Vektorová pole na sférách

Filip Strakoš

1. dubna 2020

Osnova

Základní pojmy

Základním objektem našeho studia budou vícerozměrné sféry, dále jen n-sféry.

Základní pojmy

Základním objektem našeho studia budou vícerozměrné sféry, dále jen n-sféry.

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. **Sférou** dimenze n, značíme $\mathbb{S}^n$, nazveme množinu

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\}$$

s topologií podprostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, kde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je euklidovská norma na $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pro dostatečne malé n dostáváme následující příklady

Základní pojmy

Základním objektem našeho studia budou vícerozměrné sféry, dále jen n-sféry.

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. **Sférou** dimenze n, značíme $\mathbb{S}^n$, nazveme množinu

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \; : \; \|x\| = 1\}$$

s topologií podprostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, kde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je euklidovská norma na $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pro dostatečne malé n dostáváme následující příklady

- $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$

Základní pojmy

Základním objektem našeho studia budou vícerozměrné sféry, dále jen *n*-sféry.

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. **Sférou** dimenze n, značíme $\mathbb{S}^n$, nazveme množinu

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\}$$

s topologií podprostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, kde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je euklidovská norma na $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pro dostatečne malé n dostáváme následující příklady

- $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$
- $\mathbb{S}^1$ je kružnice se středem v počátku o poloměru jedna v $\mathbb{R}^2$

Základní pojmy

Základním objektem našeho studia budou vícerozměrné sféry, dále jen n-sféry.

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. **Sférou** dimenze n, značíme $\mathbb{S}^n$, nazveme množinu

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\}$$

s topologií podprostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, kde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je euklidovská norma na $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pro dostatečne malé n dostáváme následující příklady

- $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$
- $\mathbb{S}^1$ je kružnice se středem v počátku o poloměru jedna v $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S}^2$ je povrch koule se středem v počátku a o poloměru 1 v $\mathbb{R}^3$

Základní pojmy

Dalším důležitým pojmem jsou tečné prostory, které v práci formulujeme v jazyku variet, ovšem zde za účelem zjednodušení se omezme na vnoření do euklidovských prostorů.

Základní pojmy

Dalším důležitým pojmem jsou tečné prostory, které v práci formulujeme v jazyku variet, ovšem zde za účelem zjednodušení se omezme na vnoření do euklidovských prostorů.

Definice

Nechť $\mathbb{S}^n$ je n-sféra. **Tečným prostorem** v bodě $x \in \mathbb{S}^n$ nazveme afinní podprostor $T_x\mathbb{S}^n$ prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, že pro každé $t \in T_x\mathbb{S}^n$ dané součtem $t = x + v$, kde $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, platí $\langle x, v \rangle = 0$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je snadnardní skalární součin na $\mathbb{R}^{n+1}$.

Základní pojmy

Dalším důležitým pojmem jsou tečné prostory, které v práci formulujeme v jazyku variet, ovšem zde za účelem zjednodušení se omezme na vnoření do euklidovských prostorů.

Definice

Nechť $\mathbb{S}^n$ je n-sféra. **Tečným prostorem** v bodě $x \in \mathbb{S}^n$ nazveme afinní podprostor $T_x\mathbb{S}^n$ prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, že pro každé $t \in T_x\mathbb{S}^n$ dané součtem $t = x + v$, kde $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, platí $\langle x, v \rangle = 0$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je snadnardní skalární součin na $\mathbb{R}^{n+1}$.

Jelikož sféra je lokálně n-plocha, což se dá dokázat například stereografickou projekcí ze severního a poté jižního pólu, má $T_x\mathbb{S}^n$ v každém bodě strukturu vektorového prostoru dimenze n.

Základní pojmy

Nyní si představme, že chceme popsat strukturu všech tečných prostorů na dané sféře. K tomu nám poslouží následující pojem.

Základní pojmy

Nyní si představme, že chceme popsat strukturu všech tečných prostorů na dané sféře. K tomu nám poslouží následující pojem.

Definice

Tečným fibrovaným prostorem n-sféry $\mathbb{S}^n$ nazvme trojici $(T\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n, \pi)$, kde

$$T\mathbb{S}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^n} T_x\mathbb{S}^n \quad \text{a} \quad \pi : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$$

je spojité zobrazení definované přiřazením $\pi(t) = x$ pro $t \in T_x\mathbb{S}^n$. Spojité zobrazení $s : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ takové, že $\pi \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$, se nazývá **vektorové pole**.

Zobecněním tečného fibrovaného prostoru jsou **vektorové bundly** $\xi = (E, B, \pi)$ a zobecněním vektorových polí jsou **řezy** bunlů.

Zobecnění tečného fibrovaného prostoru

Definice

Vektorový bundl je trojice $\xi = (E, B, \pi)$, kde E, B jsou topologické prostory a $\pi : E \to B$ je spojité zobrazení takové, že pro každé $b \in B$ mužeme na $\pi^{-1}(b)$ zavést strukturu reálného prostoru. Navíc musí být splněna následující **podmínka lokální triviality**:
Pro každé $b \in B$ existuje $n \in \mathbb{N}$, okolí U bodu b v B a homeomorfismus $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ takový, že pro každé $c \in U$ přiřazení $x \mapsto h(c, x)$ indukuje izomorfismus vektorových prostorů $\mathbb{R}^n$ a $\pi^{-1}(b)$.

Zobecnění tečného fibrovaného prostoru

Definice

Vektorový bundl je trojice $\xi = (E, B, \pi)$, kde E, B jsou topologické prostory a $\pi : E \to B$ je spojité zobrazení takové, že pro každé $b \in B$ mužeme na $\pi^{-1}(b)$ zavést strukturu reálného prostoru. Navíc musí být splněna následující **podmínka lokální triviality**:
Pro každé $b \in B$ existuje $n \in \mathbb{N}$, okolí U bodu b v B a homeomorfismus $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ takový, že pro každé $c \in U$ přiřazení $x \mapsto h(c, x)$ indukuje izomorfismus vektorových prostorů $\mathbb{R}^n$ a $\pi^{-1}(b)$.

Poznamenejme, že n se může lišit na každé komponentě souvislosti.

Izomorfismus v triviálním bundlem

Nad každým topologickým prostorem B lze vybudovat strukturu takzvaného **triviálního vektorového bundlu** $\varepsilon_B^n = (B \times \mathbb{R}^n, B, \pi)$, kde $\pi((b, x)) = b$.

Izomorfismus v triviálním bundlem

Nad každým topologickým prostorem B lze vybudovat strukturu takzvaného **triviálního vektorového bundlu** $\varepsilon_B^n = (B \times \mathbb{R}^n, B, \pi)$, kde $\pi((b, x)) = b$.

Definice

Vektorové bundly $\xi = (E(\xi), B, \pi_\xi)$ and $\nu = (E(\nu), B, \pi_\nu)$ nazveme **izomorfními**, píšeme $\xi \cong \nu$, pokud existuje homeomorfismus $f : E(\xi) \to E(\nu)$, pro který je zúžení $f \restriction \pi_\xi^{-1}(b)$ izomorfismus vektorových prostorů $\pi_\xi^{-1}(b)$ a $\pi_\nu^{-1}(b)$ pro každé $b \in B$.

Izomorfismus v triviálním bundlem

Nad každým topologickým prostorem B lze vybudovat strukturu takzvaného **triviálního vektorového bundlu** $\varepsilon_B^n = (B \times \mathbb{R}^n, B, \pi)$, kde $\pi((b,x)) = b$.

Definice

Vektorové bundly $\xi = (E(\xi), B, \pi_\xi)$ and $\nu = (E(\nu), B, \pi_\nu)$ nazveme **izomorfními**, píšeme $\xi \cong \nu$, pokud existuje homeomorfismus $f : E(\xi) \to E(\nu)$, pro který je zúžení $f \restriction \pi_\xi^{-1}(b)$ izomorfismus vektorových prostorů $\pi_\xi^{-1}(b)$ a $\pi_\nu^{-1}(b)$ pro každé $b \in B$.

Lze dokázat, že každý bundl, pro který dokážeme najít $s_1, \dots, s_n$ řezy bundlu, které tvoří v každém bodě b bázi $\pi^{-1}(b)$, je izomorfní s ε_B^n. Opačná implikace je zřejmá.

Nečekané aplikace

Přestože se vektorové bundly jeví jako čistě teoretický koncept, mají aplikace ve fyzice v teorii molekalárních vibrací, kde

Nečekané aplikace

Přestože se vektorové bundly jeví jako čistě teoretický koncept, mají aplikace ve fyzice v teorii molekalárních vibrací, kde

- B = atomy v molekule,
- E = prostor všech možných vychýlení atomů od ideální ekvilibriální polohy,
- π je projekce jako v případě triviálního bundlu.

Nečekané aplikace

Přestože se vektorové bundly jeví jako čistě teoretický koncept, mají aplikace ve fyzice v teorii molekalárních vibrací, kde

- B = atomy v molekule,
- E = prostor všech možných vychýlení atomů od ideální ekvilibriální polohy,
- π je projekce jako v případě triviálního bundlu.

Řezy pak vyjadřují vychýlení molekuly jako celku.
Necháme-li působit vhodným způsobem na E a B grupu symetrií tvaru molekuly tak, že je kompatibilní se strukturou bundlu.
Dostáváme prostředky na výpočet charakterů určitých representací a jazyk pro formulaci daného problému zahrnující řešení obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu.

Paralelizovatelnost sfér

Definice

Pokud je $T\mathbb{S}^n$ izomorfní s ε^n_B, nazveme $\mathbb{S}^n$ **paralelizovatelnou**.

Ne každá n-sféra je paralelizovatelná, ale záleží na paritě n.

Paralelizovatelnost sfér

Definice

Pokud je $T\mathbb{S}^n$ izomorfní s ε_B^n, nazveme $\mathbb{S}^n$ **paralelizovatelnou**.

Ne každá n-sféra je paralelizovatelná, ale záleží na paritě n. V práci se zbýváme:

- Důkazem toho, že pro sudé $n > 0$ není n-sféra paralelizovatelná. Dokonce platí následující věta:

Věta

Nechť n je sudé, pak neexistuje nikde nenulové vektorové pole na $T\mathbb{S}^n$.

K důkazu této věty používáme prostředky teorie charakteristických tříd, k jejichž zavedení jsou nutné znalosti algebraické topologie jako jsou homotopie a singulární homologie a kohomologie.

Paralelizovatelnost sfér

- Pro n liché lze relativně snadno alespoň jedno všude nenulové vektorové pole zkonstruovat, což si ukážeme v následující kapitole pro $\mathbb{S}^1$.

Paralelizovatelnost sfér

- Pro n liché lze relativně snadno alespoň jedno všude nenulové vektorové pole zkonstruovat, což si ukážeme v následující kapitole pro $\mathbb{S}^1$.
- V práci se zabýváme konstrukcí všude lineárně nezávislých vektorových polí pomocí Cliffordových algeber pro n liché.

Platí dokonce velmi překvapivá věta:

Věta

Napíšeme-li $m = k \cdot 2^{4b+c}$, kde k je liché, $0 \leq c \leq 3$, $b \in \mathbb{Z}$. Označme $n = m - 1$. Pak na $\mathbb{S}^n$ existuje právě $8b + 2^c - 1$ všude lineárně nezávislých vektorových polí.

Paralelizovatelnost sfér a podílové algebry

Věta

$\mathbb{S}^n$ *je paralelizovatelná právě tehdy, když* $n = 0, 1, 3, 7$.

Toto souvisí s existencí podílových algeber $\mathbb{R}^{n+1}$ a s existencí ortogonálního součinu na $\mathbb{R}^{n+1}$. Pro dimenze $n = 0, 1, 3, 7$ máme popořadě algebry $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, kde $\mathbb{H}$ značí kvaterniony a $\mathbb{O}$ značí oktoniony.

Paralelizovatelnost sfér a podílové algebry

Věta

$\mathbb{S}^n$ je paralelizovatelná právě tehdy, když $n = 0, 1, 3, 7$.

Toto souvisí s existencí podílových algeber $\mathbb{R}^{n+1}$ a s existencí ortogonálního součinu na $\mathbb{R}^{n+1}$. Pro dimenze $n = 0, 1, 3, 7$ máme popořadě algebry $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, kde $\mathbb{H}$ značí kvaterniony a $\mathbb{O}$ značí oktoniony.

- Implikace z prava do leva plyne z konstrukce vektorových polí pomocí Cliffordových algeber.

Paralelizovatelnost sfér a podílové algebry

Věta

$\mathbb{S}^n$ je paralelizovatelná právě tehdy, když $n = 0, 1, 3, 7$.

Toto souvisí s existencí podílových algeber $\mathbb{R}^{n+1}$ a s existencí ortogonálního součinu na $\mathbb{R}^{n+1}$. Pro dimenze $n = 0, 1, 3, 7$ máme popořadě algebry $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, kde $\mathbb{H}$ značí kvaterniony a $\mathbb{O}$ značí oktoniony.

- Implikace z prava do leva plyne z konstrukce vektorových polí pomocí Cliffordových algeber.
- Na důkaz opačné implikace jsou potřeba základy K-teorie, jmenovitě H-prostorů, Bottovy periodicity a Hopfova invariantu, na které v práci nejspíše nezbyde místo.

Paralelizovatelnost $\mathbb{S}^1$

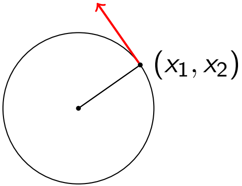
Připomeňme, že $\mathbb{S}^1$ je kružnice v reálné rovině se středem v počátku a poloměrem 1.

Paralelizovatelnost $\mathbb{S}^1$

Připomeňme, že $\mathbb{S}^1$ je kružnice v reálné rovině se středem v počátku a poloměrem 1.
Její tečný prostor je v každém bodě dán směrem tečny. Nyní si zvolme na kružnici libovolný bod a jednu z **orientací** tečny.

Paralelizovatelnost $\mathbb{S}^1$

Připomeňme, že $\mathbb{S}^1$ je kružnice v reálné rovině se středem v počátku a poloměrem 1.
Její tečný prostor je v každém bodě dán směrem tečny. Nyní si zvolme na kružnici libovolný bod a jednu z **orientací** tečny.



Tedy například červenou tečnu délky 1 v bodě (x_1, x_2). Okamžitě vidíme, že směr tečny je dán vektorem $(-x_2, x_1)$. Dostáváme tedy hladké vektorové pole $s((x_1, x_2)) = (-x_2, x_1)$, které je zřejmě hladké a všude nenulové, tedy je $\mathbb{S}^1$ paralelizovatelná.

Souvislost s násobením v $\mathbb{C}$

Nyní uvažme $\mathbb{S}^1$ vnořenou do $\mathbb{C}$ a tedy pro naše vektorové pole bude platit:

$$s(a+bi) = -b + ai = i(a+bi)$$

Souvislost s násobením v $\mathbb{C}$

Nyní uvažme $\mathbb{S}^1$ vnořenou do $\mathbb{C}$ a tedy pro naše vektorové pole bude platit:

$$s(a+bi) = -b + ai = i(a+bi)$$

Tedy naše vektorové pole odpovídá násobení prvkem i.

Souvislost s násobením v $\mathbb{C}$

Nyní uvažme $\mathbb{S}^1$ vnořenou do $\mathbb{C}$ a tedy pro naše vektorové pole bude platit:

$$s(a+bi) = -b + ai = i(a+bi)$$

Tedy naše vektorové pole odpovídá násobení prvkem i. Zobecnění pro $\mathbb{S}^n$ vnořené do $\mathbb{C}^k$, kde $n = 2k-1$, je nasnadě, tj.

$$s((a_1 + b_1 i, \ldots, a_k + b_k i)) = (-b_1 + a_1 i, \ldots, -b_k + a_k i)$$

Souvislost s násobením v $\mathbb{C}$

Nyní uvažme $\mathbb{S}^1$ vnořenou do $\mathbb{C}$ a tedy pro naše vektorové pole bude platit:

$$s(a + bi) = -b + ai = i(a + bi)$$

Tedy naše vektorové pole odpovídá násobení prvkem i. Zobecnění pro $\mathbb{S}^n$ vnořené do $\mathbb{C}^k$, kde $n = 2k - 1$, je nasnadě, tj.

$$s((a_1 + b_1 i, \ldots, a_k + b_k i)) = (-b_1 + a_1 i, \ldots, -b_k + a_k i)$$

Naznačili jsme tedy, že pro sféry liché dimenze dokážeme najít všude nenulové vektorové pole.

Díky za pozornost!