7. cvičení

Ve škole:

1. Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující

(a) $5x + 3 \equiv 9x + 13 \pmod{17}$,

(b) $10x + 5 \equiv 7 \pmod{14}$,

(c) $x^2 + 5x \equiv 0 \pmod{19}$,

2. Najděte všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ splňující $x^6 + x + xy \equiv 1 \pmod{7}$.

3. Spočtěte (a) $3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}}$ modulo 28, (b) $14^{14^{14}} + 15^{15^{15}} + 16^{16^{16}}$ modulo 17.

4. Dokažte, že
(a) 13 dělí $23^{32} + 29^{33} + 36^{34}$,
(b) 11 dělí $n^{33} + 5n^{21} + 3n^{13} + 7n^3 + 6n$ pro všechna celá n.

Úlohy pro samostatné počítání:

5. Spočítejte poslední dvě cifry čísla $81^{83^{85}}$

6. Najděte všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 15w^2$ (návod: řešte nejprve kongruenci modulo 8).

Řešení:

1. (a) $x \equiv 6 \pmod{17}$, tj. $x \in \{6 + 17z \mid z \in \mathbb{Z}\}$,

   (b) $x \equiv 3 \pmod{7}$, tj. $x \in \{3 + 7z \mid z \in \mathbb{Z}\}$,

   (c) $x \in \{19z \mid z \in \mathbb{Z}\} \cup \{14 + 19z \mid z \in \mathbb{Z}\}$,

2. $x \not\equiv 0 \pmod{7}, y \equiv -1 \pmod{7}$.

3. Budeme využívat Eulerovu větu.

   (a) $3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}} \equiv 3^{(3^{3^{3^{3^{3}}}}) \bmod 12} \equiv 3^{3\cdot(3^{3^{3^{3}}}-1) \bmod 4} \equiv 3^{3\cdot((-1)^{3^{3^{3}}}-1) \bmod 4} \equiv 3^3 \equiv 27 \pmod{28}$,

   (b) $14^{14^{14}} + 15^{15^{15}} + 16^{16^{16}} \equiv (-3)^{14^{14} \bmod 16} + (-2)^{15^{15} \bmod 16} + (-1)^{16^{16} \bmod 16} \equiv (-3)^0 + (-2)^{(-1)^{15} \bmod 16} + (-1)^0 \equiv 1 - (2)^{15} + (-1)^0 \equiv 1 - 9 + 1 \equiv 10 \pmod{17}$, protože $2^{15} = 2^{-1} = 9$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.

4. (a) $23^{32} + 29^{33} + 36^{34} \equiv (-3)^{(32) \bmod 12} + 3^{(33) \bmod 12} + (-3)^{(34) \bmod 12} \equiv 3^8 + 3^9 + 3^{10} \equiv 3^8(1 + 3 + 9) \equiv 0 \pmod{13}$,

   (b) je-li n násobek 11, pak není co dokazovat, v opačném případě jsou n a 11 besoudělná a opět využijeme Eulerovu větu: $n^{33} + 5n^{21} + 3n^{13} + 7n^3 + 6n \equiv n^3 + 5n + 3n^3 + 7n^3 + 6n \equiv 11n^3 + 11n^1 \equiv 0 \pmod{11}$.

5. $81^{83^{85}} \equiv (-19)^{(83^{85}) \bmod 40} \equiv (-19)^{(3^{(85) \bmod 16}) \bmod 40} \equiv (-19)^3 \equiv 41 \pmod{100}$.

6. Nutná podmínka: $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv 0 \pmod{8}$. Protože pro každé a liché $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$ a pro a sudé $a^2 \equiv 0$ nebo $4 \pmod{8}$, musí být nutně x, y, z, w sudé. Nyní vytkneme ze všech neznámých číslo 2 a vykrátíme číslem 4 a řešíme stejnou kongruenci. Odtud plyne, že x, y, z, w jsou násobkem 2^n pro všechna přirozená n, proto $x = y = z = w = 0$.