

Domácí úlohy z Úvodu do teorie grup 2019/20

Budou zadány 3 série domácích úkolů každá za 20 bodů. Dalších celkem 40 bodů lze získat za dvě zápočtové písemky. Na získání zápočtu bude třeba získat 50 bodů za 100 možných.

Všechna svá tvrzení pečlivě odůvodňujte.

1. SÉRIE (DO 11.11., 9:05)

1.1. Označme $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +, -, 0)$ grupu racionálních čísel. Dokažte, že $\text{Aut}(\mathcal{Q})$ je izomorfní grupě $(\mathbb{Q}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ a popište množinu $\text{End}(\mathcal{Q}) \setminus \text{Aut}(\mathcal{Q})$. Určete všechny charakteristické a úplně charakteristické podgrupy \mathcal{Q} .

5 bodů

1.2. Nechť \mathcal{G} a \mathcal{H} jsou konečné grupy nesoudělných řádů. Dokažte, že $\text{Aut}(\mathcal{G} \times \mathcal{H})$ je izomorfní $\text{Aut}(\mathcal{G}) \times \text{Aut}(\mathcal{H})$ (všechny operace na kartézských součinech jsou definovány po složkách).

5 bodů

Označme D_{2n} grupu všech symetrií pravidelného n -úhelníku. Grupu D_8 můžeme chápat jako podgrupu S_4 generovanou rotací (1234) a osovou symetrií (13) .

1.3. Najděte všechny podgrupy a všechny normální podgrupy (popište je pomocí generátorů) grupy D_8 a nakreslete diagram inkluzí uspořádané množiny všech podgrup a všech normálních podgrup.

5 bodů

1.4. Dokažte, že $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$ je izomorfní grupě D_8 , kde $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ má aditivní grupovou operaci definovanou po složkách.

5 bodů