1 Reprezentační teorie

.

V teorii, kterou používám k práci, se používají reprezentace Lieových grup i Lieových algeber.

Tyto reprezentace si odpovídají.

Pro informaci, Lieova algebra je tečný prostor k Lieově grupě, pokud ji vnímáme jako $k-$plochu v $\mathbb{R}^n$. Toto jde provést, neboť ekvivalentní definice Lieovy grupy je, že je to kromě grupy také hladká varieta, což je objekt, pro jednoduchost, odpovídající $k-$ploše.

$GL(n, \mathbb{R})$ je grupa invertibilních matic typu $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$SO(n, \mathbb{R})$ je grupa ortogonálních matic typu $\mathbb{R}^{n\times n}$, které mají determinant roven 1. (Čili pro $A \in SO(n, \mathbb{R})$ platí: $AA^T = I_n \quad det(A) = 1$).

Jejich komplexní varianty se často označují pouze $GL(n)$ a $SU(n)$. (Reálnému termínu „ortogonální" odpovídá termín „unitární" v komplexním případě, proto změna $SO \mapsto SU$.

.

Může dojít ke zmatení čtenáře. Reprezentace grupy G na vektorovém prostoru V je ono zobrazení ϱ.

Pokud se ale bavíme o té samé grupě, nebo je grupa známá z kontextu, tak jako „reprezentaci" můžeme označit i samotné V. Porovnej s definicí vektorového prostoru jako irreducibilní reprezentace.

.

Poznámka:

$\varrho(g)$ je prvek $End(V)$, je to tedy zobrazení $V \to V$.

Můžeme tedy zjednodušovat zápis postupně $[\varrho(g)](v) = \varrho(g)(v) = g(v)$.

Pak upřesnění značení:

$[\varrho(g) \circ \varrho(h)](v) = \varrho(g) \circ \varrho(h)(v) = [\varrho(g)]([\varrho(h)](v))$

.

Maticová grupa $Spin(n)$ je taková grupa, která je dvojitým nakrytím grupy $SO(n)$, (tj. $\exists \varphi : Spin(n) \to SO(n)$ spojité t.ž. $\forall A \in SO(n) \exists$ právě dvě $M, N \in Spin(n) : \varphi(M) = \varphi(N) = A$),

navíc pro $Spin(n)$ požadujeme, aby existovala krátká exaktní posloupnost Lieových grup $1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(n) \to SO(n) \to 1$.

Motivace za zkoumáním této grupy je ve fyzice. Ukazuje se ale, že např pro tuto práci je dosti výhodná, neboť Lieovy algebry $Spin(n)$ a $SO(n)$ jsou izomorfní.

2 Obecná konstrukce

.

Differenciální operátor je operátor z prostoru funkcí do prostoru funkcí, používající ve svém předpisu vstupní funkce a jejich derivace.

Pro naše účely budeme typicky uvažovat Differenciální operátory jedné proměnné prvního řádu. Tudíž jejich předpis se dá zapsat pomocí f a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pro $i = 1 \dots n$.

.

Ztotožnění grupy rotací $SO(2, \mathbb{R})$ s jednotkovou kružnicí, a posléze s $[0, 2\pi]$ jsem si dovolil, neboť rotaci můžeme vnímat jako násobení v $\mathbb{C}$ prvkem z kružnice nebo rotace v $\mathbb{R}^n$ o úhel $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Rozkládá-li se reprezentace V na dvě irreducibilní reprezentace V_1, V_2, pak lze operátor D_1 ekvivalentně popat pomocí diferenciálních rovnic dané vztahem $D_2 \equiv 0$ (D_i definováno ve větě Stein-Weiss).

V práci vysvětlíme, proč tento postup lze užít i když V_2 není nutně irreducibilní.

Je-li V_1 roven tzv. Cartanově součinu $V\mathbb{C}^n$, pak se tomuto postupu říká rozšíření Couchy-Riemannových podmínek.

Pro $n > 2$ se postup liší, neboť $SO(n)$ není komutativní.