13. cvičení

Ve škole:

1. Najděte generátor u všech ideálů, které jsou hlavní:
(a) $15\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$,
(b) $15\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$,
(c) $3\mathbb{Z}[x] + x\mathbb{Z}[x]$ v $\mathbb{Z}[x]$,
(d) $3\mathbb{Z}[x] \cap x\mathbb{Z}[x]$ v $\mathbb{Z}[x]$.

2. Pro $p(y) \in \mathbb{C}[y]$ dokažte, že $x - p(y)$ je ireducibilní v $\mathbb{C}[x, y]$.

3. Určete v oborech $\mathbb{Z}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$, $\mathbb{C}[x, y]$ ireducibilní rozklad polynomů
(a) $x^2 - y + 2$, (b) $2x^2 - 4y^2$, (c) $x^2 + y^2$, (d) $x^2 + 2y^2$.

4. Určete v $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ireducibilní rozklady prvků (a) 3, (b) $5 - i\sqrt{2}$.

Úlohy pro samostatné počítání:

5. Musí v $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ireducibilní rozklady existovat a do jaké míry jsou určeny jednoznačně?

6. Určete v oborech $\mathbb{Z}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$, $\mathbb{C}[x, y]$ ireducibilní rozklad polynomů
(a) $x^2 - y^3$, (b) $x^2 + xy + y - 1$, (c) $2y^3 + y^2x + yx^2 + x^2 + 7y^2 + 7y - x + 2$.

Řešení:

1. (a) $3 = \mathrm{NSD}(15, 24)$,

   (b) $120 = \mathrm{NSN}(15, 24)$,

   (c) Není hlavní: případný generátor hlavního ideálu by byl společný dělitel 3 a x v oboru $\mathbb{Z}[x]$, tedy 1 nebo -1, ovšem $\pm 1 \notin 3\mathbb{Z}[x] + x\mathbb{Z}[x]$,

   (d) $3x$.

2. Je-li $a \cdot b = x - p(y)$, pak BÚNO $b \in \mathbb{C}[y]$ a existují $c, d \in \mathbb{C}[y]$ $a = cx + d$ $\Rightarrow x - p(y) = bcx + bd \Rightarrow b \in \mathbb{C}^*$.

3. (a) $x^2 - y + 2$ je ireducibilní dle 2(b) v $\mathbb{C}[x, y]$ a tedy i v $\mathbb{Z}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$,

   (b) $2x^2 - 4y^2 = 2 \cdot (x^2 - 2y^2)$ v $\mathbb{Z}[x, y]$ a $2x^2 - 4y^2 = (2x - 2\sqrt{2}y)(x + \sqrt{2}y)$ v $\mathbb{R}[x, y]$ a $\mathbb{C}[x, y]$,

   (c) $x^2 + y^2$ je ireducibilní v $\mathbb{Z}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$ a $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ v $\mathbb{C}[x, y]$,

   (d) $x^2 + 2y^2$ je ireducibilní v $\mathbb{Z}[x, y]$ a v $\mathbb{R}[x, y]$, $x^2 + 2y^2 = (x + i\sqrt{2}y)(x - i\sqrt{2}y)$ v $\mathbb{C}[x, y]$.

4. $3 = (1 + i\sqrt{2})(1 - i\sqrt{2})$, $5 - i\sqrt{2} = -(1 + i\sqrt{2})^3$.

5. Jedná se Eukleidův obor, neboť norma je zde Eukleidova, tedy je to Gaussův obor. V něm jsou ireducibilní rozklady určeny jednoznačně až na pořadí a násobek invertibilním prvkem. Protože jsou invertibilní prvky $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ jen ± 1, jsou ireducibilní rozklady určeny jednoznačně až na pořadí a znaménko.

6. (a) $x^2 - y^3$ je ireducibilní v $\mathbb{C}[x, y]$ a tedy i v $\mathbb{Z}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$,

   (b) $x^2 + xy + y - 1 = (x + 1)(x + y - 1)$,

   (c) $2y^3 + y^2x + yx^2 + x^2 + 7y^2 + 3y - x - 2 =$

$$\begin{aligned}
&= (y + 1)x^2 + (y^2 - 1)x + (2y^3 + 7y^2 + 3y - 2) \\
&= (y + 1)(x^2 + (y - 1)x + (2y^2 + 5y - 2)) \\
&= (y + 1)(x - y - 2)(x + 2y + 1)
\end{aligned}$$