Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

Martina Petráková

Osnova prezentace

1. Motivace
2. Základní definice
3. Cíl práce

Úvod

- Práce se zabývá bodovými procesy v $\mathbb{R}^2$.

Úvod

- Práce se zabývá bodovými procesy v $\mathbb{R}^2$.
- Bodový proces v $\mathbb{R}^2$ je matematický model pro množiny bodů v rovině.

Úvod

- Práce se zabývá bodovými procesy v $\mathbb{R}^2$.
- Bodový proces v $\mathbb{R}^2$ je matematický model pro množiny bodů v rovině.
- Bodové procesy mohou sloužit jako model v biologii (výskyt ptačích hnízd), epidemiologii (výskyt nakažených jedinců) a dalších oborech.

Úvod

- Práce se zabývá bodovými procesy v $\mathbb{R}^2$.
- Bodový proces v $\mathbb{R}^2$ je matematický model pro množiny bodů v rovině.
- Bodové procesy mohou sloužit jako model v biologii (výskyt ptačích hnízd), epidemiologii (výskyt nakažených jedinců) a dalších oborech.
- Konkrétně nás bude zajímat Poissonův bodový proces a jedna z jeho základních charakteristik - funkce intenzity.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Bodový proces na $\mathbb{R}^2$ je měřitelné zobrazení z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ do prostoru $(N, \mathcal{N})$, kde je N je množina všech čítacích měr na $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{N}$ je vhodná σ-algebra.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Bodový proces na $\mathbb{R}^2$ je měřitelné zobrazení z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ do prostoru $(N, \mathcal{N})$, kde je N je množina všech čítacích měr na $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{N}$ je vhodná σ-algebra.
- Čítací mírou zde míníme míru, která nabývá hodnot z $\mathbb{N}_0$ a je konečná na každé kompaktní podmnožině $\mathbb{R}^2$.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Bodový proces na $\mathbb{R}^2$ je měřitelné zobrazení z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ do prostoru $(N, \mathcal{N})$, kde je N je množina všech čítacích měr na $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{N}$ je vhodná σ-algebra.
- Čítací mírou zde míníme míru, která nabývá hodnot z $\mathbb{N}_0$ a je konečná na každé kompaktní podmnožině $\mathbb{R}^2$.
- Pro bodový proces $\mathbb{X}$ a $B \subset \mathbb{R}^2$ označme jako $N_X(B)$ počet bodů z procesu $\mathbb{X}$ v množině B. Pak $N_X(B)$ je náhodná veličina.

Binomický proces

Binomický proces

- Jedním ze základních příkladů bodových procesů je binomický proces:

Binomický proces

- Jedním ze základních příkladů bodových procesů je binomický proces:

Definice (Binomický proces)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $W \subset \mathbb{R}^2$ a $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné vektory s hustotou $f(x, y)$ s nosičem W. Pak bodový proces daný předpisem $\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_n}$ nazýváme binomický proces.

Binomický proces

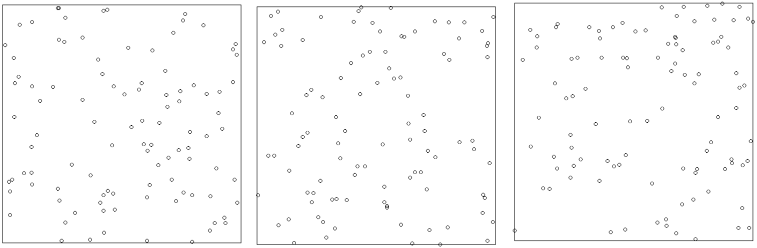
- Jedním ze základních příkladů bodových procesů je binomický proces:

Definice (Binomický proces)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $W \subset \mathbb{R}^2$ a $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné vektory s hustotou $f(x, y)$ s nosičem W. Pak bodový proces daný předpisem $\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_n}$ nazýváme binomický proces.

- Speciálně pokud $X_1, \dots, X_n$ mají rovnoměrné rozdělení, pak daný binomický proces nazýváme homogenní.

Binomický proces - realizace



Obrázek: Příklady realizací homogenního binomického procesu s $n = 100$ body v okně $W = [0, 1]^2$.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- V práci nás bude zajímat Poissonův bodový proces v $\mathbb{R}^2$.

- V práci nás bude zajímat Poissonův bodový proces v $\mathbb{R}^2$.
- Předtím, než ho zadefinujeme, připomeňme, že náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou λ , pokud
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$
pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- V práci nás bude zajímat Poissonův bodový proces v $\mathbb{R}^2$.
- Předtím, než ho zadefinujeme, připomeňme, že náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou λ , pokud
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$
pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
- Dále připomeňme, že $N_X(B)$ značí počet bodů z procesu $\mathbb{X}$ v množině B.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

Definice (Poissonův bodový proces v $\mathbb{R}^2$)

Nechť Λ je míra na $\mathbb{R}^2$ (konečná na kompaktních množinách a neatomická). Pak bodový proces $\mathbb{X}$ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ, pokud splňuje:

- $N_X(B)$ má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\Lambda(B)$ pro $\forall B \subset \mathbb{R}^2$, B kompaktní.
- Pro $B_1, \ldots, B_m$ disjunktní kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^2$ platí, že $N_X(B_1), \ldots, N_X(B_m)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

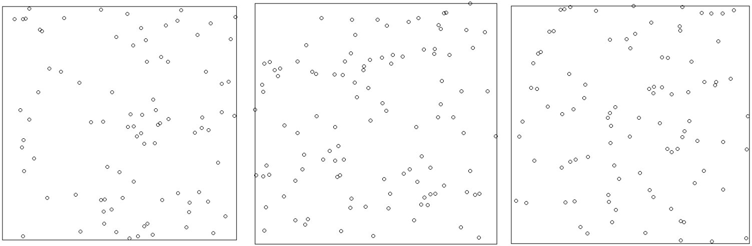
Definice (Poissonův bodový proces v $\mathbb{R}^2$)

Nechť Λ je míra na $\mathbb{R}^2$ (konečná na kompaktních množinách a neatomická). Pak bodový proces $\mathbb{X}$ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ, pokud splňuje:

- $N_X(B)$ má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\Lambda(B)$ pro $\forall B \subset \mathbb{R}^2$, B kompaktní.
- Pro $B_1, \dots, B_m$ disjunktní kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^2$ platí, že $N_X(B_1), \dots, N_X(B_m)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

- Speciálně, pokud Λ je násobkem Lebesqueovy míry, pak daný bodový proces nazýváme homogenní Poissonův bodový proces.

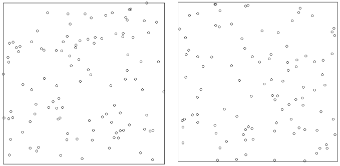
Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu



Obrázek: Realizace homogenního Poissonova bodového procesu v okně $W = [0,1]^2$ se středním počtem bodů 100.
Počty bodů: vlevo 87, uprostřed 107, vpravo 94.

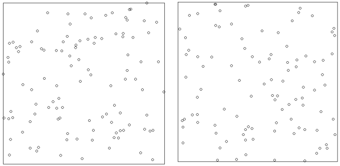
Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Porovnáme-li realizace homogenního Poissonova (vlevo) a binomického procesu (vpravo), nedokážeme je na první pohled rozeznat.



Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

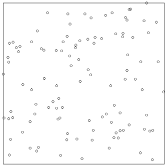
- Porovnáme-li realizace homogenního Poissonova (vlevo) a binomického procesu (vpravo), nedokážeme je na první pohled rozeznat.

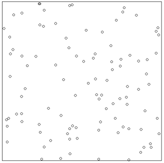


- Toto není náhoda - jak uvidíme dále, mezi těmito dvěma procesy existuje vztah.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Porovnáme-li realizace homogenního Poissonova (vlevo) a binomického procesu (vpravo), nedokážeme je na první pohled rozeznat.





- Toto není náhoda - jak uvidíme dále, mezi těmito dvěma procesy existuje vztah.
- Hlavní rozdíl spočívá v počtu bodů - pro binomický proces je počet bodů dán fixně, zatímco pro Poissonův se s každou realizací mění.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Jednou ze základních charakteristik Poissonova bodového procesu je jeho funkce intenzity.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Jednou ze základních charakteristik Poissonova bodového procesu je jeho funkce intenzity.

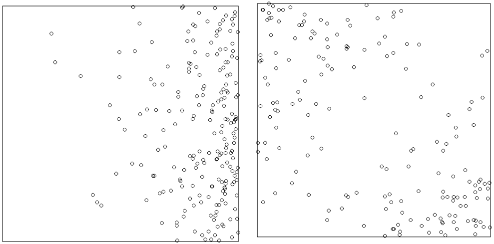
Definice (funkce intenzity)

Nechť $\mathbb{X}$ je Poissonův bodový proces v $\mathbb{R}^2$ s mírou intenzity Λ a nechť pro funkci $\lambda(x,y)$ platí

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x,y)\mathrm{d}x$$

pro $B \subset \mathbb{R}^2$ borelovské. Pak $\lambda(x,y)$ nazýváme funkcí intenzity procesu $\mathbb{X}$.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu



Obrázek: Realizace nehomogenního Poissonova bodového procesu v okně $W = [0,1]^2$. Vlevo: funkce intenzity $\lambda(x,y) = \exp(6 \cdot x + 1)$. Vpravo: funkce intenzity $\lambda(x,y) = 500 \cdot |x - y|$.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Řekneme, že funkce intenzity $\lambda(x, y)$ je separabilní, pokud $\lambda(x, y) = \lambda_1(x) \cdot \lambda_2(y)$.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Řekneme, že funkce intenzity $\lambda(x, y)$ je separabilní, pokud $\lambda(x, y) = \lambda_1(x) \cdot \lambda_2(y)$.
- Funkce intenzity homogenního Poissonova bodového procesu je konstanta, tedy speciálně je separabilní.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Řekneme, že funkce intenzity $\lambda(x, y)$ je separabilní, pokud $\lambda(x, y) = \lambda_1(x) \cdot \lambda_2(y)$.
- Funkce intenzity homogenního Poissonova bodového procesu je konstanta, tedy speciálně je separabilní.
- V práci budeme zkoumat, jak z napozorovaných dat poznat, zda se jedná o realizaci Poissonova bodového procesu se separabilní funkcí intenzity.

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- K tomu nám bude sloužit následující věta:

Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

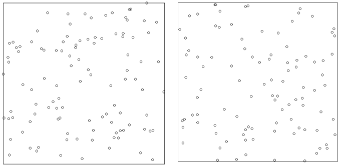
- K tomu nám bude sloužit následující věta:

Věta

Podmíněně při n napozorovaných bodech v okně W má restrikce Poissonova bodového procesu X s funkcí intenzity $\lambda(x, y)$ *na okno W stejné rozdělení jako binomický proces daný náhodnými vektory* $X_1, \ldots, X_n$*, kde* X_i *má vhodnou hustotu. Pokud je navíc* $\lambda(x, y)$ *separabilní, pak jsou složky vektoru* X_i *nezávislé.*

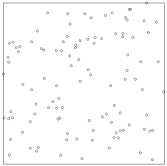
Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

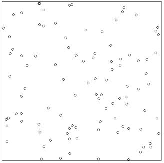
- Vraťme se zpět k porovnání realizací homogenního Poissonova a binomického procesu.



Separabilita funkce intenzity Poissonova bodového procesu

- Vraťme se zpět k porovnání realizací homogenního Poissonova a binomického procesu.





- Na realizace Poissonova bodového procesu (vlevo) se nyní můžeme dívat jako na realizaci homogenního binomického procesu v okně $W = [0,1]^2$ s $n = 107$ body.

Cíl práce

Cíl práce

- Sestavení testu pro hypotézu separability funkce intenzity pro speciální případ funkce intenzity ve tvaru $\exp(\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y)$.

Cíl práce

- Sestavení testu pro hypotézu separability funkce intenzity pro speciální případ funkce intenzity ve tvaru $\exp(\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y)$.
- Sestavení testu pro hypotézu separability funkce intenzity pro obecný případ.

Cíl práce

- Sestavení testu pro hypotézu separability funkce intenzity pro speciální případ funkce intenzity ve tvaru $\exp(\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y)$.
- Sestavení testu pro hypotézu separability funkce intenzity pro obecný případ.
- Simulační studie popisující hladinu testu a sílu testu proti různým alternativám.

Cíl práce

- Sestavení testu pro hypotézu separability funkce intenzity pro speciální případ funkce intenzity ve tvaru $\exp(\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y)$.
- Sestavení testu pro hypotézu separability funkce intenzity pro obecný případ.
- Simulační studie popisující hladinu testu a sílu testu proti různým alternativám.
- Případné rozšíření testu pro bodový proces v $\mathbb{R}^3$.

Děkuji za pozornost!