Zobecnění konvexních funkcí

Samir Bessisso

12. března 2020

Osnova

Základní definice

Definice

Množina $M \subset \mathbb{R}^k$ je konvexní

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall x, y \in M \ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in M$$

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^k \to [-\infty, \infty]$ je konvexní

$$\Leftrightarrow$$

Množina *epi* $f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid f(x) \leq y\}$ je konvexní.

Komentář 1

- Příklady konvexních množin :  ,  ,  .

- Příklady nekonvexních množin :  ,  ,  .

- Je-li f definována pouze na $S \subsetneqq \mathbb{R}^k$, můžeme ji dodefinovat na $\mathbb{R}^k$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S, \\ \infty, & x \notin S. \end{cases}$$

A (ne)konvexita funkce f zůstane zachována.

Pěkné vlastnosti

- Průnik konvexních množin je konvexní množina

Je-li f konvexní funkce na množině $\mathbb{R}^k$, pak

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) \leq \alpha\}$ je konvexní množina.
- Lokální minimum f je i globální minimum f :)
- Nabývá-li f pouze hodnot z $(-\infty, \infty]$, pak je konvexní

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall x, y \in S \; \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Komentář 2

Množině $S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) \leq \alpha\}$ se v anglické literatuře říká "sublevel set", český překlad jsem nenašel, tak jí budu říkat dolní úrovňová množina (pro množinu $\{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) = \alpha\}$ je český překlad úrovňová množina).

Matematická optimalizace

Úloha matematické optimalizace :

- Máme $A \subset \mathbb{R}^k$ a funkci $f : A \to \mathbb{R}$, chceme najít $\underset{x \in A}{min}\ f(x)$.
- Typicky $A = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^k \mid g_i(x)\ relace_i\ c_i\}$, kde $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $relace_i \in \{\leq, \geq, =\}$ a $c_i \in \mathbb{R}$.

Konvexní optimalizace

Úloha konvexní optimalizace:

$$
\begin{array}{lll}
\underset{x}{min} & f(x) & \\
\text{s.t.} & g_i(x) \leq 0, & i \in \{1, \ldots, n\}, \\
 & h_j(x) = 0, & j \in \{1, \ldots, m\}.
\end{array}
$$

Kde funkce $f, \ g_1, \ldots, g_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jsou konvexní a $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jsou afinní.

Komentář 3

s.t. je zkratka pro "subject to", to znamená, že námi hledané x musí splňovat všechny nerovnice pro g_i a rovnice pro h_i. Množina

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^k \mid g_i(x) \leq 0\} \cap \bigcap_{j=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^k \mid h_j(x) = 0\}$$

je konvexní. Konvexita $\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^k \mid g_i(x) \leq 0\}$ plyne z pěkných vlastností konvexity, konvexita $\bigcap_{j=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^k \mid h_j(x) = 0\}$ plyne z toho, že se jedná o průnik nadrovin v $\mathbb{R}^k$, přičemž nadrovina je konvexní množina. V konvexní optimalizaci tedy hledáme minimum konvexní funkce na konvexní množině.

Kvazikonvexní funkce I

Je konvexita nutná k vlastnosti :) ? Ne $\rightarrow$ zobecnění konvexních funkcí.

Definice

Funkce f je kvazikonvexní na konvexní množině A

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \lambda \in [0,1]\ \forall x, y \in A : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Kvazikonvexní funkce II

Věta

Funkce f je kvazikonvexní

$$\Leftrightarrow$$

$\forall\alpha \in \mathbb{R} : S_\alpha = \{x \in S \mid f(x) \leq \alpha\}$ *je konvexní množina.*

Věta

Charakteristika diferencovatelných kvazikonvexních funkcí

Buď $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^k$ *konvexní otevřená množina a* $f : S \to \mathbb{R}$ *diferencovatelná na* S*. Pak* f *je kvazikonvexní*

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall x, y \in S : \nabla f(x)^t(y - x) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x).$$

Pseudokonvexní funkce

Definice

Buď $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^k$ konvexní otevřená množina a $f : S \to \mathbb{R}$ diferencovatelná na S. Pak f je pseudokonvexní

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall x, y \in S : \nabla f(x)^t (y - x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Platí

$$\{\text{Diferencovatelné konvexní funkce}\}$$
$$\subset$$
$$\{\text{Pseudokonvexní funkce}\}$$
$$\subset$$
$$\{\text{Diferencovatelné kvazikonvexní funkce}\}$$

Komentář 4

- Inkluze {Konvexní funkce} $\subset$ {Kvazikonvexní funkce} je pěkně vidět z jejich vztahu k dolním úrovňovým množinám.
- Inkluze {Pseudokonvexní funkce} $\subset$ {Diferencovatelné kvazikonvexní funkce} je vidět z definice pseudokonvexní funkce a věty Charakterizace diferencovatelných kvazikonvexních funkcí.
- Inkluze {Diferencovatelné konvexní funkce} $\subset$ {Pseudokonvexní funkce} plyne z toho, že pro diferencovatelné konvexní funkce platí

$$f(y) \geq \nabla f(x)^t (y - x) + f(x).$$

Cíl mojí bakalářky

Představuji si, že se moje bakalářka bude skládat ze tří částí, struktura bude podobná, jako je struktura této prezentace:

- Klasická konvexita

V této části zopakuju věci které už jsme někdy probíraly a připravym si užitečný tvrzení do dalších částí.

- Zobecnění konvexních funkcí

Tato část bude nejdelší a bude se věnovat vlastnostem zobecněných konvexních funkcí. Očekávám, že budu víceméně jen opisovat věty a dávat je do souvislostí.

- Aplikace získaných znalostí na nějaký problém

Závěr

Děkuji za pozornost a přeji pevné zdraví :)