

# Domácí úlohy z Úvodu do teorie grup 2019/20

*Budou zadány 3 série domácích úkolů každá za 20 bodů. Dalších celkem 40 bodů lze získat za dvě zápočtové písemky. Na získání zápočtu bude třeba získat 50 bodů za 100 možných.*

Všechna svá tvrzení pečlivě odůvodňujte.

## 3. SÉRIE (DO 14.2., 12:00)

**3.1.** Najděte až na izomorfismus všechny semidirektní součiny  $\mathbb{Z}_7 \rtimes S_3$ .

5 bodů

**3.2.** Je-li  $n$  přirozené číslo a  $p$  prvočíslo, dokažte, že

$$\{(l_{ij}) \in GL_n(\mathbb{Z}_p) \mid \forall i : l_{ii} = 1, \forall i, j : i < j \rightarrow l_{ij} = 0\}$$

je Sylowova  $p$ -podgrupa grupy  $GL_n(\mathbb{Z}_p)$  regulárních matic  $n \times n$  nad tělesem  $\mathbb{Z}_p$ .

5 bodů

**3.3.** Je-li  $F(X_i)$  volná grupa s volnou bází  $X_i$  pro  $i = 1, 2$ , dokažte, že  $F(X_1) \cong F(X_2)$ , právě když  $|X_1| = |X_2|$ .

5 bodů

**3.4.** Najděte nějaký homomorfismus  $\varphi$  volné grupy o dvou genátorech  $F(\{x, y\})$  na grupu  $D_8$ . Určete nějakou Schreierovu transversálu a volnou bázi podgrupy  $\text{Ker } \varphi$ .

5 bodů