Domácí úlohy z Úvodu do teorie grup

2019/20

Budou zadány 3 série domácích úkolů každá za 20 bodů. Dalších celkem 40 bodů lze získat za dvě zápočtové písemky. Na získání zápočtu bude třeba získat 50 bodů za 100 možných. Všechna svá tvrzení pečlivě odůvodňujte.

2. SÉRIE (DO 16.12., 9:05)

Důkazy tvrzení této série můžete čerpat z jakékoli literatury (včetně skript Aleše Drápala), odkazovat se ovšem můžete jen na tvrzení dokázaná na přednášce či na některém z absolvovaných kurzů (například lineární nebo obecné algebry).

$\mathcal{A} := (A, +, -, 0)$ bude ve všech úlohách aditivně zapsaná **konečně generovaná** abelovská grupa (tj. operace $+$ je komutativní a existuje přirozené k a prvky $a_1, \dots, a_k \in A$, pro které $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$). Označme $\mathbb{P}$ množinu všech prvočísel a položme pro $p \in \mathbb{P}$

$$A_{(p)} = \{a \in A \mid \exists k \in \mathbb{N} : p^k \cdot a = 0\}, \quad \tau(A) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a = 0\}$$

tedy $A_{(p)}$ obsahuje právě prvky řádu p^k pro všechna $k \geq 0$ a $\tau(A)$ obsahuje právě prvky konečného řádu. Jestliže $A = A_{(p)}$ pro $p \in \mathbb{P}$, budeme říkat, že $\mathcal{A}$ je *p-grupa*, pokud $\tau(A) = A$ mluvíme o *torzní grupě* a jestliže $\tau(A) = \{0\}$ nazývá se $\mathcal{A}$ *beztorzní grupa.* Je snadné dokázat (a nemusíte to dělat), že $\tau(A)$ a $A_{(p)}$, $p \in \mathbb{P}$, jsou podgrupy abelovské grupy $\mathcal{A}$. Na množině $\mathbb{Z}^n$ uvažujeme grupové operace $+$ a $-$ definované po složkách.

Dokažte následující tvrzení:

2.1. Existuje přirozené n a homomorfismus grupy $\mathbb{Z}^n$ na grupu $\mathcal{A}$. Je-li navíc $\mathcal{A}$ beztorzní, pak existuje izomorfismus $\mathbb{Z}^n \to \mathcal{A}$ pro vhodné nezáporné celé n.

5 bodů

2.2. $A/\tau(A)$ je buď beztorzní nebo nulová a $\mathcal{A} \cong A/\tau(A) \times \tau(A) \cong \mathbb{Z}^k \times \tau(A)$ pro vhodné nezáporné celé k.

5 bodů

2.3. Je-li $\mathcal{A}$ torzní, pak $\mathcal{A} \cong \coprod_{p\in\mathbb{P}} A_{(p)}$, a je-li $\mathcal{A}$ p-grupa, $p \in \mathbb{P}$, pak je direktním součinem cyklických p-grup.

5 bodů

2.4. Existují taková nezáporná celá čísla k, n, prvočísla $p_i \in \mathbb{P}$ a přirozená čísla r_i pro všechna $i = 1, \dots, k$, že $\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}^n \times \coprod_{i=1}^k \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$. Navíc A je konečná, právě když $n = 0$.

5 bodů

Nehodnocený úkol: Rozmyslete si, že jsou grupou $\mathcal{A}$ určeny jednoznačně čísla n, k a až na pořadí všechny hondoty $p_i^{r_i}$.