Vícekriteriální metody dělení grafů

Ondřej Houška

18. března 2020

Osnova

Dělení grafů

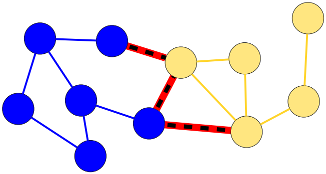
Definice

Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, $s \in N$. Rovnoměrné dělení grafu G na s částí je disjunktní rozklad množiny vrcholů V na $V_1, \ldots, V_s$ tak, že $|V_1|, \ldots, |V_s| \in \{\lfloor\frac{|V|}{s}\rfloor, \lceil\frac{|V|}{s}\rceil\}$.
Hranový separátor dělení $V_1, \ldots, V_s$ je množina
$H(V_1, \ldots, V_s) = \{(u, v) \in E \mid u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\} \subset E$.

Dělení grafů

Definice

Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, $s \in N$. Rovnoměrné dělení grafu G na s částí je disjunktní rozklad množiny vrcholů V na $V_1, \ldots, V_s$ tak, že $|V_1|, \ldots, |V_s| \in \{\lfloor \frac{|V|}{s} \rfloor, \lceil \frac{|V|}{s} \rceil\}$.
Hranový separátor dělení $V_1, \ldots, V_s$ je množina
$H(V_1, \ldots, V_s) = \{(u, v) \in E \mid u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\} \subset E$.



Dělení grafů

- Úloha: Najít pro zadaný graf rovnoměrné dělení minimalizující $|\,H(V_1, \dots, V_s)\,|$.
- Zobecnění úlohy: Máme-li zadané kladné ohodnocení hran $r: E \to R^+$, minimalizujeme

$$\sum_{e \in H(V_1, \dots, V_s)} r(e)$$

přes všechna rovnoměrná dělení G.

Dělení grafů

Místo rovnoměrých dělení můžeme minimalizovat přes všechna dělení splňující

$$\frac{|\sum_{v \in V_i} w(v) - average|}{average} \leq \varepsilon \quad \text{pro všechna } i = 1, \ldots, s,$$

kde ε je maximální přijatelná relativní odchylka,
$average = \frac{1}{s} \sum_{v \in V} w(v)$
a $w \colon V \to R^+$ je kladné ohodnocení vrcholů popisující jejich velikost (snažíme se v dělení získat podobně velké skupiny vrcholů).

Složitost řešeného problému

- Základní problém dělení grafů, ve kterém je $s = 2$, $r \equiv 1$, $w \equiv 1$, je NP-úplný.

Složitost řešeného problému

- Základní problém dělení grafů, ve kterém je $s = 2$, $r \equiv 1$, $w \equiv 1$, je NP-úplný.
- Přesné řešení úlohy tedy lze požadovat jen pro velmi malé grafy.

Složitost řešeného problému

- Základní problém dělení grafů, ve kterém je $s = 2$, $r \equiv 1$, $w \equiv 1$, je NP-úplný.
- Přesné řešení úlohy tedy lze požadovat jen pro velmi malé grafy.
- V aplikacích je ale potřeba dělit velké grafy.

Složitost řešeného problému

- Základní problém dělení grafů, ve kterém je $s = 2$, $r \equiv 1$, $w \equiv 1$, je NP-úplný.
- Přesné řešení úlohy tedy lze požadovat jen pro velmi malé grafy.
- V aplikacích je ale potřeba dělit velké grafy.
  $\rightarrow$ Pro dělení grafů se používají aproximační algoritmy a heuristiky.

Kde se využívá dělení grafů (příklady)

1. vědeckotechnické výpočty na paralelních výpočetních architekturách
   - $w\colon V \rightarrow R^+$ popisuje výpočetní náklady v jednotlivých uzlech
   - ohodonocení hran $r\colon E \rightarrow R^+$ odpovídá množství přesouvaných dat mezi uzly
   - cílem je přibližně rovnoměrně rozložit výpočty na s procesorů tak, aby komunikace mezi procesory byla minimální
2. urychlování řešičů soustav lineárních rovnic
   - v mnohých aplikacích je potřeba řešit velké soustavy lineárních rovnic s řídkou maticí
   - velký vliv na rychlost výpočtu má pořadí, v jakém se kroky výpočtu provádějí
   - snaha o volbu vhodného pořadí eliminace vede na grafové úlohy...
   - ...ve kterých je potřeba umět grafy rozdělit

Kernighanův-Linův algoritmus

- Jednoduchý algoritmus používaný v dělení grafů
- Předpokládá, že už nějaké dělení máme
- Zjišťuje, jestli by se výměnou několika málo vrcholů nezmenšila minimalizovaná funkce.
- Pokud nenachází žádnou výhodnou výměnu, zkusí zkusmo nějakou nevýhodnou výměnu s tím, že se mu díky tomu může náhodou podařit nalézt lepší lokální minimum.
- Tento postup opakuje, po nějaké době snažení se ukončí.
- Používá se pro vylepšování již získaných dělení.

Geometrické algoritmy

- Geometrické algoritmy se snaží graf hrubě rozdělit na základě rozmístění vrcholů v prostoru/rovině bez informací o hranách.
- Potřebují tedy nutně navíc vnoření $b \colon V \to R^m$ určující souřadnice vrcholů grafu v R^m a toto vnoření musí souviset se strukturou grafu.

Geometrické algoritmy

- Geometrické algoritmy se znaží graf hrubě rozdělit na základě rozmístění vrcholů v prostoru/rovině bez informací o hranách.
- Potřebují tedy nutně navíc vnoření $b\colon V \to R^m$ určující souřadnice vrcholů grafu v R^m a toto vnoření musí souviset se strukturou grafu.
- Tyto požadavky bývají splněny např. u dělení grafu vzniklého z diskretizační sítě v metodě konečných prvků[1].

[1] Finite Element Method (FEM) - známá metoda numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic

Spektrální algoritmus

- Sofistikovaná metoda založená na výpočtu vlastního vektoru druhého nejmenšího vlastního čísla Laplaceovy matice grafu.

Definice

Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Laplaceova matice grafu G je matice

$$L(G) = \begin{pmatrix} deg(v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & deg(v_n) \end{pmatrix} - Soused(G),$$

kde $deg(v_i)$ je stupeň vrcholu v_i a $Soused(G)$ je matice sousednosti.

Poznámky k algoritmům

- Mnoho algoritmů dělení grafů je kvůli jednoduchosti návrhu a implementace vyvíjeno pouze pro případ $s = 2$ (tzv. bisekce grafu).

Poznámky k algoritmům

- Mnoho algoritmů dělení grafů je kvůli jednoduchosti návrhu a implementace vyvíjeno pouze pro případ $s = 2$ (tzv. bisekce grafu).
- Často se ale používají i pro dělení grafu na $s = 2^k$ částí rekurzivním aplikováním algoritmu na získané podgrafy.

Poznámky k algoritmům

- Mnoho algoritmů dělení grafů je kvůli jednoduchosti návrhu a implementace vyvíjeno pouze pro případ $s = 2$ (tzv. bisekce grafu).
- Často se ale používají i pro dělení grafu na $s = 2^k$ částí rekurzivním aplikováním algoritmu na získané podgrafy.

- V bakalářské práci popíšu základní metody podrobněji, a pak se budu zabývat algoritmy dělení grafů, které si všímají nejen řídkosti matice, ale i jejích numerických hodnot.

Díky za pozornost!

Zdroje:

A. Pothen, Graph Partitioning Algorithms With Applications To Scientific Computing, in: Parallel Numerical Algorithms, 1997, 323–368, Kluwer Academic Press