Struktura čistě injektivních abelovovských grup

Filip Jankovec

12. března 2020

Nejzákladnější definice

Definice

Buď R okruh s jednotkou.
Řekneme, že $M = (\mathrm{M}, +, -, 0, \cdot r\ (r \in R))$ je levý R modul, jestliže platí:

- 1) $(\mathrm{M}, +, -, 0)$ je abelovská grupa
- 2) $\forall m, n \in M\ \forall r \in R : r(m+n) = rm + rn$
- 3) $\forall m \in M\ \forall r, s \in R : (r+s)m = rm + sm$
- 4) $\forall m \in M\ \forall r, s \in R : (r \cdot s)m = r(sm)$
- 5) $\forall m \in M : 1 \cdot m = m$

Nejzákladnější definice

Definice

Buď R okruh s jednotkou.
Řekneme, že $M = (\mathrm{M}, +, -, 0, \cdot r\ (r \in R))$ je levý R modul, jestliže platí:

- 1) $(\mathrm{M}, +, -, 0)$ je abelovská grupa
- 2) $\forall m, n \in M\ \forall r \in R : r(m+n) = rm + rn$
- 3) $\forall m \in M\ \forall r, s \in R : (r+s)m = rm + sm$
- 4) $\forall m \in M\ \forall r, s \in R : (r \cdot s)m = r(sm)$
- 5) $\forall m \in M : 1 \cdot m = m$

Příklad

Každá abelovská grupa je levý $\mathbb{Z}$ modul.

Základní definice

Definice

Buď N R-podmodul M.
Řekneme, že N je čistý R-podmodul M (značíme $N {\leq_*} M$), jestliže pro každý systém rovnic tvaru:
$\sum_{j=1}^{m} r_{ij}x_j = a_i$, kde $i = 1, ..., n$ $a_i \in N, r_{ij} \in R$ $\forall i, j$ má řešení v N vždy, pokud má řešení v M.

Základní definice

Definice

Buď M R-modul.
Řekneme, že M je čistě injektivní, jestliže:
$\forall A, B$ moduly, kde $B \leq_* A$ platí, že každý R-homomorfismus f z B do M lze rozšířit na R-homomorfismus z A do M.

První zajímavá věta

Věta

Buď R obor hlavních ideálů a M redukovaný R-modul. Pak M je čistě injektivní právě tehdy, je-li M izomorfní $\prod_{p \in P} M_p$, kde M_p jsou čistě injektivní $R_{(p)}$-moduly a P je množina prvočinitelů z R.

První zajímavá věta

Věta

Buď R obor hlavních ideálů a M redukovaný R-modul. Pak M je čistě injektivní právě tehdy, je-li M izomorfní $\prod_{p \in P} M_p$, kde M_p jsou čistě injektivní $R_{(p)}$-moduly a P je množina prvočinitelů z R.

Definice

Řekneme, že N je divisibilní R-modul, jestliže $\forall r \in R \setminus \{0\}$ platí $N = rN$.
Řekneme, že M je redukovaný R-modul, jestliže žádný netriviální podmodul M není divisibilní.

Co je $R_{(p)}$-modul?

Definice

Buď R obor hlavních ideálů, $p \in R$ prvočinitel a Q jeho podílové těleso. Značením $R_{(p)}$ rozumíme podokruh Q, že:
$\frac{a}{b} \in R_{(p)} \Leftrightarrow (a \in R \wedge b \in R \backslash pR)$

Co je $R_{(p)}$-modul?

Definice

Buď R obor hlavních ideálů, $p \in R$ prvočinitel a Q jeho podílové těleso. Značením $R_{(p)}$ rozumíme podokruh Q, že:
$\frac{a}{b} \in R_{(p)} \Leftrightarrow (a \in R \wedge b \in R \backslash pR)$

Pozorování

$R_{(p)}$ je diskrétní valuační okruh, neboli $R_{(p)}$ má právě jeden nenulový maximální ideál (a to pR).

Topologie

Věta

Buď R diskrétní valuační okruh a M redukovaný R-modul. Potom M je čistě injektivní právě tehdy, když M je úplný v p-addické topologii a Hausdorffův.

Definice

Buď R obor hlavních ideálů a buď p prvočinitel v R. p-addickou topologií rozumíme topologii danou bází podmodulů M typu $p^n M$ $n \in \mathbb{N}$

Topologie

Věta

Buď R diskrétní valuační okruh a M R-modul úplný v p-addické topologii a Hausdorffův. Pak M je izomorfní direktní sumě cyklických modulů, která je jzn. určena až na izomorfismus.

Shrnutí

Abelovská grupa A je čistě injektivní právě tehdy, když je izomorfní grupě tvaru: $\prod_{p\in P}(\bigoplus_{n\in N} Z(p^n)^{(\alpha_{p,n})} \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\beta_p)}) \oplus D$, kde D je divisibilní grupa, $Z(p^n)$ jsou grupy tvaru $\mathbb{Z}_{(p)} \backslash p^n \mathbb{Z}_{(p)}$.

Děkuji za pozornost.