

Domácí úlohy z Úvodu do teorie grup 2020/21

Budou zadány 4 série domácích úkolů každá za 25 bodů. Na získání zápočtu bude třeba získat 50 bodů za 100 možných.

Všechna svá tvrzení pečlivě odůvodňujte, tvrzení z přednášek i cvičení používejte bez důkazu (ale s jasným odkazem). Řešení v pdf odevzdávejte do SIS.

1. SÉRIE (DO 27.10., 22:00)

1.1. Označme $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +, -, 0)$ grupu racionálních čísel. Dokažte, že $\text{Aut}(\mathcal{Q})$ je izomorfní grupě $(\mathbb{Q}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ a popište všechny prvky $\text{End}(\mathcal{Q})$, které neleží v $\text{Aut}(\mathcal{Q})$ (tj. množinu $\text{End}(\mathcal{Q}) \setminus \text{Aut}(\mathcal{Q})$). Určete všechny charakteristické a úplně charakteristické podgrupy \mathcal{Q} .

6 bodů

1.2. Dokažte, že $\text{Aut}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)$ je izomorfní grupě D_8 , kde $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ má aditivní grupovou operaci definovanou po složkách.

6 bodů

1.3. Popište všechny normální podgrupy symetrických grup S_n (včetně případu $n = 4$).

Hint: Využijte popisu A_n z cvičení, pro výjimečný případ $n = 4$ si všimnete, že $K = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \trianglelefteq S_4$

6 bodů

1.4. Dokažte pro každé $n > 4$ a $j = 3, \dots, n - 1$, že symetrická grupa S_n neobsahuje podgrupu indexu j (tj. $\forall H \leq S_n: [S_n : H] \neq j$).

Hint: Využijte předchozí úlohu a Poznámku 1.5 obdobně jako v důkazu Poznámky 2.3.

7 bodů