[\psi]_{K_3}^{K_3}$ jsou shodná, tedy 0 a 1 a souřadnicové vektory vzhledem ke kanonické bázi se rovněž nemění, proto $\langle (1,2,3)^T, (1,0,1)^T \rangle \cup \langle (1,2,-1)^T \rangle$ tvoří množinu všech vlastních vektorů matice $[\psi]_{K_3}^{K_3}$. $\square$

V následujícím textu budeme pro jednoduchost psát $[\varphi]_B$ místo $[\varphi]_B^B$ pro jakýkoli lineární operátor φ na vektorovém prostoru s bází B.

2.2. Mějme lineární operátor φ na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2.

(a) Ověřte, že je φ izomorfismus,
(b) najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory φ,
(c) najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory φ^{-1},
(d) rozhodněte, zda jsou lineární operátory φ a φ^{-1} diagonalizovatelné,

(a) Stačí si všimnout, že je matice $[\varphi]_{K_2}^{K_2}$ regulární.

(b) Víme, že λ je vlastní číslo lineárního operátor φ, právě když je to vlastní číslo matice $[\varphi]_{K_2}^{K_2}$, což nastává právě tehdy, když je parametrická matice

$$[\varphi]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

singulární. Protože se jedná o horní trojúhelníkovou matici, nemusíme používat charakteristický polynom (tedy v daném případě polynom $(3-\lambda)^2$), abychom zjistili, že má lineární operátor φ jediné vlastní číslo 3.

Nyní pomocí Věty 9.15 spočítáme vlastní vektory matice $[\varphi]_{K_2}^{K_2}$ jako nulový prostor

$$\mathrm{Ker}([\varphi]_{K_2}^{K_2} - 3I_n) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Podle Tvrzení 9.14 jsme právě našli souřadnice vlastních vektorů φ vzhledem ke kanonické bázi, tedy množinu vlastních vektorů tvoří právě nenulové vektory podprostoru $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

(c) Poznamenejme, že ani φ a φ^{-1} nemohou mít díky Tvrzení 9.10 a 9.14 vlastní čísla 0, protože se jedná o izomorfismy. Dále si všimněme, že pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ a nenulové číslo λ máme $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$, právě když $\varphi^{-1}(\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\,\mathbf{v}$. Přímo z definice vlastního čísla a vlastního vektoru tak dostáváme pozorování, že $\mathbf{v}$ je vlastní vektor lineárního operátoru φ příslušný vlastnímu číslu λ, právě když je to vlastní vektor lineárního operátoru φ^{-1} příslušný vlastnímu číslu λ^{-1}. Odtud bez dalšího počítání vidíme, že φ^{-1} má jediné vlastní číslo $3^{-1} = \frac{1}{3}$ a množina vlastních vektorů je stejná jako u φ, tedy $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

(d) Zjistili jsme, že pro dané endomorfismy nemáme bázi složenou z vlastních vektorů, tedy podle Tvrzení 9.8 φ ani φ^{-1} není diagonalizovatelný. □

2.3. Je-li ρ lineární operátor na na reálném lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2, spočítejte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory ρ a rozhodněte, zda je ρ diagonalizovatelný.

Postupujeme obdobně jako v předchozí úloze. Nejprve zjistíme, že je matice

$$[\rho]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

singulární právě pro $\lambda = 3$ a $\lambda = 4$ (charakteristický polynom má matice i lineární operátor $(3-\lambda)(4-\lambda)$) a pomocí Věty 9.15 a Tvrzení 9.14 spočítáme vlastní vektory matice $[\varphi]_{K_2}^{K_2}$, tedy i vlastní vektory operátoru ρ jako jader matic

$$\operatorname{Ker}([\rho]_{K_2}^{K_2} - 3I_n) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\operatorname{Ker}([\rho]_{K_2}^{K_2} - 4I_n) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zjistili jsme, že $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ jsou všechny vlastní vektory ρ.

Konečně tentokrát vidíme, že najdeme bázi složenou z vlastních vektorů, konkrétně například pro bázi $C = (\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ máme diagonální $[\rho]_C^C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. □

2.4. Uvažujme lineární operátor φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2.

(a) Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory φ.
(b) Rozhodněte, zda je φ diagonalizovatelný,
(c) Existuje ortonormální bází $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, vůči níž má φ diagonální matici?

(a) Máme zjistit, pro která reálná (vlastní) čísla λ existuje nenulový (vlastní) vektor $\mathbf{v}$, aby $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$. To můžeme ekvivalentně vyjádřit ve tvaru $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, a v maticovém zápisu pro libovolnou bázi B prostoru $\mathbb{R}^2$ ve tvaru

$$([\varphi]_B - \lambda \mathbf{I}_2)[v]_B^T = [(\varphi - \lambda \mathrm{Id})]_B [v]_B^T = [\mathbf{0}]_B^T = (0,0)^T.$$

Hledáme tedy všechna taková $\lambda \in \mathbb{R}$, pro něž existuje netriviální řešení homogenní soustavy rovnic se čtvercovou maticí $[(\varphi - \lambda \mathrm{Id})]_B$. To nastává právě tehdy, když je matice $[\varphi]_B - \lambda \mathbf{I}_2$ singulární. Spočítáme tedy nejprve vlastní čísla matice lineárního operátoru vzhledem k nějaké pevně zvolené bázi. Poznamenejme, že při tom nezáleží na volbě báze, ale je důležité, abychom počítali s maticí lineárního operátoru, tj. s maticí daného homomorfismu vzhledem k stejné bázi v definičním oboru i oboru hodnot. V našem případě budeme pracovat s maticí $[\varphi]_{K_2}$.

Určíme charakteristický polynom matice

$$\det([\varphi]_{K_2} - \lambda \mathbf{I}_2) = (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7).$$

Vlastní čísla matice $[\varphi]_{K_2}$ jsou tedy právě kořeny charakteristického polynomu, tedy čísla 2 a 7. Dále budeme postupně dosazovat do matice $[\varphi]_{K_2} - \lambda \mathbf{I}_2$ vypočtená vlastní čísla a budeme hledat vlastní vektory matice $[\varphi]_{K_2}$, tedy nenulová řešení homogenních soustav rovnic s maticemi, která tvoří právě souřadnicové vektory vlastních vektorů lineárního operátoru φ:

$$[\varphi]_{K_2} - 2 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad [\varphi]_{K_2} - 7 \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že všechny nenulové násobky vektoru $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou vlastními vektory matice $[\varphi]_{K_2}$ příslušnými vlastnímu číslu 2 a všechny nenulové násobky vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou vlastními vektory matice $[\varphi]_{K_2}$ příslušnými vlastnímu číslu 7.

Konečně máme-li spočítané souřadnice vlastních vektorů $[\mathbf{v}]_{K_2}$ vzhledem ke kanonické bázi, okamžitě vidíme, že množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2 tvoří $\langle(-2,1)^T\rangle - \{(0,0)^T\}$ a množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 7 tvoří $\langle(1,2)^T\rangle - \{(0,0)^T\}$.

(b) Uvážíme-li, že máme dvě různá vlastní čísla lineárního operátoru na prostoru dimenze 2, víme, že jde o diagonalizovatelný lineární operátor. Protože jsme v (a) našli vlastní vektory stačí vzít bázi $M = ((-2,1)^T, (1,2)^T)$, abychom dostali matici $[\varphi]_M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi M.

(c) Nahlédneme, že je báze M ortogonální (brzy ukážeme, že to není náhoda), tedy normováním dostaneme ortonormální bázi $B = (\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T)$ prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem sestávající s vlastních vektorů, tedy $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Na závěr poznamenejme, že bází s požadovanými vlastnostmi existuje právě osm: $(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ a $(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$. $\square$

2.5. Najděte pro reálnou matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ regulární matici $\mathbf{R}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$ splňující $\mathbf{D} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}$.

Vše potřebné jsme spočítali v předchozí úloze, kde $\mathbf{A} = [\varphi]_{K_2}$. Stačí si uvědomit, že bázi $M = (\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ máme $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = [\varphi]_M = [\mathrm{Id}]^{K_2}_M [\varphi]^{K_3}_{K_3} [\mathrm{Id}]^M_{K_2} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}$, kde $\mathbf{R} = [\mathrm{Id}]^M_{K_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$

2.4.

2.6. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a rozhodněte, zda je (ortogonálně) diagonalizovatelná.

Nejprve určíme vlastní čísla. Mohli bychom standardně spočítat charakteristický polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)$ a najít jeho kořeny. V našem případě je ovšem snadné uhádnout vlastní číslo 1, protože matice $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je zjevně singulární. Vyřešíme-li homogenní soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}_n$ dostaneme všechny příslušné vlastní vektory $\mathbf{v}_1$, tedy $\mathbf{v}_1 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$. Brzy bude na přednášce dokázáno, že vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům reálné symetrické matice jsou ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. To znamená, že další vlastní vektor musí být kolmý na vektory příslušné vlastnímu číslu 1, tedy musí ležet v podprostoru $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle^{\perp} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Proto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ musí být vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ a spočítáme-li součin $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, dostáváme druhé (a poslední) vlastní číslo 4. Zopakujme, že $\mathbf{v}_4$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 4, právě když $\mathbf{v}_4 \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, tedy, že $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ je množina všech řešení homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Na závěr poznamenejme, že z nalezených vlastních čísel a dimenzí podprostorů vlastních vektorů (tzv. geometrické násobnosti) můžeme zjistit, že charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$. □

2.7. Nechť φ je lineární operátor na vektorové prostoru $\mathbb{R}^3$ nad tělesem reálných čísel s maticí $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2.

(a) Dokažte, že je f bijekce,
(b) najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory lineárních operátorů f^{-1} a f^3,
(c) existuje-li, najděte báze B_{-1} a B_3, vůči nimž mají lineární operátory f^{-1} a f^3 diagonální matici.

Protože pracujeme s maticí z předchozí úlohy, většinu potřebných výpočtů už jsme provedli.

(a) f bijekce, právě když nemá 0 jako vlastní číslo, což jsme ukázali v příkladu 2.6.

(b) Je-li $\mathbf{v}$ vlastní vektor lineárního operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ, tedy platí $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, pak

$$\lambda f^{-1}(\mathbf{v}) = f^{-1}(\lambda \mathbf{v}) = \mathbf{v},$$

proto je $\mathbf{v}$ vlastní vektor f^{-1} příslušný vlastnímu číslu λ^{-1}. Stejnou úvahu můžeme naopak provést pro vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru f^{-1}, proto mají operátory f a f^{-1} stejnou množinu vlastních vektorů, již podle 2.6 tvoří

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

a vlastní čísla f^{-1} jsou 1 a $\frac{1}{4}$.

Obdobnou úvahou zjistíme, že $f^3(\mathbf{v}) = \lambda^3 \mathbf{v}$, tedy všechny vlastní vektory operátoru f jsou i vlastními vektory operátoru f^3 příslušnými vlastnímu číslu λ^3. Protože vlastní vektory f generují celý prostor $\mathbb{R}^3$, nemohou se žádná nová vlastní čísla ani vlastní vektory f^3 objevit, tedy podobně jako pro inverzní operátor zjišťujeme, že

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

jsou všechny vlastní vektory a $1, 64$ všechna vlastní čísla operátoru f^3.

(c) Můžeme zvolit dokonce ortonormální (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) bázi stejnou pro oba operátory

$$B = B_{-1} = B_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

a dostáváme $[f^{-1}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ a $[f^3]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$ □

2.8. Mějme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

(a) Najděte (nad $\mathbb{Z}_5$) všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A}$,
(b) dokažte, že je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná,
(c) najděte regulární matici $\mathbf{P}$ nad $\mathbb{Z}_5$, pro niž je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ diagonální.
(d) Spočítejte $\mathbf{A}^{100}$

(a) Nejprve hledáme nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ kořeny polynomu $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2$. Prostým dosazením, zjistíme, že $p(1) = 0$ a $p(2) = 0$, tedy vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou právě 1 a 2. Dále řešíme homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}_3$ $\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zřejmě například vektory $(1, 0, 1)^T$ a $(0, 1, 0)^T$ tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 a vektor $(1, 3, 4)^T$ tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2.

(b) Uvážíme-li, že posloupnost $M = ((1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T, (1, 3, 4)^T)$ je báze $\mathbb{Z}_5$, vidíme, že je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná.

(c) Interpretujeme-li matici $\mathbf{A}$ jako matici lineárního operátoru φ vzhledem ke kanonické bázi a vezmeme-li matici přechodu $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]^B_{K_3}$, pak vidíme, že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} =$

$[\mathrm{Id}]_B^{K_3}[\varphi]_{K_3}^{K_3}[\mathrm{Id}]_{K_3}^B = [\varphi]_B^B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Tedy zjistili jsme, že

$$\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{K_3}^B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

(d) Označme $\mathbf{J} = [\varphi]_B^B$. Všimneme-li si, že $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{100}\mathbf{P}^{-1}$ a že $\mathbf{J}^{100} = \begin{pmatrix}1^{100} & 0 & 0\\ 0 & 1^{100} & 0\\ 0 & 0 & 2^{100}\end{pmatrix} = \mathbf{I}_3$, protože už $2^4 = 1$, pak vidíme, že

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{100}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{I}_3\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}_3.$$

□

2.9. Nechť ψ je lineární operátor na vektorové prostoru $\mathbb{R}^3$ nad tělesem reálných čísel daný předpisem $\psi((x,y,z)^T) = (x+2y+z, 2x-y+2z, -2y)^T$.

(a) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory lineárního operátoru ψ,
(b) existuje-li, najděte bázi B, vůči níž má lineární operátor ψ diagonální matici,
(c) najděte matici lineárních operátorů ψ^{11} a ψ^{154} vzhledem ke kanonické bázi,
(d) určete vlastní čísla a všechny vlastní vektory lineárního operátoru ψ^2,
(e) najděte všechny invariantní podprostory lineárního operátoru ψ,
(f) najděte všechny invariantní podprostory lineárního operátoru ψ^2.

(a) Nejprve snadno určíme matici lineárního operátoru $[\psi]_{K_3} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3 a poté najdeme její vlastní čísla. Máme tři různá vlastní čísla 0, 1 a -1. Vyřešíme-li soustavy s maticemi $[\psi]_{K_3}+1\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $[\psi]_{K_3}-0\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $[\psi]_{K_3}-1\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$, najdeme právě všechny vlastní vektory $\langle(1,0,-1)^T\rangle$, $\langle(3,1,-2)^T\rangle$ a $\langle(-2,1,2)^T\rangle$.

(b) Posloupnost $B = ((3,1,-2)^T, (1,0,-1)^T, (-2,1,2)^T)$ je tvořena vlastními vektory příslušnými různým vlastním číslům, tudíž jde o lineárně nezávislou posloupnost. Proto je B báze $\mathbb{R}^3$ a $[\psi]_B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(c) Uvědomíme-li si, že $[\psi^n]_B = [\psi]_B^n$, určíme snadno matice ψ^{11} a ψ^{154} vzhledem k bázi:

$$[\psi^{11}]_B = [\psi]_B^{11} = \begin{pmatrix}1^{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (-1)^{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = [\psi]_B,$$

$$[\psi^{154}]_B = [\psi]_B^{154} = \begin{pmatrix} 1^{154} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{154} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\psi^2]_B,$$

Tedy okamžitě vidíme, že $[\psi^{11}]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ a $[\psi^{154}]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

(d) Učiníme-li obdobnou úvahu jako v (c), vidíme, že matice $[\psi^n]_B = [\psi]_B^n$, a tedy i lineární operátor ψ^n má vlastní čísla λ^n pro vlastní čísla lineárního operátoru ψ, tedy ψ^2 právě vlastní čísla 0, 1. Je-li navíc $\mathbf{v}_\lambda$ vlastní vektor p $\psi(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda$, pak $\psi^n(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda^n\,\mathbf{v}_\lambda$, tedy $\langle (3,1,-2)^T \rangle$ a $\langle (-2,1,2)^T \rangle$ jsou vlastní vektory ψ^2 příslušné vlastnímu číslu 1 a $\langle (1,0,-1)^T \rangle$ jsou vlastní vektory ψ^8 příslušné vlastnímu číslu 0. Uvážíme-li, že s vlastními vektory příslušnými stejnému vlastnímu číslu jsou vlastními vektory i jejich lineární kombinace, pak

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

jsou právě všechny vlastní vektory lineárního operátoru ψ^2.

(e) Nejprve si uvědomme, že triviální podprostory $\{\mathbf{0}\}$ a $\mathbb{R}^3$ jsou invariantní podprostory pro každý lineární operátor. Nalezené vlastní vektory nám přímo dávají generátory všech invariantních přímek, tedy podprostorů dimenze 1. Tedy invariantní podprostory dimenze 1 jsou

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \quad \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle, \quad \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zbývá popsat invariantní podprostory dimenze 2. Využijeme faktu, že náš lineární operátor je diagonalizovatelný. Protože charakteristický polynom lineárního operátoru omezeného na invariantní podprostor je stupně 2 a musí dělit charakteristický polynom původního lineárního operátoru podle Tvrzení 9.47, má právě 2 různá vlastní čísla (viz také úvaha Pozorování 9.46). Protože je zjevně každý vlastní vektor omezeného operátoru podle Pozorování 9.46 vlastním vektorem původního operátoru, musí být invariantní tedy i stejné jim příslušné vlastní vektory. Proto musí být invariantní rovina generována právě odpovídajícími vlastními vektory. Tedy dvoudimenzionální invariantní podprostory jsou právě:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle, \quad \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, \quad \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(f) I lineární operátor ψ^2 je podle (d) diagonalizovatelný, proto můžeme postupovat stejně jako v předchozí úloze. Budeme invariantní podprostory probírat podle dimenze.

dim=0: Zjevně je vždy jediným invariantním podprostorem dimenze 0 právě podprostor $\{\mathbf{0}\}$.

dim=1: Jednodimenzionální invariantní podprostory jsou vždy určeny vlastním vektorem, tedy tentokrát máme opět jeden invariantní podprostor $\langle (1,0,-1)^T \rangle$

daný vlastním číslem 0 a nespočetně mnoho invariantních přímek $\langle \mathbf{v} \rangle$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in \langle (3,1,-2)^T, (-2,1,2)^T \rangle$.

dim=2: Dvoudimenzionální invariantní podprostory jsou opět generovány dvojicí vlastních vektorů. Tentokrát máme tedy invariantní roviny:

$$\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} \rangle$$

pro každý vektor $\mathbf{v} \in \langle (3,1,-2)^T, (-2,1,2)^T \rangle$.

dim=3: Triviálně je podprostor $\mathbb{R}^3$ vždy jediným invariantním podprostorem dimenze 3. □

□

9.4.

2.10. Ověřte, že podprostor $U = \langle (3,1,-2)^T, (-2,1,2)^T \rangle$ invariantním podprostorem lineárního operátoru ψ z úlohy 2.9. Označme ϕ lineární operátor na U, který vznikne zúžením ψ na U (tedy $\phi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u})$). Najděte matice:

(a) $[\phi]_B^B$ pro bázi $B = ((3,1,-2)^T, (-2,1,2)^T)$,
(b) $[\phi^2]_B^B$ pro bázi B z (a),
(c) $[\phi]_C^C$ pro bázi $C = ((1,2,0)^T, (-2,1,2)^T)$,
(d) $[\phi^2]_C^C$ pro bázi C z (c).

Že jde o invariantní podprostor jsme dokázali v 2.9. Obecně stačí dokázat, že $\psi(\mathbf{u}_i) \in U$ pro jakoukoli generující množinu $\mathbf{u}_1 \dots, \mathbf{u}_k$ podprostoru U.

(a) Protože jsou B vlastní vektory lineárního operátoru v dostáváme přímo z definice matici $[\phi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Podobně jako v (a) využijeme faktu zjištěného v 2.9(d), že B obsahuje právě vlastní vektory lineárního operátoru ϕ^2 příslušné vlastnímu číslu 1. Tedy $[\phi^2]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Tentokrát buď můžeme použít větu o tom, jak se změní matice homomorfismu, když změníme báze nebo lze opět postupovat přímo podle definice. Protože $(1,2,0)^T = (3,1,-2)^T + (-2,1,2)^T$ máme

$$\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

proto $[\phi]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) V (b) jsme zjistili, že ϕ^2 na U operuje jako identita, tedy nemusíme nic počítat, abychom viděli, že $[\phi^2]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pro libovolnou bázi C. □

2.11. Najděte všechny invariantní podprostory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Kolik jich celkem je?

Využijeme vlastních vektorů matice, které jsme naši v úloze 2.8 a postupujeme stejně jako v 2.9:

dim=0: $\{\mathbf{0}\}$ je invariantní podprostor.
dim=1: Přímky jsou určeny vlastním vektorem, tedy máme invariantní přímky

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{v} \rangle,$$

kde $\mathbf{v} \in \langle (1,0,1)^T, (0,1,0)^T \rangle$.
dim=2: Dvoudimenzionální invariantní podprostory jsou generovány dvojicí vlastních vektorů, tedy dostáváme invariantní roviny:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} \rangle$$

pro každý vektor $\mathbf{v} \in \langle (1,0,1)^T, (0,1,0)^T \rangle$
dim=3: $\mathbb{Z}_5^3$ je invariantní podprostor.

Vidíme, že invariantních přímek i rovin je právě 7 (přímek v rovině nad $\mathbb{Z}_5$ totiž najdeme právě $6 = \frac{5^2-1}{5-1}$), tedy celkem má matice $\mathbf{A}$ právě 16 invariantních podprostorů . $\square$

2.12. Uvažujme lineární operátor f na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s maticí $[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3. Najděte všechny invariantní podprostory lineárního operátoru f.

Spočítáme-li charakteristický polynom $[f]_{K_3}^{K_3} - \lambda \mathbf{I}_3 = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$, vidíme, že f má jediné reálné vlastní číslo 1 a jemu odpovídající podprostor vlastních vektorů je $\langle (0,0,1)^T \rangle$. Jediným invariantním podprostorem dimenze 1 je tudíž podprostor $\langle (0,0,1)^T \rangle$.

Přímo z matice $[f]_{K_3}^{K_3}$ vidíme, že

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \text{ a } f(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \text{ proto } f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$$

a $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ je invariantní podprostor dimenze 2. Triviální podprostory $\{\mathbf{0}\}$ a $\mathbb{R}^3$ jsou samozřejmě invariantní podprostory. Zbývá nahlédnout, že žádné další invariantní podprostory f neexistují.

Nyní budeme f chápat jako lineární operátor na komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^3$ se stejnou maticí. V takovém případě se charakteristický polynom $[f]_{K_3}^{K_3} - \lambda \mathbf{I}_3 = (1-\lambda)(\lambda+i)(\lambda-i)$ rozkládá na kořenové činitele, máme tři komplexní vlastní čísla $1, i, -i$ jednodimenzionální invariantní podprostory jsou právě $\langle (0,0,1)^T \rangle$, $\langle (2, 1-i, 0)^T \rangle$, $\langle (2, 1+i, 0)^T \rangle$. Obvyklým způsobem nahlédneme, že invariantní roviny jsou v tomto případě právě

$$U_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, U_3 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Protože je každý invariantní podprostor reálného operátoru f invariantním podprostorem komplexního operátoru f, stačí abychom si všimli, že

$$U_1 \cap \mathbb{R}^3 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, U_2 \cap \mathbb{R}^3 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, U_3 \cap \mathbb{R}^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Tím jsme nahlédli, že $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ je jediný invariantní podprostor reálného operátoru f dimenze 2. □

2.13. Nechť $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ je báze $\mathbb{R}^4$ a uvažujme lineární operátor g na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ daný vztahy $g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $g(\mathbf{v}_2) = -2\,\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $g(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ a $g(\mathbf{v}_4) = 2\,\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4$.

(a) Ověřte, že je $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \rangle$ invariantní podprostor g,
(b) je-li h restrikce g na V, spočítejte matici $[h]_M^M$ pro bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ a spočítejte vlastní čísla h,
(c) rozhodněte, zda je $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vlastní číslo lineárního operátoru g.

(a) Stačí spočítat $g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \in V$ a

$$g(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = g(\mathbf{v}_2) + g(\mathbf{v}_3) = -2\,\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \in V$$

(b) Údaje potřebné pro sestavení matice $[h]_M^M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ už jsme spočítali v (a). Nyní zbývá najít kořeny charakteristického polynomu $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 1$. Vlastní čísla h jsou tedy právě hodnoty $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(c) Podle Pozorování 9.46 je každé vlastní číslo lineárního operátoru h vlastním číslem lineárního operátoru g. Protože jsme v (b) zjistili, že $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je vlastní číslo lineárního operátoru h, nemusíme už nic počítat. □

16.4.

3. Jordanův kanonický tvar

3.1. Buď $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem reálných čísel.

(a) Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$,
(b) existuje-li, najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$,
(c) rozhodněte, které dvojice matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$, jsou podobné.
(d) najděte regulární matice $\mathbf{P}$ $\mathbf{Q}$ nad tělesem reálných čísel, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{Q}$ byly Jordanovy matice,
(e) najděte regulární matici $\mathbf{S}$, aby $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S} = \mathbf{N}$.

(a) Obvyklým způsobem snadno zjistíme, že charakteristický polynom matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ je $(\lambda-2)^2$ a charakteristický polynom matice $\mathbf{K}$ je $(\lambda-2)(\lambda-1)$, proto mají matice $\mathbf{M}$ jediné vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 2, a matice $\mathbf{K}$ má právě vlastní čísla 1 a 2 (obě algebraické a tedy i geometrické násobnosti 1). Nyní vyřešíme homogenní soustavy rovnic s maticemi $\mathbf{M}-2\mathbf{I}_2=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, $\mathbf{N}-2\mathbf{I}_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{K}-1\mathbf{I}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ a $\mathbf{K}-2\mathbf{I}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$. Tedy množina vlastních vektorů matice $\mathbf{M}$ je $\langle(1,-1)^T\rangle$, množina vlastních vektorů matice $\mathbf{N}$ je $\langle(1,1)^T\rangle$ a množina vlastních vektorů matice $\mathbf{K}$ je $\langle(0,1)^T\rangle\cup\langle(2,3)^T\rangle$.

(b) Poznamenejme, že se charakteristické polynomy všech tří matic rozkládají na součin kořenových činitelů, proto podle Věty 17.8 všechny matice mají Jordanův normální tvar.

Zřejmě má Jordanův normální tvar matice na diagonále právě hodnoty spektra a nad diagonálou nuly nebo jedničky. Přitom různá vlastní čísla určují různé Jordanovy buňky, proto je matice $\mathbf{K}$ diagonalizovatelná, a tudíž podobná Jordanově matici $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Matice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ mohou být podobné pouze Jordanovým maticím $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, Podobnost s první z nich by ovšem znamenala, že je matice $\mathbf{M}$ či $\mathbf{N}$ diagonalizovatelná, zatímco v (a) jsme zjistili, že vlastní vektory ani matice $\mathbf{M}$ ani matice $\mathbf{N}$ netvoří bázi, tedy matice diagonalizovatelné nejsou. Tedy je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ roven právě Jordanově buňce $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

(c) Víme, že dvě podobné matice mají nutně stejné charakteristické polynomy, tedy matice $\mathbf{K}$ není podobná matici $\mathbf{M}$ ani $\mathbf{N}$. Na druhou stranu, dvě matice se stejným Jordanovým kanonickým tvarem jsou podobné, tedy $\mathbf{M}\sim\mathbf{N}$.

(d) Označme φ lineární operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2}=\mathbf{M}$ vzhledem ke kanonické bázi. Podobně jako u úloh týkajících se diagonalizovatelnosti můžeme problém převést na otázku nalezení báze $B=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ vůči níž bude mít matice lineárního operátoru φ Jordanův kanonický tvar, tj $[\varphi]_B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. To ovšem znamená, že $\varphi(\mathbf{v}_1)=2\,\mathbf{v}_1$ a $\varphi(\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_1+2\,\mathbf{v}_2$. Odtud okamžitě vidíme, že vektor $\mathbf{v}_1$ je právě vlastním vektorem matice $\mathbf{M}$, zvolme například vektor $(1,-1)$ a druhý vektor $\mathbf{v}_2$ dostaneme jako řešení nehomogenní soustavy rovnic $(\mathbf{M}-2\mathbf{I}_2)\,\mathbf{v}_=\mathbf{v}_1$ s maticí $\left(\begin{array}{cc|c}3 & 3 & 1\\ -3 & -3 & -1\end{array}\right)$. Vidíme, že soustavu řeší například vektor $(\frac{1}{3},0)^T$, našli jsme tak hledanou matici $\mathbf{P}=[\mathrm{Id}]^B_{K_2}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Stejně postupujeme pro matici $\mathbf{Q}$. Nejprve najdeme vlastní vektor $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ matice $\mathbf{N}$ a poté hledáme druhý vektor Jordanova řetízku, tedy vektor $\mathbf{v}_2$ splňující rovnost $\varphi(\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_1+2\,\mathbf{v}_2$. Potřebujeme tedy vyřešit nehomogenní soustavu s maticí $\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{array}\right)$, nalezeným řešením je například vektor $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Proto $\mathbf{Q}=[\mathrm{Id}]^{(\mathbf{v}_i)}_{K_2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(e) Stačí uvážit, že jsou obě matice podobné téže Jordanově matici, tedy, že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{Q}$, a proto $(\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{N}$. Obvyklým způsobem tedy najdeme součin $\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. □

3.2. Uvažujme nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ matice $\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Existuje-li, najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{D}_i$ pro $i = 1, 2, 3$.
(b) najděte regulární matice $\mathbf{P}_i$, aby $\mathbf{P}_i^{-1}\mathbf{D}_i\mathbf{P}_i$ pro $i = 1, 2, 3$ byly Jordanovy,
(c) rozhodněte pro která $a \in \mathbb{Z}_5$ je matice $\mathbf{F}_a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ podobná $\mathbf{D}_1$,
(d) rozhodněte, kolik existuje matic $\mathbf{P}_1$, aby $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{P}_1$ byla Jordanova.

(a) Protože je matice $\mathbf{D}_1$ dolní trojúhelníková, okamžitě dostaneme její charakteristický polynom $(2 - \lambda)^3$, tedy díky Důsledku 9.61 víme, že Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{D}$ existuje. Postupujeme-li stejně jako v úloze 3.1, zjistíme, že $\operatorname{rank}(\mathbf{D}_1 - 2\mathbf{I}_3) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}) = 2$, a proto $\mathbf{D} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, tedy že geometrická násobnost vlastního čísla 2 matice $\mathbf{D}_1$ je 1. Protože je geometrická násobnost vlastních čísel podobných matic stejná, proto musí být matice $\mathbf{D}_1$ nutně podobná Jordanově buňce $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Podobně zjistíme, že je charakteristický polynom matice $\mathbf{D}_2$ opět $(2-\lambda)^3$ a rank matice $\mathbf{D}_2 - 2\mathbf{I}_3$ roven 1, proto má vlastní číslo 2 matice $\mathbf{D}_2$ geometrickou násobnost 2. Tudíž Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{D}_2$ je nutně tvaru $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Konečně vlastní číslo 1 matice $\mathbf{D}_3$ má algebraickou i geometrickou násobnost 1 a vlastní číslo 2 matice $\mathbf{D}_3$ má algebraickou i geometrickou násobnost 2, tedy se jedná o diagonalizovatelnou matici s Jordanovým kanonickým tvar $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Při hledání matic $\mathbf{P}_i$ opět využijeme postup z 3.1.

Nejprve najdeme vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ matice $\mathbf{D}_1$ a poté počítáme postupně nehomogenní soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spočítali jsme $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pro matici $\mathbf{D}_2$ opět snadno spočítáme její charakteristický polynom $(2-\lambda)^3$, dále podprostor vlastních vektorů je tentokrát dvoudimenzionální $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, proto nejprve vybereme vlastní vektor $\mathbf{v}_1$ tak, aby rovnice $(\mathbf{D}_2 - 2\mathbf{I}_3)\,\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$ měla řešení (tj. vektor z průniku $\mathrm{Ker}(\mathbf{D}_2 - 2\mathbf{I}_3) \cap \mathrm{Im}(\mathbf{D}_2 - 2\mathbf{I}_3)$). Snadno nahlédneme, že tuto podmínku opět splňuje vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pro nějž dopočítáme vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ splňující nehomogenní soustavu $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Za poslední vektor stačí vzít kterýkoli lineárně nezávislý vlastní vektor, například opět vektor $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tentokrát jsme našli matici $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (poznamenejme zde, že by podmínkám vyhovovala i předchozí matice $\mathbf{P}_1$). Navíc si všimněme pokud vhodně změníme pořadí sloupců dostaneme matici $\widetilde{\mathbf{P}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, která také splňuje původní podmínky, avšak součiny nám dávají různé byť podobné Jordanovy matice:

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{D}_2\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \widetilde{\mathbf{P}_2}^{-1}\mathbf{D}_2\widetilde{\mathbf{P}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Konečně poslední úloha obnáší pouze nalezení báze složené z vlastních vektorů a její seřazení do sloupců matice $\mathbf{P}_3$ (viz například 2.8). Hledáme tedy báze podprostorů $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ a dostaneme $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Protože má matice dolní trojúhelníková matice $\mathbf{F}_a$ opět charakteristický polynom $(2-\lambda)^3$, stačí obdobně jako v případě (a) určit, kdy je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{F}_a$ stejný jako matice $\mathbf{D}_1$. Tedy se ptáme, kdy je hodnost matice $\mathbf{F}_a - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ rovna dvěma, což nastává právě tehdy, když $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$.

(d) Všimněme si, že postup, jak sestavit matici $\mathbf{P}_1$ nám poskytne všechny takové matice, tedy, že je nutně první sloupcový vektor vlastním vektorem a další sloupcový vektor řeší nehomogenní soustavu s touž maticí levých stran a vektorem pravých stran obsaženým v předchozím sloupci. Tedy se ptáme, kolik vhodných řešení soustav existuje. Podprostor vlastních vektorů je jednodimenzionální, tedy existují 4 nenulové vlastní vektory, druhý i třetí sloupcový vektor potom můžeme vybrat pěti způsoby (řešíme nehomogenní soustavu, tedy se mezi řešeními nulový, respektive lineárně závislý vektor nevyskytne). To znamená, že existuje právě $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ různých matic $\mathbf{P}_1$. $\square$

3.3. Uvažujme matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem racionálních čísel.

(a) Existuje-li, najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$
(b) rozhodněte, zda jsou si matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ podobné.

(a) U obou matic snadno zjistíme, že

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_3) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1 - \lambda)^3.$$

Obě tedy mají vlastní číslo 1 násobnosti 3, proto musí být podle Důsledku 9.61 podobné jedné z následujících matic v Jordanově normálním tvaru:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že existují regulární matice $\mathbf{P}_A$ a $\mathbf{P}_B$ a indexy i_A a i_B, pro něž $\mathbf{J}_{i_A} = \mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_A$ a $\mathbf{J}_{i_B} = \mathbf{P}_B^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_B$. Dále si všimněme, že pro každé λ platí

$$\mathbf{P}_A^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_A - \lambda\mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{E}\mathbf{P}_A = \mathbf{J}_{i_A} - \lambda\mathbf{E}.$$

Zvolíme-li za λ vlastní číslo 1, vidíme, že matice $\mathbf{A} - 1\mathbf{E}$ a $\mathbf{J}_{i_A} - 1\mathbf{E}$ se liší jen vynásobením zprava a zleva regulární maticí, proto musí mít stejnou hodnost. Přitom snadno nahlédneme, že $\operatorname{rank}(\mathbf{J}_1 - \mathbf{I}_3) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$, $\operatorname{rank}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{I}_3) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$ a $\operatorname{rank}(\mathbf{J}_3 - \mathbf{I}_3) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2$, tedy zbývá spočítat $\operatorname{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) = 2$ a $\operatorname{rank}(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = 1$. Matice $\mathbf{A}$ nutně podobná Jordanově matici $\mathbf{J}_3$ a matice $\mathbf{B}$ je podobná Jordanově matici $\mathbf{J}_2$.

(b) Matice $\mathbf{J}_2$ a $\mathbf{J}_3$ zřejmě nejsou podobné, proto nejsou podobné ani matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. □

23.4.

3.4. Mějme lineární operátor φ na $\mathbb{C}^3$ s maticí $[\varphi]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3.

(a) Najděte bázi B, vůči níž bude mít φ Jordanovu matici,
(b) spočítejte $[\varphi^{45}]_B^B$ pro bázi B z (a),
(c) položíme-li $\mathbf{A} = \frac{1}{3}[\varphi]_{K_3}^{K_3}$, spočítejte mocninu $\mathbf{A}^{45}$.

(a) Nejprve spočítáme charakteristický polynom lineárního operátoru φ, jímž je $(3 - \lambda^3)$. Definujme-li $f = \varphi - 3\mathrm{Id}$. Určíme dále jádro

$$\operatorname{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}([\varphi]_{K_3} - 3\mathbf{I}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Zvolíme si například vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a dále počítáme obvyklým způsobem Jordanův řetízek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme bázi $B = (\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, pro níž $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Jordanova věta nám může pomoct při počítání mocnin matic. Nejdříve připomeňme, že mocninu libovolné Jordanovy buňky dostaneme jako

$$\mathbf{J}_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda_i^{k-n+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda_i^{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i^k \end{pmatrix},$$

kde definitoricky položíme $\binom{k}{r}\lambda_i^{k-r} = 0$ pro $r > k$. To použijeme na matici

$$[\varphi^{45}]_B^B = ([\varphi]_B^B)^{45} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{45} = \begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix}.$$

(c) V (a) jsme fakticky spočítali regulární matici $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{K_3}^B$, tak, že platí $3\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$, kde $\mathbf{J}$ je Jordanův kanonický tvar matice $[\varphi]_{K_3}^{K_3}$. Proto

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\frac{1}{3}\mathbf{JP}^{-1}\mathbf{P}\frac{1}{3}\mathbf{JP}^{-1}\dots\mathbf{P}\frac{1}{3}\mathbf{JP}^{-1} = \mathbf{P}\frac{1}{3^k}\mathbf{J}^k\mathbf{P}^{-1}.$$

Popsaným postupem tedy najdeme mocninu $\mathbf{A}^{45}$:

$$\mathbf{A}^{45} = \frac{1}{3^{45}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 & 110 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -234 & -30 & -235 \\ 15 & 1 & 15 \\ 235 & 30 & 236 \end{pmatrix}.$$

□

3.5. Mějme komplexní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$,
(b) spočítejte $\mathbf{G}^{50}$,
(c) existuje-li, najděte ¨nejmenší přirozené n, pro které $\mathbf{H}^n = \mathbf{0}$.

(a) Opět nejprve spočítáme charakteristické polynomy $\det(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}) = -(\lambda+1)^3$ a $\det(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3$, tedy $\sigma(\mathbf{G}) = \{-1, -1, -1\}$ a $\sigma(\mathbf{H}) = \{0, 0, 0\}$. Nyní stejně jako v 3.3 využijeme pozorování, že pro dvě podobné matice $h(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = h(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$

$\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ platí, že $h(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = h(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E})$ pro každá skalár λ, speciálně pro vlastní čísla. Protože $h(\mathbf{G}+\mathbf{E}) = 2$ a $h(\mathbf{H}) = 2$, dostáváme

$$\mathbf{G} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Známe-li Jordanův normální tvar $\mathbf{J}$ matice $\mathbf{G}$ a spočítáme-li regulární matici $\mathbf{P}$, pro kterou $\mathbf{G} = \mathbf{PJP}^{-1}$ $\mathbf{G}^{50} = \mathbf{PJ}^{50}\mathbf{P}^{-1}$, zbude nám proto určit $\mathbf{J}^{50}$.

Matici $\mathbf{P}$ spočítáme obvyklým způsobem. Nejdříve hledáme vlastní vektor $\mathbf{v}_1$, tj. vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí $\mathbf{G}+\mathbf{E}$ a poté řešíme nehomogenní soustavy rovnic $(\mathbf{G}+\mathbf{E})\,\mathbf{v}_2^T = \mathbf{v}_1^T$ a $(\mathbf{G}+\mathbf{E})\,\mathbf{v}_3^T = \mathbf{v}_2^T$ (A+E)v3=v2, tedy postupně hledáme řešení soustav s maticemi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že například $\mathbf{v}_1 = (1,0,-1)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(1,1,0)$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}(2,-1,0)$. Tyto vektory sepíšeme do matice přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ od bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ke kanonické bázi a obvyklým způsobem určíme inverzní matici $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Dále určíme podobně jako v 2.10(c) hodnotu $\mathbf{J}^{50} = \begin{pmatrix} (-1)^{50} & -\binom{50}{1} & \binom{50}{2} \\ 0 & (-1)^{50} & -\binom{50}{1} \\ 0 & 0 & (-1)^{50} \end{pmatrix}$.

Konečně zbývá dopočítat $\mathbf{G}^{50} = \mathbf{PJ}^{50}\mathbf{P}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -50 & 1225 \\ 0 & 1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3576 & -3725 & 3575 \\ -50 & 51 & -50 \\ -3625 & 3775 & 3624 \end{pmatrix}.$$

(c) Uvažujeme stejně jako v (b), tedy uvědomíme si, že existuje regulární matice $\mathbf{Q}$, pro kterou $\mathbf{H}^n = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \mathbf{Q}^{-1}$ stačí nahlédnout, že $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \neq \mathbf{0}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \mathbf{0}$, tedy hledané minimální $n = 3$. □

3.6. Mějme reálné matice $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Najděte jejich Jordanův kanonický tvar a rozhodněte, zda jsou si podobné.

Okamžitě ze zadání vidíme, že mají obě matice jediné vlastní číslo 1 algebraické násobnosti 4 a snadno spočítáme, že je jeho geometrická násobnost 2. Proto mají obě matice jednu z následujících Jordanových matic

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že existují regulární matice $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ a indexy i_1 a i_2, pro něž $\mathbf{J}_{i_1} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{J}_{i_2} = \mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{P}_2$. Všimněme si, že platí

$$(\mathbf{J}_2 - \mathbf{I}_4)^2 = \mathbf{0}, \text{ zatímco } (\mathbf{J}_1 - \mathbf{I}_4)^2 \neq \mathbf{0}.$$

Protože $(\mathbf{J}_{i_j} - \mathbf{I}_4)^2 = \mathbf{P}_j^{-1}(\mathbf{A}_j - \mathbf{I}_4)^2\mathbf{P}_j$, stačí tedy rozhodnout, zda $(\mathbf{A}_j - \mathbf{I}_4)^2 = \mathbf{0}$:

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistil jsme, že je matice $\mathbf{A}_1$ má Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}_2$ a matice $\mathbf{A}_2$ má Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}_1$, což znamená, že matice $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$ nejsou podobné. □

3.7. Vyřešte diferenční rovnici $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$ pro počáteční vektor $\mathbf{x}_0 = (2,1)^T$, kde operátor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dán vztahem $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 5y \end{pmatrix}$

Nejprve určíme matici lineárního operátoru f vzhledem ke kanonické bázi $\mathbf{A} = [f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ a uvědomíme si, že $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$. Dále standardním postupem spočítáme Jordanův charakteristický tvar matice a Jordanův řetízek. Snadno určíme charakteristický polynom $(\lambda - 3)^2$ a jádro $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Vybereme například vlastní vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ a dopočítáme například řešení $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soustavy s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$. Vezmeme-li matici přechodu od báze tvořené nalezeným řetízkem ke kanonické bázi $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, pak víme, že

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & k3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá dopočítat

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & k3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^{k-1}\begin{pmatrix} 6 - 2k \\ 3 - 2k \end{pmatrix}.$$

□

3.8. Najděte vzorec pro n-tý člen reálné posloupnosti a_n, jestliže

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n.$$

Uvědomíme-li si, že

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix},$$

můžeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladu.

Nejprve spočítáme charakteristický polynom $-(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$ matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a poté obvyklým způsobem spočítáme vlastní vektory, Jordanův kanonický tvar a Jordanův řetízek pro vlastní číslo 2. Protože má $\mathbf{A}$ Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obdržíme seřazením dvou vektorů Jordanova řetízku a vlastního vektoru příslušného vlastnímu číslu 1 do sloupců matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pro níž platí $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$, a proto $\mathbf{A}^k = \mathbf{PJ}^k\mathbf{P}^{-1}$. To znamená, že

$$a_{n+3} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (n+1)2^n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2^{n+3}(2n+1) + 6,$$

$\square$

4. Unitární diagonalizovatelnost

4.1. Najděte reálnou ortogonální matici $\mathbf{U}$, pro níž je nad $\mathbb{R}$

(a) matice $\mathbf{U}^T \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{U}$ diagonální,

(b) matice $\mathbf{U}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{U}$ diagonální.

Nejprve si uvědomme, že obě matice jsou symetrické, tedy normální, a proto unitárně diagonalizovatelná.

(a) Snadno si všimneme (nebo obvyklým způsobem spočítáme), že -2 je vlastní číslo algebraické i geometrické násobnosti 1 a jemu příslušný normalizovaný vlastní vektor je buď $\frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)^T$ nebo $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)^T$. Zvolme například $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)^T$. Protože je matice unitárně diagonalizovatelná, nezbývá než, aby každý vektor kolmý na $\frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)^T$ byl také vlastním vektorem, zvolme tedy normalizovaný vektor $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)^T$. Všimneme si, že z podmínky $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$ snadno určíme druhé vlastní číslo 8. Báze B je nyní ortonormální a skládá se s vlastních vektorů, proto položíme-li $\mathbf{U} = [\mathrm{Id}]^B_{K_3} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, je tato matice přechodu ortogonální a $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

(b) Určíme vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory. Jedno vlastní číslo je zřejmě $\lambda = 3$ a vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A}-3\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$ a dostaneme vlastní vektory $\mathbf{v}_1 \in \langle(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, a protože další vlastní vektor musí být kolmý na vektory příslušné vlastnímu číslu 3, tj. leží v podprostoru $\langle(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\rangle^\perp = \langle(1,1,1)^T\rangle$, je jím například vektor $(1,1,1)^T$. Nyní spočítáme $\mathbf{A}(1,1,1)^T = (9,9,9)^T$, odkud dostáváme vlastnímu číslo $\lambda = 9$.

Nyní najdeme ortonormální báze obou podprostorů vlastních vektorů. Pro vlastní číslo 9 stačí normalizovat, abychom dostali vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a pro $\lambda = 3$ najdeme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix})$ podprostoru $\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$ například Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. Nyní položme

$$B = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}).$$

Protože je B ortonormální báze, je zřejmě matice přechodu $\mathbf{U} = [\mathrm{Id}]^B_{K_3}$ ortogonální a $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. □

4.2. Najděte ortonormální bázi B reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, aby byla matice $[f]^B_B$ diagonální, jestliže

(a) $[f]^{K_3}_{K_3} = \begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$,

(b) $[f]^{K_3}_{K_3} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

(a) Stačí nám vzít ortonormální bázi B z 4.1, o níž víme, že

$$[f]^B_B = ([\mathrm{Id}]^B_{K_3})^{-1}[f]_{K_3}[\mathrm{Id}]^B_{K_3} = \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

tedy $B = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix})$ je hledaná ortonormální báze.

(b) Postupujeme stejně jako v úloze (a). Nejprve standardním způsobem najdeme vlastní čísla matice $[f]_{K_3}^{K_3}$, jimiž jsou 1 (algebraické násobnosti 2) a 7 (algebraické násobnosti 1) Pro vlastní číslo 1 najdeme podprostor vlastních vektorů $V_1 = \langle (1,-1,0)^T, (2,0,-1)^T \rangle$ a pro vlastní číslo 7 tvoří podprostor vlastních vektorů $V_7 = \langle (1,1,2)^T \rangle$. Zbývá nám například pomocí Grammovy-Schmidtovy ortogonalizace najít ortonormální bázi V_1 (tedy například $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1))^T$ a normalizovat vektor $(1,1,2)^T$. Nyní je $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2))^T$ takovou ortonormální bází $\mathbb{R}^3$, že $[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. □

4.3. Jestliže $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}$, najděte komplexní unitární matici $\mathbf{U}$, pro níž je $\overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{AU}$ diagonální.

Snadno spočítáme, že $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$, a proto je komplexní matice $\mathbf{A}$ normální, tedy unitárně diagonalizovatelná. Chceme-li najít ortonormální bázi $\mathbb{C}^3$ složenou z vlastních vektorů, stačí nám najít ortonormální báze podprostorů řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ pro jednotlivá vlastní čísla λ.

Charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je $-\lambda^3 + 4\lambda^2$, proto jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ právě 0 a 4. Snadno najdeme ortonormální bázi množiny všech řešení soustavy s maticí $\mathbf{A} - 4\mathbf{E} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1-i & -1 \\ 1+i & -2 & -1-i \\ -1 & -1+i & -3 \end{pmatrix}.$$

Podprostor všech řešení je jednodimenzionální, jeho bázi tvoří například vektor $(1, 1+i, -1)^T$. Protože je norma $\|(1,1+i,-1)^T\| = 2$, je vektor $\frac{1}{2}(1,1+i,-1)^T$ hledaným normalizovaným vektorem. Dále snadno zjistíme, že například vektory $\begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tvoří bázi dvoudimenzionálního podprostoru všech řešení soustavy s maticí $\mathbf{A}$. Zbývá tyto vektory ortogonalizovat a normalizovat. To můžeme provést například Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací, tak dostaneme ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$. Zjistili jsme, že $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1-i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

□

4.4. Napište lineární operátor f na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem jako lineární kombinaci projekcí na přímku, jestliže

(a) $n = 2$ a $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y - x \\ 3x + 7y \end{pmatrix}$,

(b) $n = 3$ a $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y + 2z \\ 2x + 5y + 2z \\ 2x + 2y + 5z \end{pmatrix}$.

Nejprve připomeňme obecné pozorování pro lineární operátor f na reálného vektorového prostoru se standardním skalárním součinem: Je-li $B = (\mathbf{b}_i)$ ortonormální báze složená z vlastních vektorů lineárního operátoru f, potom

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{pmatrix} \delta_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_{2i} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i f_i]_B^B,$$

kde f_i je právě ortogonální projekce na přímku $\langle \mathbf{b}_i \rangle$. To znamená, že $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. Potřebujeme tedy pouze najít vlastní čísla a ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů. Snadno nahlédneme, že (a) $[f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ a (b) $[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Údaje, které potřebujeme k vyřešení úlohy jsme spočítali už v příkladu 4.1, nyní jich tedy využijeme:

(a) Ortonormální bázi B složenou z vlastních vektorů lineárního operátoru f tvoří posloupnost $B = (\begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix})$ a skládá se s vlastních vektorů. Proto je lineární operátor f_1 právě ortogonální projekcí na přímku $\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, lineární operátor f_2 je ortogonální projekcí na přímku $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ a $f = -2f_1 + 8f_2$. Připomeňme, že známe-li matici přechodu $\mathbf{U} = [\mathrm{Id}]_{K_3}^{B} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, je snadné spočítat matice obou ortonormálních projekcí vzhledem ke kanonickým bázím:

$$[f_1]_{K_2}^{K_2} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^T = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$$[f_2]_{K_2}^{K_2} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^T = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix},$$

dostáváme tak také maticový rozklad

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

(b) Tentokrát máme spočítánu ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix})$. To znamená, že máme ortogonální projekce f_i na přímky $\langle \mathbf{u}_i \rangle$. Navíc platí rovnost $f = 9f_1 + 3f_2 + 3f_3$ a opět tedy můžeme spočítat matice ortogonálních projekcí vzhledem ke kanonickým bázím jako $[f_i]_{K_2}^{K_2} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i^T$:

$$[f_1]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$[f_2]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f_3]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

4.5. Najděte singulární rozklad reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nejprve spočítáme $\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a standardní cestou určíme vlastní čísla matice $\sigma(\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{A})$: $\{0, 3, 9\}$. Singulární hodnoty matice $\mathbf{A}$ jsou $\sqrt{3}$, 3. Obvyklou cestou najdeme normalizované vlastní vektory příslušné vlastním číslům 3 a 9:

$$\mathbf{v}_3 = (0, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T, \mathbf{v}_9 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T.$$

D8le spočítáme, že tuto dvojici můžeme doplnit dvojicí vektorů $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)^T$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T$ vlastních vzhledem k vlastnímu číslu 0 na ortonormální bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$.

Nyní spočítáme $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} A\, \mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ a $\mathbf{u}_9 = \frac{1}{3} A\, \mathbf{v}_9 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$. Vektor $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$ doplňuje dvojici $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_9$ na ortonormální bázi $\mathbf{R}^3$. Nyní už můžeme napsat singulární rozklad matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

□

7.5.

5. Bilineární a kvadratické formy

5.1. Buď $\mathbf{A}$ nějaká čtvercová matice stupně n nad tělesem T a definujme zobrazení $f : T^n \times T^n \to T$ předpisem $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}^T$ a dále pro každé $\mathbf{u} \in T^n$ dvojici zobrazení $f_{\mathbf{u}}, {}_{\mathbf{u}}f : T^n \to T$ podmínkou $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v},\mathbf{u})$ a ${}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Dokažte, že $f_{\mathbf{u}}$ a ${}_{\mathbf{u}}f$ jsou pro každé $\mathbf{u} \in T^n$ lineární formy.

Obě zobrazení $f_{\mathbf{u}}$ i ${}_{\mathbf{u}}f$ zobrazují vektorový prostor nad tělesem T do tělesa T, tedy stačí ověřit linearitu. Využijeme k tomu vlastnosti sčítání a násobení matic a dostaneme pro každé $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in T^n$ a každé $t \in T$, že $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}_1\mathbf{A}\mathbf{u}+\mathbf{v}_2\mathbf{A}\mathbf{u} = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1)+f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_2)$ a $f_{\mathbf{u}}(t\mathbf{v}) = t\mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{u} = tf_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$. Symetricky i ${}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}\mathbf{A}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) ={}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{v}_1) +_{\mathbf{u}} f(\mathbf{v}_2)$ a ${}_{\mathbf{u}}f(t\mathbf{v}) = t\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{v} = t_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v})$. □

Poznamenejme, že zobrazení, které jsme zavedli v 5.1 je bilineární forma.

5.2. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^2\times\mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5$ dané předpisem (analytickým vyjádřením) $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2$

(a) Ověřte, že je f bilineární forma,
(b) najděte matici f vzhledem ke kanonické bázi,
(c) najděte matici f vzhledem k bázi $B = (\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix})$.

(a) Stačí, abychom si všimli, že f $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, a proto se jedná o bilineární formu podle pozorování předchozího příkladu.

(b) Označme $[f]_{K_2}$ matici f vzhledem ke kanonické bázi. Postupujeme-li podle definice, tedy uvážíme, že obsahuje na i-tém řádku a j-tém sloupci právě hodnotu $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_j^T$, vidíme, že $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$.

(c) Označme $[f]_B$ matici f vzhledem k bázi B. Využijeme definice a Větu 10.6 z přednášky, která říká, že

$$[f]_B = ([\mathrm{Id}]^B_{K_2})^T\cdot\mathbf{A}\cdot[\mathrm{Id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix}3&3\\4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}$$

□

5.3. Buď g bilineární forma na racionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ s maticí $[g]_B = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$.

(a) Spočítejte $g((1,1,0)^T,(1,1,1)^T)$.
(b) spočítejte $g((1,2,1)^T,(0,2,2)^T)$,
(b) najděte matici g vzhledem k bázi $M = (\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$.

(a) Protože jsou vektory $(1,1,0)^T$, $(1,1,1)^T$ přímo bazické vektory báze g, údaj odečtem přímo z matice g vzhledem k bázi B, tedy $g((1,1,0)^T,(1,1,1)^T) = 0$.

(b) Využijeme Tvrzení 11.9, které říká, jak zjistit hodnotu bilineární formy z matice a souřadnicových vektorů $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_B^T \cdot \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_B$. Obvyklým způsobem určíme souřadnice $[(1,2,1)^T]_B = (1,1,-1)^T$ a $[(0,2,2)^T]_B = (2,-2,0)^T$, proto

$$g(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}) = (1,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} = -2.$$

(c) Nejprve obvyklým způsobem standardní cestou spočítáme matici přechodu

$$[\mathrm{Id}]_B^M = ([\mathrm{Id}]_{K_3}^B)^{-1}\cdot[\mathrm{Id}]_{K_3}^M = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\2&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&1\\-2&-1&-1\\1&3&1\end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá využít Větu 10.6:

$$[g]_M = ([\mathrm{Id}]_B^M)^T\cdot[g]_B\cdot[\mathrm{Id}]_B^M = \begin{pmatrix}2&-2&1\\0&-1&3\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&-1&-1\\1&3&1\end{pmatrix}.$$

Snadno dopočítáme, že $[g]_M = \begin{pmatrix}-7&-9&-4\\6&5&4\\-2&-3&-1\end{pmatrix}$. □

5.4. Rozhodněte, zda je zobrazení $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem $h_2(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = x_1^2 + 4x_1y_2 + 3x_2^2$ kvadratická forma.

Snadno nahlédneme, že můžeme dané zobrazení vyjádřit ve tvaru

$$h_2(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = (x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ \text{a proto}\ h_2(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = h(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix})$$

pro symetrickou bilineární formu h s maticí $[h]_{K_2} = \begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$. Tedy $h_2(\mathbf{u}) = h(\mathbf{u},\mathbf{u})$ je podle definice kvadratická forma. □

5.5. Mějme kvadratickou formu f_2 na $\mathbb{Z}_5^3$ danou analytickým vyjádřením

$$f_2((x_1,x_2,x_3)^T) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + 4x_3^2$$

vzhledem ke kanonické bázi.

(a) Najděte symetrickou bilineární formu f na $\mathbb{Z}_5^3$, která vytváří kvadratickou formu f_2,
(b) určete radikál f,
(c) určete hodnost a nulitu f.

(a) Stejně jako v předchozí úloze přímočaře (tj. ,,rozpůlením"koeficientů u členů x_iy_j pro $i \neq j$) určíme matici hledané symetrické bilineární formy f vzhledem ke kanonické bázi $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix}3&3&0\\3&2&4\\0&4&4\end{pmatrix}$. Tuto bilineární formu můžeme popsat i analyticky (vzhledem ke kanonické bázi):

$$f((x_1,x_2,x_3)^T,(y_1,y_2,y_3)^T) = 3x_1y_1+3x_1y_2+3x_2y_1+2x_2y_2+4x_2y_3+4x_3y_2+4x_3y_3.$$

(b) Vzhledem k tomu, že radikálem kvadratické formy je pravý (nebo levý) radikál symetrické bilineární formy f, která vytváří kvadratickou formu f_2, stačí najít řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[f]_{K_3}$. Protože

$$[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je radikál $\mathrm{rad}(f) = \langle (1,4,1)^T \rangle$.

(c) Hodnost bilineární formy f je rovna hodnosti matice $[f]_{K_3}$, tedy je rovna 2 a nulita je dimenze radikálu a je tudíž rovna 1. □

5.6. Nechť je f symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s maticí $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi. Najděte bázi B, která je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu ω a ortogonální vzhledem k symetrické bilineární formě f.

Stačí nám vzít ortonormální bázi B, o níž víme, že

$$[f]_B = [\mathrm{Id}]^T_{BK_3}[f]_{K_3}[\mathrm{Id}]_{BK_3} = \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kterou jsme spočítali v 4.1(b), tedy $B = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$. □

5.7. Najděte ortogonální bázi symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, která je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, jestliže $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Nejprve standardním způsobem najdeme vlastní čísla matice $[g]_{K_3}$, jimiž jsou 1 a 7. Pro vlastní číslo 1 najdeme podprostor vlastních vektorů $V_1 = \langle (1,-1,0)^T, (2,0,-1)^T \rangle$ a pro vlastní číslo 7 tvoří podprostor vlastních vektorů $V_7 = \langle (1,1,2)^T \rangle$. Zbývá nám například pomocí Grammovy-Schmidtovy ortogonalizace najít ortonormální bázi V_1 (tedy například $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T)$ a normalizovat vektor $(1,1,2)$. Nyní je $M = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T)$ ortonormální bází $\mathbb{R}^3$, která je zároveň ortogonální vzhledem ke g. Závěrem poznamenejme, že $[g]_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. □

14.5.

5.8. Buď h symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^5$ daná podmínkou $h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 2$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$ Najděte nějakou bázi radikálu a nějakou ortogonální bázi h.

Z podmínky, jíž je zadána bilineární forma h, vidíme, že matice h vzhledem ke kanonické bázi sestává ze samých dvojek, tedy $[h]_{K_5} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hledáme-li radikál, stačí jako obvykle vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí $[h]_{K_5}$. Vidíme, že například posloupnost

$$M = ((6,1,0,0,0)^T, (6,0,1,0,0)^T, (6,0,0,1,0)^T, (6,0,0,0,1)^T)$$

je báze radikálu h. Vzhledem k tomu, že je hodnost dané bilineární formy (tj. hodnost kterékoli její matice) rovna jedné, stačí nám v tomto případě pro nalezení ortogonální báze najít libovolný doplněk posloupnosti M na bázi $\mathbb{Z}_7^5$ (v jednodimenzionálním doplňku totiž už není co dále upravovat). Tedy dostáváme h-ortogonální bázi

$$N = (\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ pro níž } [h]_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

5.9. (a) Najděte matice vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi B symetrické bilineární formy f_s a antisymetrické bilineární formy f_a, pro které $f = f_s + f_a$, kde forma f a báze B jsou z 5.2.

(b) Najděte matice vzhledem k bázi B symetrické bilineární formy g_s a antisymetrické bilineární formy g_a, pro které $g = g_s + g_a$, kde forma g a báze B jsou z 5.3.

(a) Z přednášky víme, že stačí položit $f_s(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{u}))$ a $f_a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - f(\mathbf{v},\mathbf{u}))$, abychom dostali jednoznačně určenou symetrickou bilineární formu f_s a antisymetrickou bilineární formu f_a, pro než $f = f_s + f_a$. Označme $[f_s]_{K_3}$ matici f_s a $[f_a]_{K_3}$ matici f_a vzhledem ke kanonické bázi. Díky izomorfismu, který pro pevně zvolenou bázi C přiřadí bilineární formě její matici vzhledem k C, můžeme otázku vyřešit přímo v maticovém zápisu, tj.

$$[f_s]_{K_3} = 2^{-1} \cdot ([f]_{K_3} + [f]_{K_3}^T) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_{K_3} = 2^{-1} \cdot ([f]_{K_3} - [f]_{K_3}) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že místo druhého výpočtu jsme mohli uvážit, že $[f_a]_{K_3} = [f]_{K_3} - [f_s]_{K_3}$.

Při hledání matic $[f_s]_B$ a $[f_a]_B$ pracujeme s maticí $[f]_B$ bilineární formy f vzhledem k bázi $B = ((3,3),(4,1))$:

$$[f_s]_B = ([f]_B + [f]_B^T) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_B = [f]_B - [f_s]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Opět označíme $[g_s]_B$ matici g_s a $[g_a]_B$ matici g_a vzhledem k bázi B a postupujeme stejně jako v příkladu (a):

$$[g_s]_B = \frac{1}{2}([g]_B + [g]_B^T) = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$[g_a]_B = [g]_B - [g_s]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že v obou případech je diagonála matice symetrické části rovna diagonále matice původní formy a že diagonála matice antisymetrické části je nulová, to znamená, že stačí, abychom počítali hodnoty nad (či pod) diagonálou symetrické matice a hodnoty antisymetrické snadno dopočítali. □

5.10. Buď g bilineární forma daná analytickým vyjádřením

$$g((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$$

vzhledem ke kanonické bázi na racionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$.

(a) Najděte matici g vzhledem ke kanonické bázi,
(b) najděte matice symetrické g_s a antisymetrické g_a části g vzhledem ke kanonické bázi,
(c) určete analytické vyjádření symetrické g_s a antisymetrické g_a části g vzhledem ke kanonické bázi,

(a) Stačí si uvědomit, že koeficient u členu x_iy_j v analytickém vyjádření vzhledem ke kanonické bázi je právě hodnota na i-tém řádku a j-tém sloupci matice bilineární formy vzhledem ke kanonické bázi, tedy

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Postupujeme jako v 5.9 s využitím známé matice $[g]_{K_3}$, proto $[g_s]_{K_3} = \frac{1}{2}([g]_{K_3} + [g]_{K_3}^T) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $[g_a]_{K_3} = [g]_{K_3} - [g_s]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Užijeme úvahu připomenutou v (a), abychom z matic nalezených v (b) dostali

$$g_s((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) = x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + \frac{3}{2}x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

$$g_a((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) = \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2.$$

□

5.11. Buď $\mathbf{B}$ čtvercová matice stupně 2 nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ a uvažujme zobrazení $f : \mathbb{Z}_7^2 \times \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7$ dané předpisem $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T$. Určete matici $\mathbf{B}$, víte-li, že $f((1,4),(1,4)) = f((1,4),(3,3)) = 1$, $f((3,3),(1,4)) = 2$ a $f((3,3),(3,3)) = 0$.

Z pozorování příkladu 5.1 víme, že je f bilineární forma. Vezmeme-li bázi $M = ((1,4)^T, (3,3)^T)$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^2$, vidíme, že v zadání příkladu máme uvedeny údaje, které můžeme sepsat do matice $[f]_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ f bilineární formy f

vzhledem k bázi M. Uvážíme-li, že je matice $\mathbf{B}$ právě maticí f vzhledem ke kanonické bázi K_2, stačí podobně jako v 5.2(b) využít vztahu dokázaného na přednášce

$$\mathbf{B} = [f]_{K_3} = [1]^T_{K_2M} \cdot [f]_M \cdot [1]_{K_2M}.$$

Obvyklým způsobem potom spočítáme

$$[\mathrm{Id}]^{K_2}_M = ([\mathrm{Id}]^M_{K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

a proto

$$\mathbf{B} = ([\mathrm{Id}]^{K_2}_M)^T \cdot [f]_M \cdot [\mathrm{Id}]^{K_2}_M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

25.4.

5.12. Nechť $g_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2$ je kvadratická forma.

(a) Najděte matici symetrické bilineární formy g na $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke kanonické bázi, která vytváří kvadratickou formu g_2,
(b) určete hodnost g a rozhodněte, zda je g regulární
(c) najděte ortogonální bázi symetrické bilineární formy g.

(a) Opět bezprostředně z předpisu určíme matici hledané symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Budeme postupovat metodou Pozorování 10.22 z přednášky.

(b) Stačí spočítat hodnost matice $\operatorname{rank}[g]_{K_3} = 3$, tedy matice i forma jsou regulární.

(c) Nejprve zvolíme vektor $\mathbf{p}_1$, pro který $g_2(\mathbf{p}_1) \neq 0$. Z matice $\mathbf{B}$ vidíme, že sice $g_2(\mathbf{e}_1) = 0$, ale pro druhý vektor kanonické báze je $g_2(\mathbf{e}_1) = 3 \neq 0$. Položíme tedy například $\mathbf{p}_1 = \mathbf{e}_2$.

Je-li to možné, volíme nyní vektor $\mathbf{p}_2 \in \langle \mathbf{p}_1 \rangle^{\perp_g}$, pro který $g_2(\mathbf{p}_2) \neq 0$, tj. potřebujme nejprve vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{B} = (0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

a poté mezi těmito řešeními najít takové, na němž je hodnota g_2 nenulová. Připomeňme, že první otázku umíme zodpovědět vždy a kdyby poté neexistoval vektor s nenulovou hodnotou g_2, mohli bychom už zbylé vektory ortogonální báze volit mezi nalezenými řešeními libovolně. V našem případě vidíme, že například $\mathbf{p}_2 = (0, 1, 1)^T$ řeší rovnici a $g_2(\mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_2^T \mathbf{B} \mathbf{p}_2 = -2 \neq 0$.

Konečně tentokrát volíme vektor $\mathbf{p}_3 \in \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle^{\perp_g}$, tedy řešíme soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Snadno určíme poslední bazický vektor $\mathbf{p}_3 = (3,4,6)$ a pro něj dopočítáme $g_2(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_3^T\mathbf{B}\mathbf{p}_3 = 60$. Našli jsme ortogonální bázi $P = ((0,2,0)^T,(0,1,1)^T,(3,4,6)^T)$ vůči níž má bilineární forma g matici $[g]_P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$. $\square$

5.13. Najděte nějakou ortogonální bázi symetrické bilineární formy f z 5.5 na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Postupujme stejně jako v úloze 5.12. V 5.5 jsme našli bázi $((1,4,1)^T)$ radikálu f. Vektor $(1,4,1)^T$ můžeme doplnit na bázi $\mathbb{Z}_5^3$ například vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ kanonické báze. Snadno určíme matici $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ bilineární formy $\widetilde{f}$, která je restrikcí f na podprostor $U = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, vzhledem k bázi $N = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Dále počítáme v souřadnicích vzhledem k N. Nejprve tedy přímo vidíme, že $\widetilde{f}_2(\mathbf{e}_1) = 3 \neq 0$ a poté vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí

$$[\mathbf{e}_1]_N^T \cdot \mathbf{A} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že soustavu řeší $[\mathbf{p}_2]_B = (4,1)^T$, tedy $\mathbf{p}_2 = (4,1,0)^T$ a $\widetilde{f}_2(\mathbf{p}_2) = (4,1) \cdot \mathbf{A} \cdot (4,1)^T = 4$. Našli jsme ortogonální bázi $((1,4,1)^T,(1,0,0)^T,(4,1,0)^T)$ formy f s maticí vůči této bázi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. $\square$

5.14. Najděte nějakou ortogonální bázi symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ dané předpisem $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Nejprve obvyklým způsobem určíme matici symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi $[g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Matici $[g]_{K_2}$ budeme tentokrát upravovat posloupností symetrických elementárních úprav, tedy v každém kroku provádíme vždy stejnou řádkovou a sloupcovou úpravu tak, abychom nakonec dostali diagonální matici. Řádkové úpravy budeme zachycovat obvyklým způsobem (jako při hledání inverzní matice) do matice.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Budeme-li vzniklou diagonální matici chápat jako matici bilineární formy f vzhledem k nějaké nové bázi M, vidíme, že vpravo dostáváme matici transponovanou k matici přechodu od báze M ke kanonické báze k , tedy $[\mathrm{Id}]_{K_2}^M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nyní snadno určíme bázi $M = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})$, pro niž $[g]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, tedy M je f-ortogonální báze. $\square$

5.15. Najděte nějakou ortogonální bázi symetrické bilineární formy f a matici f vzhledem k ortogonální bázi, je-li

(a) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^2$ s maticí $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi,

(b) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ s analytickým vyjádřením $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$ vzhledem ke kanonické bázi,

(c) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ s maticí $[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((1,2),(2,3))$,

(d) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s analytickým vyjádřením $f((x_1,x_2,x_3)^T,(y_1,y_2,y_3)^T) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$ vzhledem ke kanonické bázi,

(e) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ s maticí $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((1,0,2)^T,(1,0,1)^T,(0,3,1)^T)$.

Postupujeme stejně jako v Příkladu 5.14.

(a) Pracujeme-li s maticí $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, zjevně nám při hledání ortogonální báze nepomůže přehození dvou řádků, jak jsme na to byli zvyklí u Gaussovy eliminace, protože následnou výměnou dvou sloupců, vynucenou symetrickými úpravami, dostáváme původní matici. Místo toho přičteme druhý řádek k prvnímu a poté druhý sloupec k prvnímu (uvědomme si, že tento postup v maticovém zápisu odpovídá úvaze Věty 12.23) a následně už můžeme postupovat standardně:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Tedy $[\mathrm{Id}]_{K_2}^P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ je matice přechodu od kanonické báze k ortogonální bázi P, proto $P = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix})$ a $[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Nejprve snadno určíme matici $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi. Tentokrát nám k úpravě matice symetrická výměna řádku a sloupce pomůže, naopak obdobná úprava jako v příkladu (a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ je zbytečná a k nalezení diagonální matice nevede. Počítáme tedy

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Tedy v řádcích pravé poloviny poslední matice nacházíme bázi $P = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$, pro níž $[f]_P = \mathbf{I}_2$.

(c) Postupovali-li bychom stejně jako v úloze (a) a upravovali-li bychom symetrickými úpravami matici $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$ našli bychom, poté, co bychom v levé části matice dostali diagonální matici, v pravé části právě matici transponovanou k matici přechodu od báze B ke hledané ortogonální bázi P. Uvážíme-li, že $([\mathrm{Id}]^P_{K_2})^T = ([\mathrm{Id}]^P_B)^T \cdot ([\mathrm{Id}]^B_{K_2})^T$, stačí abychom místo jednotkové matice umístili napravo transponovanou matici přechodu od od kanonické báze k bázi B a tu obvyklým způsobem upravovali:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Vidíme, že pravé části poslední matice máme transponovanou matici přechodu $[\mathrm{Id}]^P_{K_2} = ([\mathrm{Id}]^P_B)^T \cdot ([\mathrm{Id}]^B_{K_2})^T$, proto $P = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$. Konečně $[f]_P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) Postupujeme stejně jako v případě (a) a (b), tedy určíme matici $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ bilineární formy f vzhledem ke kanonické bázi a pak standardně symetricky upravujeme, tentokrát se symetrickým násobením řádků a sloupců vyhneme zlomkům:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dostáváme ortogonální bázi $P = ((1,1,0)^T, (-1,1,0)^T, (2,0,2)^T)$ a matici bilineární formy $[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem k P.

(e) Tentokrát uvažujeme stejně jako v (c), proto upravujeme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Našli jsme ortogonální bázi $P = ((1,0,2)^T, (2,0,3)^T, (5,3,5)^T)$, vůči níž má bilineární forma f matici $[f]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

5.16. Najděte bázi radikálu symetrické bilineární formy f z příkladu 5.15(e).

Podle Věty 13.8 stačí vzít ty vektory nalezené ortogonální báze, na nichž je hodnota f nulová. Proto bázi radikálu tvoří právě vektor $(5,3,5)^T$. □

5.17. Najděte nějakou ortogonální bázi kvadratické formy f_2 na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ s analytickým vyjádřením $f_2(x_1, x_2, x_3)^T = 2x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3$.

Stejně jako v předchozí úloze snadno určíme matici $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ symetrické bilineární formy f, která vytváří kvadratickou formu f_2, vzhledem ke kanonické bázi a poté postupujeme standardně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

V řádcích pravé strany upravené matice vidíme, že ortogonální bázi f tvoří například vektory $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (5, 5, 1)^T$. □

5.18. Nechť h je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ s maticí $[h]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem k nějaké bázi B. Rozhodněte, zda je h skalární součin na $\mathbb{R}^3$.

Položme $\mathbf{A} = [h]_B$ a označme $\mathbf{A}_i$ matici, která vznikne z $\mathbf{A}$ vynecháním posledních $n - i$ řádků a sloupců a využijme Věty 11.32 z přednášky, podle nějž stačí zjistit, zda jsou všechny hlavní minory matice $\det A$ kladné. Tedy počítáme $\det A_1 = 1, \det A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$ a

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 10 + 1 + 1 - 2 - 5 - 1 = 4,$$

což znamená, že h je skalární součin. □

5.19. Spočítejte signaturu symetrické bilineární formy h na $\mathbb{R}^3$ dané kvadratickou formou $h_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$.

Obvyklým způsobem určíme matici $[h]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ a tuto matici upravíme posloupností symetrických úprav na diagonální matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Protože víme, že existuje ortogonální báze M vůči níž má symetrická bilineární forma h matici $[h]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, stačí podle definice přepočítat nuly, kladná čísla a záporná čísla na diagonále této matice a seřadit údaje do signatury $(0, 2, 1)$ symetrické bilineární formy h. □

5.20. Rozhodněte, zda existuje vektor $\mathbf{v}$ a zda existuje vektor $\mathbf{u}$, aby pro kvadratickou formu h_2 z úlohy 5.19 platilo $h_2(\mathbf{v}) < 0$ a $h_2(\mathbf{u}) = 0$.

V příkladu 5.19 jsem zjistili, že je kvadratická forma h_2 indefinitní, tedy existují vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$, pro které platí $h_2(\mathbf{v}) < 0$ a $h_2(\mathbf{u}) = 0$. $\square$

5.21. Rozhodněte, zda existují reálná čísla x_1, x_2, x_3, pro která

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 < 0.$$

Definujeme-li kvadratickou formu $g_2 = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$, vidíme, že řešíme stejnou úlohu jako 5.20, stačí nám tedy zjistit signaturu g_2. Symetrickými úpravami tedy bude upravovat matici $[g]_{K_3}$ vytvářející bilineární formy g

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že signatura g_2 je $(0, 3, 0)$, tedy g_2 je pozitivně definitní, a proto $g_2(\mathbf{v}) \geq 0$ pro všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Hledaná reálná čísla tedy neexistují. $\square$

5.22. Uvažujme kvadratickou formu $g_2 = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$. Určete signaturu symetrické bilineární formy, která kvadratickou formu g vytváří. Existuje-li, najděte nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, pro který

(a) $g_2(\mathbf{v}) > 0$,
(b) $g_2(\mathbf{v}) < 0$,
(c) $g_2(\mathbf{v}) = 0$,

kde g_2 je kvadratická forma vytvořená bilineární formou z příkladu 5.14.

Snadno určíme matici $[g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ vytvářející symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi. Zřejmě se jedná o regulární formu a spočítáme-li subdeterminanty $\det(1) = 1$ a $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -7$ nejedná se podle Tvrzení 10.35 o skalární součin. Protože je ovšem hodnota $g_2(\mathbf{e}_2)$ kladná, nemůže jít o negativně definitní bilineární formu, a proto má g signaturu $(0, 1, 1)$.

(a) a Z matice $[g]_{K_2}$ vidíme, že hodnota g_2 je kladná například na obou vektorech kanonické báze, tedy $g_2(\mathbf{e}_1) = 1$ a $g_2(\mathbf{e}_2) = 2$.

(b) Zjistit jsme, že kvadratická forma g_2 není pozitivně semidefinitní a v příkladu 5.14 jsme našli ortogonální bázi $M = ((1,0)^T, (3,1)^T)$ a matici $[g]_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. Protože má matice g vzhledem bázi M jedno kladné a jedno záporné číslo, je g indefinitní. Opět přímo z matice vidíme, že $g_2((3,1)^T) = -7$.

(c) Vyjádřeme si hledaný vektor $\mathbf{v}$ pomocí známé ortogonální báze M, tedy $\mathbf{v} = a \cdot (1,0)^T + b \cdot (3,1)^T$, tj. $\{\mathbf{v}\}_M = (a, b)$. Nyní víme, že $g_2(\mathbf{v}) = \{\mathbf{v}\}_M [g_2]_M [\mathbf{v}]_M^T. = a^2 - 7 \cdot b^2$. Chceme-li, aby $g_2(\mathbf{v}) = 0$, dostáváme rovnici $a^2 - 7 \cdot b^2 = 0$, kterou řeší například $(a, b) = (\sqrt{7}, 1)$. Našli jsme tedy vektor $\mathbf{v} = \sqrt{7} \cdot (1,0)^T + 1.(3,1)^T = (\sqrt{7} + 3, 1)^T$, pro nějž platí, že $g_2(\mathbf{v}) = 0$. $\square$

6. Afinní prostory

6.1. Nechť $S = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ a $R = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$.

(a) Ověřte, že se jedná o souřadné soustavy afinního prostoru $\mathbb{Z}_5^2$,

(b) spočítejte souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ vzhledem k soustavě souřadnic S,

(c) najděte bod c, pro který $[c]_S = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ vzhledem k soustavě souřadnic S,

(d) pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

(a) Stačí ověřit, že dvojice $M = (\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ a dvojice $N = (\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix})$ tvoří báze vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^2$, což zjevně platí.

(b) Hledáme souřadnice vektoru $b - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ vzhledem k bázi M, tedy řešíme soustavu s maticí $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3\\1 & 0 & 1\end{array}\right)$. Snadno spočítáme $[b]_S = [\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}]_M = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

(c) Postupujeme přímo podle definice. Tedy $c = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

(d) Pro výpočet změny souřadnic použijeme Tvrzení 12.10, které říká, že

$$[a]_S = [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_S + [\mathrm{Id}]^N_M [a]_R.$$

Potřebujme tedy určit $[\mathrm{Id}]^N_M$ a souřadnice $[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_S = [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}]_M$. Nejprve proto najdeme matici přechodu

$$[\mathrm{Id}]^N_M = [\mathrm{Id}]^{K_2}_M \cdot [\mathrm{Id}]^N_{K_2} = ([\mathrm{Id}]^M_{K_2})^{-1} \cdot [\mathrm{Id}]^N_{K_2} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}$$

a poté dopočítáme $[a]_S = [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_S + [\mathrm{Id}]^N_M [a]_R = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. □

6.2. Uvažujme posloupnost bodů $B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ afinního prostoru s body i vektory $A = V = \mathbf{Q}^3$.

(a) Ověřte, že je B barycentrická soustava souřadnic afinního prostoru A,

(b) spočítejte barycentrické souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ vzhledem k soustavě B,

(c) najděte bod c s barycentrickými souřadnicemi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})^T$ vzhledem k soustavě B,

(d) spočítejte barycentrické souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ vzhledem k soustavě

$$B' = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

(a) Uvědomme si, že stačí ověřit, zda je posloupnost

$$S = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

souřadnou soustavou. K tomu stačí standardní cestou nahlédnout, že tvoří poslední 3 vektory posloupnosti S bázi vektorového prostoru V.

(b) Podle Tvrzení 12.12 nejprve najdeme souřadnice bodu b vzhledem k souřadné soustavě b z bodu (a). Vyřešíme tedy nehomogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right).$$

Zjistili jsme, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ a $\lambda_4 = 0$ a zbývá dopočítat $\lambda_1 = 1 - \sum_{i=2}^4 \lambda_i = -1$. Bod b tedy dostaneme jako afinní kombinaci bodů barycentrické soustavy B se souřadnicemi $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(c) Postupujeme duálně k úvaze (b). Hledaný bod musí mít souřadnice $[c]_S = (\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})^T$ vzhledem k souřadné soustavě S, proto

$$c = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}17\\6\\7\end{pmatrix}.$$

(d) Protože barycentrická soustava souřadnic B' afinního prostoru A vznikla ze soustavy B permutací bodů, stačí díky Tvrzení 12.12 adekvátně přepermutovat souřadnice nalezené v (b). Máme tedy $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$. □

6.3. V afinním prostoru s body i vektory $A = V = \mathbb{Z}_5^4$ uvažujme podprostory

$$D_1 = \langle \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix} \rangle, \quad D_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \rangle,$$

$$D_3 = \{a \in A | \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot a = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\}.$$

(a) Najděte soustavu souřadnic a barycentrickou soustava souřadnic afinních prostorů D_1, D_2 a D_3.
(b) určete parametrické vyjádření podprostorů D_1 a D_3,
(c) určete rovnicové vyjádření podprostorů D_1 a D_2,
(d) určete podprostory D_2 a D_3 jako afinní kombinace bodů,
(e) spočítejte vzájemnou polohu podprostorů D_i a D_j pro $i \neq j$,
(f) Existuje-li, najděte průnik podprostorů $D_i \cap D_j$ pro $i \neq j$.

(a) Postupujeme podobně jako v předchozí úloze. Nejprve najdeme jeden bod podprostoru a potom bázi příslušného vektorového prostoru.

Pro D_1 si můžeme vzít například jeho bod $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a poté spočítat vektory $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Protože jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ zřejmě lineárně nezávislé, dostáváme souřadnou soustavu $S_1 = (a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right). \text{ proto posloupnost } B_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

tvoří barycentrickou soustava souřadnic afinního prostoru D_1.

Pro prostor D_2 není třeba nic počítat, abychom dostali

$$S_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ a } B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu souřadnic prostoru D_2.

Pro prostor D_3 je třeba najít jedno řešení $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nehomogenní soustavy a bázi řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ s maticí $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right)$. Nyní máme

$$S_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ a dopočítáme } B_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu podprostoru D_3.

Nalezené souřadné soustavy využijeme pro zodpovězení úloh (b), (c) a (d).

(b) Tím, že už jsme pro dané podprostory našli soustavu souřadnic, zbývá jen sepsat

$$D_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}4\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix} \rangle, \quad D_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle.$$

(c) Využijeme parametrický popis prostoru D_1 a najdeme takovou matici $\mathbf{A}_1$, že množina všech řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}_1$ bude rovna $\langle \begin{pmatrix}4\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix} \rangle$, tedy potřebujeme opět vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Bázi řešení tvoří například vektory $(3,0,1,0)^T, (3,3,0,1)^T$, které seřadíme do řádků hledané matice $\mathbf{A}_1$. Nyní zbývá spočítat $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_1(2,3,2,1)^T = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Zjistili jsme, že bod x leží v podprostoru D_1 právě tehdy, když je x řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Protože máme prostoru D_2 dán parametricky, postupujeme stejně jako u hledání rovnicového popisu D_1. Nejprve najdeme bázi řešení jediné (homogenní) lineární rovnice s maticí $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ a tu sepíšeme do řádků matice $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Nyní dopočítáme vektor pravých stran

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že D_2 tvoří právě množina všech řešení soustavy lineárních rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 1 & 0 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$.

(d) Tím, že jsme v (a) nalezli barycentrickou soustavu souřadnic, úlohu už jsme vyřešili, stačí totiž vzít její body, tedy:

$$D_2 = \langle B_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\2\end{pmatrix} \rangle, \quad D_3 = \langle B_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle.$$

(e) Nejprve zjistíme, které z prostorů jsou rovnoběžné. Označme V_i vektorový prostor z parametrického popisu prostoru bodů D_i. Okamžitě vidíme, že $V_3 \not\subseteq V_1$, $V_3 \not\subseteq V_2$ a $V_1 \not\subseteq V_2$. Zbývá zjistit, zda $V_2 \subseteq V_1$. Protože je podprostor V_1 dvoudimenzionální stačí zjisti, zda generátor V_2 leží ve V_1, což rozhodneme například díky pozorování, že má matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hodnost 2, a proto $V_2 \subseteq V_1$. Zjistili jsme, že jsou podprostory D_1 a D_2 rovnoběžné a zbývá rozhodnout, zda mají dvojice afinních podprostorů D_1, D_3 a D_2, D_3 společný bod. Na to můžeme použít například jejich rovnicové vyjádření.

Stačí tedy zjistit, zda existuje pro dvoji D_1 a D_3 existuje řešení nehomogenní soustavy rovnic, kterou dostaneme sjednocením rovnic pro tyto podprostory, tedy soustavy s maticí $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ Protože je matice levých stran zřejmě regulární , daná soustava má řešení, $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$ a podprostory jsou tedy různoběžné.

Stejně můžeme pro D_2 a D_3 matici $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ a tentokrát zjistíme, že daná soustava řešení nemá a podprostory jsou mimoběžné.

(f) Pro nalezení průniku $D_1 \cap D_3$ stačí najít všechna řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Našli jsme jednobodový průnik $D_1 \cap D_3 = \{(1,3,0,4)^T\}$.

Konečně pro nalezení průniku rovnoběžných prostorů D_1 a D_2 je třeba zjistit, zda je nějaký bod jednodimenzionálního podprostoru D_2 také bodem dvoudimenzionálního podprostoru D_1. V takovém případě by jejich průnikem byl celý podprostor D_2 a v opačném případě by podprostory byly disjunktní. Řešíme například vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z hodnot první a třetí souřadnice okamžitě vidíme, že rovnice nemá řešení, tedy podprostory D_1 a D_2 nemají žádný společný bod. □

6.4. V afinním prostoru s body i vektory $A = V = \mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme přímky $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ a $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

(a) Určete vzájemnou polohu přímek P a Q,
(b) určete úhel přímek přímky P a Q,
(c) najděte přímku různoběžnou a zároveň kolmou na obě přímky P a Q,
(d) spočítejte vzdálenost P a Q.

(a) Afinní přímky P a Q zřejmě nejsou rovnoběžné, stačí nám tedy například zjistit, zda vektor existuje řešení vektorové rovnice $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$, což je ekvivalentní podmínce, zda $\begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\in\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\rangle$. Některou z obvyklých metod tedy zjistíme, že jsou P a Q jsou mimoběžné.

(b) Přímky svírají úhel φ daný jejich zaměřeními $\mathbf{v}_p=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_q=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$: $\cos\varphi=\frac{|\,\mathbf{v}_p\cdot\mathbf{v}_q\,|}{\|\,\mathbf{v}_p\,\|\cdot\|\,\mathbf{v}_q\,\|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

(c) Nejprve počítáme-li vektor kolmý na vektory $\mathbf{v}_p$ a $\mathbf{v}_q$ a budeme tak znát zaměření hledané přímky. Snadno zjistíme (buď pomocí vektorového součinu nebo vyřešením homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix}1&2&1\\4&-1&1\end{pmatrix}$ tvořenou řádkovými vektory $\mathbf{v}_p^T$ a $\mathbf{v}_q^T$, že hledaným zaměřením je podprostor $\langle\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\rangle$. Nyní potřebujeme vyřešit rovnici

$$(\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix})-(\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix})=z\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\rangle,$$

která vede na nehomogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&4&1&-1\\-2&-1&1&6\\-1&1&-3&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $x=-2$, $y=-1$ a $z=1$. Všimněme si, že podmínka $z=1$ říká, že se jednalo o mimoběžky (zjevně nejsou rovnoběžné a to, že se protínají je ekvivalentní podmínce $z=0$). Tedy průsečík hledané kolmé příčky s přímkou P je právě bod $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ a průsečík s přímkou Q je právě bod $\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$. Hledanou kolmou příčku můžeme napsat ve tvaru $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\langle\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\rangle$.

(d) Už jsme našli průsečíky P a Q s kolmou příčkou, nejkratší vzdálenost přímek P a Q je přitom rovna právě vzdálenosti těchto dvou průsečíků. Navíc z vektorové rovnice úlohy (c) vidíme, že tato vzdálenost je rovna právě velikosti vektoru $z\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$. Tedy vzdálenost P a Q je $\|\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\|=\sqrt{11}$. □

6.5. Spočítejte vzdálenost přímek $P = (1,0,2,1,1)^T + \langle(1,1,1,1,-1)^T\rangle$ a $Q = (2,1,1,1,0)^T + \langle(1,1,1,1,-1)^T\rangle$.

Vidíme, že P a Q jsou rovnoběžky a potřebujeme najít vzdálenost průsečíků nějaké jejich kolmé příčky s P a Q. Přitom zaměření kolmé příčky leží v podprostoru $\langle(1,1,1,1,-1)^T, (1,1,-1,0,-1)^T\rangle$, protože $(1,1,-1,0,-1)^T = (2,1,1,1,0)^T - (1,0,2,1,1)^T$. K nalezení vektoru můžeme použít například Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} - c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\3\\-7\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

Nyní zbývá najít průsečík například příčky $(1,0,2,1,1)^T + \langle(3,3,-7,-2,-3)^T\rangle$ a přímky Q. Obvyklou cestou zjistíme, že jím je bod $(1,0,2,1,1)^T + \frac{1}{5}(3,3,-7,-2,-3)^T$. To ovšem znamená, že je vzdálenost P a Q rovna $\|\frac{1}{5}(3,3,-7,-2,-3)^T\| = \frac{4}{\sqrt{5}}$. $\square$

6.6. Metricky klasifikujte kvadriku $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 5 = 0$ v $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem.

Všimneme si, že výraz $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 5$ obsahuje kvadratickou formu $g_2(x_1,x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ a lineární formu $f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2$, tedy $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 5 = g_2(x_1,x_2) + f(x_1,x_2)^T - 5$.

Obvyklým způsobem spočítáme ortogonální bázi g_2, která je zároveň ortonormální bází vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. Nejprve najdeme vlastní čísla a poté vlastní vektory matice $[g_2]_{K_2} = \begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$, snadno zjistíme vlastní čísla 6 a 1 a jim příslušné normalizované vlastní vektory $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Tedy pro bázi $M = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ máme $[g_2]_M = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ a $[\mathrm{Id}]_M^{K_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Nyní zbývá spočítat vyjádřit f v souřadnicích $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ vzhledem k bázi M. Přenásobím tedy matici f vzhledem ke kanonické bázi maticí přechodu $[\mathrm{Id}]_{K_2}^M$ a dostaneme

$$x_1 + 2x_2 = f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \sqrt{5}y_2$$

Vyjádříme-li tedy kvadriku v souřadnicích $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ vzhledem k bázi M, dostaneme

$$6y_1^2 + y_2^2 + \sqrt{5}y_2 - 5 = 6y_1^2 + (y_2 + \frac{\sqrt{5}}{2})^2 - \frac{5}{4} - 5 = 6(y_1 + \frac{\sqrt{5}}{12})^2 + y_2^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

Uvážíme-li souřadnou soustavu $S = (\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix})$ má v ní hledaná kvadrika K tvar

$$[K]_S = \{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{24}{25}y_1^2 + \frac{4}{25}(y_2 + \frac{\sqrt{5}}{2})^2 = 1\}$$

Vidíme, že hledaný útvar je elipsa se středem $[a]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$, a proto $a = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, a s délkami polos $\frac{5}{2\sqrt{6}}$ a $\frac{5}{2}$. V souřadné soustavě $R = (\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ má tedy kvadrika tvar

$$[K]_R = \{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \left(\frac{z_1}{\frac{5}{2\sqrt{6}}}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{\frac{5}{2}}\right)^2 = 1\}$$

□

Další úlohy

(1) Najděte pro libovolná $a \in \mathbf{Q}$ nad $\mathbf{Q}$ rekurentní vzorec pro výpočet determinant čtvercové matice $\mathbf{G}_n = (g_{ij})$ stupně n, kde $g_{ii} = 1$, $g_{ii+1} = a$ a $g_{i+1i} = b$ a jinde je $g_{ij} = 0$.

(2) Buď $\cdot$ je standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$.
   (a) Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \langle (1,3,-2,1,1)^T, (2,0,1,1,0)^T, (1,3,1,2,-1)^T \rangle$,
   (b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
   (c) určete ortogonální projekci vektoru $(2,1,-1,0,4)^T$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
   (d) je-li $U = \langle (2,1,0,1,-1)^T, (1,1,0,-1,3)^T, (4,-1,-1,-2,3)^T \rangle$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1,1,0,0,-2)^T = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,
   (e) najděte ortonormální báze podprostorů $U + V$, $U^\perp + V$, $U + V^\perp$, $U^\perp + V^\perp$, $U \cap V$, $U^\perp \cap V$, $U \cap V^\perp$ a $U^\perp \cap V^\perp$.

(3) Mějme komplexní vektorový prostor $\mathbb{C}^4$ se standardním skalárním součinem.
   (a) Najděte ortonormální bázi podprostoru $V = \langle (1, 1-i, 1+i, 2-3i)^T, (i+1, -1, 1+2i, 2-i)^T \rangle$,
   (b) najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$,
   (c) určete ortogonální projekci vektoru $(1+3i, 2-i, -1, 2i)^T$ do podprostoru V a do podprostoru $V^\perp$,
   (d) je-li $U = \langle (i, -i, 2+i, 1-3i)^T, (1,1,i,2+3i)^T \rangle$, najděte vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$, aby $(1+i, 1, i, 2-i)^T = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$,

(4) Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory lineárního operátoru φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ a a rozhodněte, zda je φ (unitárně) diagonalizovatelný jestliže

$$\text{(a)} \quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)} \quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

(e) $\varphi = \mathrm{Id}$, (f) $\varphi = 0$.

(5) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, a rozhodněte, zda je matice diagonalizovatelná

(6) Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ a existuje-li, najděte regulární matici $\mathbf{P}$, pro niž je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ diagonální.

(7) Mějme komplexní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
  (a) Najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$,
  (b) najděte regulární matici $\mathbf{P}$, pro niž je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ Jordanova,
  (c) spočítejte $\mathbf{G}^5$ a $\mathbf{H}^5$,
  (d) najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{GH}$ a $\mathbf{HG}$.

(8) Je-li g lineární operátor, najděte ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem pro
  (a) $n = 3$ a $[g]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,
  (b) $n = 3$ a $[g]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
  (c) $n = 8$ a $g(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{8} \mathbf{e}_j$,
  (d) $n = 4$ a $g(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{8}(i + j)\mathbf{e}_j$.

(9) Dokažte, že je bilineární forma zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_3y_2$.

(10) Najděte matici f z předchozí úlohy vzhledem
  (a) ke kanonické bázi,
  (b) k bázi $B = ((1, -1, 0), (1, 1, 0)(1, 2, 1))$,
  (c) k bázi $C = ((0, 1, 0), (-1, 1, -1)(-1, 2, 0))$.

(11) Nechť $f = f_s + f_a$ je rozklad bilineární formy f z příkladu 1 na symetrickou a antisymetrickou část, tj. f_s je symetrická bilineární forma f_a je antisymetrická bilineární forma. Najděte matice f_s a f_a vzhledem
  (a) ke kanonické bázi,
  (b) k bázi $B = ((1, -1, 0), (1, 1, 0)(1, 2, 1))$,
  (c) k bázi $C = ((0, 1, 0), (-1, 1, -1)(-1, 2, 0))$.

(12) Uvažujme symetrickou bilineární formu g na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ s maticí $[g]_{K_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_4.
  (a) Najděte ortogonální bázi g,
  (b) rozhodněte, zda je g skalární součin na $\mathbb{R}^4$,
  (c) najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$, pro které $g_2(\mathbf{v}) = 0$.

(13) Buď g_2 kvadratická forma na $\mathbb{Z}_3^4$ daná předpisem $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

(a) Najděte symetrickou bilineární formu g, pro níž $g_2(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$,
(b) určete matici g vzhledem k bázi $B = ((1,1,0,0),(2,1,0,0)(0,0,2,2),(0,0,1,2))$,
(c) určete matici g vzhledem k kanonické bázi,
(d) spočítejte bázi radikálu symetrické bilineární formy g,
(e) najděte ortogonální bázi P symetrické bilineární formy g,
(f) najděte matici g vzhledem k nalezené bázi P.