Dvourozměrné negativně binomické rozdělení

David Šír

1. dubna 2020

Osnova prezentace

Cíl práce

Cíl práce

- Popsat dvourozměrné negativně binomické rozdělení, které navrhl James E. Dunn v roce 1967.

Cíl práce

- Popsat dvourozměrné negativně binomické rozdělení, které navrhl James E. Dunn v roce 1967.
- Znalosti tohoto rozdělení ilustrovat v praktické studii.

Co je to dvourozměrné negativně binomické rozdělení?

Co je to dvourozměrné negativně binomické rozdělení?

- Je to sdružené rozdělení, jehož marginály mají negativně binomické rozdělení a jsou závislé.

Co je to dvourozměrné negativně binomické rozdělení?

- Je to sdružené rozdělení, jehož marginály mají negativně binomické rozdělení a jsou závislé.
- Jinak řečeno pokud má náhodný vektor $(X, Y)^T$ dvourozměrné negativně binomické rozdělení, pak náhodné veličiny X a Y mají negativně binomické rozdělení (jednorozměrné) a jsou závislé.

Co je to dvourozměrné negativně binomické rozdělení?

- Je to sdružené rozdělení, jehož margináły mají negativně binomické rozdělení a jsou závislé.
- Jinak řečeno pokud má náhodný vektor $(X, Y)^T$ dvourozměrné negativně binomické rozdělení, pak náhodné veličiny X a Y mají negativně binomické rozdělení (jednorozměrné) a jsou závislé.
- Abychom si mohli blíže říci, co to je dvourozměrné negativně binomické rozdělení, je třeba se nejprve podívat na jednorozměrnou verzi, bez ní to rozhodně nepůjde.

Negativně binomické rozdělení

Negativně binomické rozdělení

Definice (Negativně binomické rozdělení)

Nechť X je diskrétní náhodná veličina, $p \in (0,1)$, $r > 0$. Řekneme, že X má negativně binomické rozdělení, pokud nabývá hodnot z $\mathbb{N}_0$ s pravděpodobností

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^r p^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

značíme $X \sim \mathrm{NB}(r, p)$.

Negativně binomické rozdělení

Definice (Negativně binomické rozdělení)

Nechť X je diskrétní náhodná veličina, $p \in (0,1)$, $r > 0$. Řekneme, že X má negativně binomické rozdělení, pokud nabývá hodnot z $\mathbb{N}_0$ s pravděpodobností

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^r p^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

značíme $X \sim \mathrm{NB}(r, p)$.

Je-li r přirozené číslo, pak negativně binomické rozdělení vyjadřuje počet úspěchů před r-tým neúspěchem v nezávislých stejně rozdělených pozorování.

Vlastnosti negativně binomického rozdělení

Vlastnosti negativně binomického rozdělení

Předpokládejme, že $X \sim \mathrm{NB}(r, p)$. Pak pomocí vytvořující funkce můžeme spočítat rozptyl a střední hodnotu náhodné veličiny (n. v.) X.

Vlastnosti negativně binomického rozdělení

Předpokládejme, že $X \sim \mathrm{NB}(r, p)$. Pak pomocí vytvořující funkce můžeme spočítat rozptyl a střední hodnotu náhodné veličiny (n. v.) X.

- Střední hodnota X je

$$\mathrm{E}\, X = \frac{pr}{1-p}.$$

Vlastnosti negativně binomického rozdělení

Předpokládejme, že $X \sim \mathrm{NB}(r, p)$. Pak pomocí vytvořující funkce můžeme spočítat rozptyl a střední hodnotu náhodné veličiny (n. v.) X.

- Střední hodnota X je
$$\mathrm{E}\,X = \frac{pr}{1-p}.$$
- Rozptyl X je
$$\mathrm{var}(X) = \frac{pr}{(1-p)^2}.$$

Vztah negativně binomického rozdělení k ostatním rozdělením

Vztah negativně binomického rozdělení k ostatním rozdělením

- Vztah ke geometrickému rozdělení

$$X \sim \mathrm{Geom}(p) \iff X \sim \mathrm{NB}(1, 1-p).$$

Vztah negativně binomického rozdělení k ostatním rozdělením

- Vztah ke geometrickému rozdělení

$$X \sim \mathrm{Geom}(p) \iff X \sim \mathrm{NB}(1, 1-p).$$

- Nechť $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ jsou nezávislé náhodné veličiny z geometrického rozdělení $\mathrm{Geom}(1-p)$. Potom platí

$$X \stackrel{D}{=} \sum_{i=1}^{r} Y_i, \quad kde\ X \sim \mathrm{NB}(r, p).$$

Vztah negativně binomického rozdělení k ostatním rozdělením

- Vztah ke geometrickému rozdělení

$$X \sim \mathrm{Geom}(p) \iff X \sim \mathrm{NB}(1, 1-p).$$

- Nechť $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$ jsou nezávislé náhodné veličiny z geometrického rozdělení $\mathrm{Geom}(1-p)$. Potom platí

$$X \stackrel{D}{=} \sum_{i=1}^{r} Y_i, \quad kde\ X \sim \mathrm{NB}(r, p).$$

- Nechť máme posloupnost náhodných veličin $\{X_r\}_{r=1}^{\infty}$, kde pro každé $r \in \mathbb{N}$ má $X_r \sim \mathrm{NB}(r, \frac{\lambda}{r+\lambda})$. Pak

$$X_r \xrightarrow{D} Y, \quad pro\ r \to \infty, \quad kde\ Y \sim \mathrm{Po}(\lambda).$$

K čemu je negativně binomické rozdělení dobré?

K čemu je negativně binomické rozdělení dobré?

- Mějme $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro který platí $X_i \in \mathbb{N}_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

K čemu je negativně binomické rozdělení dobré?

- Mějme $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro který platí $X_i \in \mathbb{N}_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
- Základní model pro tato data je Poissonovo rozdělení.

K čemu je negativně binomické rozdělení dobré?

- Mějme $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro který platí $X_i \in \mathbb{N}_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
- Základní model pro tato data je Poissonovo rozdělení.
- Tento model však předpokládá rovnost střední hodnoty a rozptylu.

K čemu je negativně binomické rozdělení dobré?

- Mějme $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro který platí $X_i \in \mathbb{N}_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
- Základní model pro tato data je Poissonovo rozdělení.
- Tento model však předpokládá rovnost střední hodnoty a rozptylu.
- V praxi ale můžeme často zjistit, že výběrový průměr $\overline{X}_n$ je mnohem menší než výběrový rozptyl S_n^2. Tedy Poissonovo rozdělení není úplně vhodné pro tato data.

K čemu je negativně binomické rozdělení dobré?

- Mějme $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro který platí $X_i \in \mathbb{N}_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
- Základní model pro tato data je Poissonovo rozdělení.
- Tento model však předpokládá rovnost střední hodnoty a rozptylu.
- V praxi ale můžeme často zjistit, že výběrový průměr $\overline{X}_n$ je mnohem menší než výběrový rozptyl S_n^2. Tedy Poissonovo rozdělení není úplně vhodné pro tato data.
- Co s tím?

K čemu je negativně binomické rozdělení dobré?

- Mějme $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro který platí $X_i \in \mathbb{N}_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
- Základní model pro tato data je Poissonovo rozdělení.
- Tento model však předpokládá rovnost střední hodnoty a rozptylu.
- V praxi ale můžeme často zjistit, že výběrový průměr $\overline{X}_n$ je mnohem menší než výběrový rozptyl S_n^2. Tedy Poissonovo rozdělení není úplně vhodné pro tato data.
- Co s tím?
- Uvažujme, že data pochází z negativně binomického rozdělení.

K čemu je negativně binomické rozdělení dobré?

- Mějme $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro který platí $X_i \in \mathbb{N}_0, \forall i \in \mathbb{N}$.
- Základní model pro tato data je Poissonovo rozdělení.
- Tento model však předpokládá rovnost střední hodnoty a rozptylu.
- V praxi ale můžeme často zjistit, že výběrový průměr $\overline{X}_n$ je mnohem menší než výběrový rozptyl S_n^2. Tedy Poissonovo rozdělení není úplně vhodné pro tato data.
- Co s tím?
- Uvažujme, že data pochází z negativně binomického rozdělení.

Samozřejmě negativně binomické rozdělení má i další využití.

Definice dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Definice dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Definice (Dvourozměrné negativně binomické rozdělení)

Nechť X, Y jsou diskrétní náhodné veličiny a nechť $a, p_0, p_1, p_2 > 0$ jsou konstanty splňující $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. Řekneme, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ má dvourozměrné negativně binomické rozdělení, pokud nabývá hodnot z $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ a pokud jeho vytvořující funkce je dána vztahem

$$P_{X,Y}(z_1, z_2) = \left(\frac{p_0}{1 - p_1 z_1 - p_2 z_2} \right)^a . \tag{2}$$

Definice dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Definice dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Výraz z (2) můžeme následně převést do "stravitelnější" podoby

Definice dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Výraz z (2) můžeme následně převést do "stravitelnější" podoby

$$P(X = x,\ Y = y) = \frac{(a + x + y - 1)!}{(a - 1)!x!y!}\, p_0^a\, p_1^x\, p_2^y.$$

Definice dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Výraz z (2) můžeme následně převést do "stravitelnější" podoby

$$\mathrm{P}(X = x,\ Y = y) = \frac{(a + x + y - 1)!}{(a-1)!x!y!}\, p_0^a\, p_1^x\, p_2^y .$$

Můžeme si všimnout jistého vztahu mezi jednorozměrným a dvourozměrným negativně binomickým rozdělením, neboť z definice (1) platí

Definice dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Výraz z (2) můžeme následně převést do "stravitelnější" podoby

$$P(X = x,\ Y = y) = \frac{(a + x + y - 1)!}{(a - 1)!x!y!}\, p_0^a\, p_1^x\, p_2^y .$$

Můžeme si všimnout jistého vztahu mezi jednorozměrným a dvourozměrným negativně binomickým rozdělením, neboť z definice (1) platí

$$P(X = x) = \binom{x + r - 1}{x}(1 - p)^r p^x = \frac{(x + r - 1)!}{(r - 1)!x!}(1 - p)^r p^x .$$

Vlastnosti dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Nakonec se podíváme na nějaké vlastnosti dvourozměrného negativně binomického rozdělení. Předpokládejme, že $(X, Y)^T$ má dvourozměrné negativně binomické rozdělení. Pak

Vlastnosti dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Nakonec se podíváme na nějaké vlastnosti dvourozměrného negativně binomického rozdělení. Předpokládejme, že $(X, Y)^T$ má dvourozměrné negativně binomické rozdělení. Pak

- náhodné veličiny X a Y mají obě negativně binomická rozdělení,

Vlastnosti dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Nakonec se podíváme na nějaké vlastnosti dvourozměrného negativně binomického rozdělení. Předpokládejme, že $(X, Y)^T$ má dvourozměrné negativně binomické rozdělení. Pak

- náhodné veličiny X a Y mají obě negativně binomická rozdělení,
- náhodná veličina $W = X + Y$ má negativně binomické rozdělení,

Vlastnosti dvourozměrného negativně binomického rozdělení

Nakonec se podíváme na nějaké vlastnosti dvourozměrného negativně binomického rozdělení. Předpokládejme, že $(X, Y)^T$ má dvourozměrné negativně binomické rozdělení. Pak

- náhodné veličiny X a Y mají obě negativně binomická rozdělení,
- náhodná veličina $W = X + Y$ má negativně binomické rozdělení,
- náhodná veličina X podmíněná náhodnou veličinou Y má negativně binomická rozdělení, obráceně to také platí.

Děkuji za pozornost!