Frakcionální Poissonův proces

Adéla Jalovcová

9. března 2020

Osnova

Základní definice

Definice

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor, $T \neq \emptyset, \forall T \in T$, je dána náhodná veličina $X_t : (\Omega, A) \to (H_t, G_t)$, kde (H_t, G_t) je měřitelný prostor. Rodinu $\{X_t, t \in T\}$ nazýváme náhodný proces.

Příkladem náhodného procesu je například Poissonův proces, kde mají náhodné veličiny X_t Poissonovo rozdělení. Tento proces může reprezentovat například počet pojistných událostí registrovaných pojišťovnou v průběhu času.

Zadání a cíle

Zadání a cíle

- seznámení se s frakcionálním Poissonovým procesem a jeho vlastnostmi

Zadání a cíle

- seznámení se s frakcionálním Poissonovým procesem a jeho vlastnostmi
- Výsledek: práce přehledového charakteru

Zadání a cíle

- seznámení se s frakcionálním Poissonovým procesem a jeho vlastnostmi
- Výsledek: práce přehledového charakteru
- Cíl: porovnání definic frakcionálního Poissonova procesu z dvou různých odborných článků, případně spočíst autokovarianční funkci

Články

Články

- Každý článek používá jinou definici frakcionálního Poissonova procesu

Články

- Každý článek používá jinou definici frakcionálního Poissonova procesu
- Existuje více definic frakcionální derivace a každý z článků používá jinou.

Články

- Každý článek používá jinou definici frakcionálního Poissonova procesu
- Existuje více definic frakcionální derivace a každý z článků používá jinou.
- V bakalářské práci chci ukázat, že oba články definují stejný matematický objekt.

Frakcionální derivace

Definice

Frakcionální derivace v Caputově smyslu je definována jako

$$ {}_tD^{\mu}_{*}f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int\limits_0^t \frac{f^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} d\tau, & 0 < \mu < 1, \\ \frac{d}{dt} f(t), & \mu = 1. \end{cases} \quad (1) $$

Definice

Frakcionální derivace je definována jako

$$ {}_tD^{\mu}_{*}f(t) := \begin{cases} \frac{d}{dt}[\frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} d\tau], & 0 < \mu < 1, \\ \frac{d}{dt} f(t), & \mu = 1. \end{cases} \quad (2) $$

Definice frakcionálního Poissonova procesu 1

Definice

Frakcionální Poissonův proces je proces obnovy, pro nějž platí

$$D_*^{\mu} p_0(t) = -p_0(t) \tag{3}$$

s počáteční podmínkou $p_0(0^+) = 1$, kde $p_0(t) = P(T > t)$, t je čas a T je čas čekání na událost.

Definice frakcionálního Poissonova procesu 2

Definice

Frakcionální Poissonův proces je čítací proces splňující

$$ {}_tD_t^{\mu} P_\mu(n,t) = \nu(P_\mu(n-1,t) - P_\mu(n,t)) + \frac{t^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)}\delta_{n,0},\, O < \mu \le 1 \tag{4} $$

kde ν je reálný parametr a $P_\mu(n,t)$ značí pravděpodobnost, že se do času t stalo n událostí.

Použité metody

Použité metody

- K řešení frakcionálních diferenciálních rovnic používám Laplaceovu transformaci a frakcionální integrál.

Použité metody

- K řešení frakcionálních diferenciálních rovnic používám Laplaceovu transformaci a frakcionální integrál.
- Laplaceova transformace funkce f(t)

$$(Lf(t))(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{5}$$

Použité metody

- K řešení frakcionálních diferenciálních rovnic používám Laplaceovu transformaci a frakcionální integrál.
- Laplaceova transformace funkce f(t)

$$(Lf(t))(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{5}$$

- Frakcionální integrál f(t)

$$J^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu-1} f(\tau) d\tau, 0 < \mu \leq 1 \tag{6}$$

Dosavadní závěry

Dosavadní závěry

- Obě definice popisují stejný náhodný proces

Dosavadní závěry

- Obě definice popisují stejný náhodný proces
- Spočtení střední hodnoty frakcionállního Poissonova procesu

Pokračování

Pokračování

- Výpočet rozptylu procesu

Pokračování

- Výpočet rozptylu procesu
- Spočtení autokovarianční funkce

Děkuji za pozornost.