OTÁZKY A ÚLOHY KE ZKOUŠCE Z ÚVODU DO TEORIE GRUP

Početní úlohy chápejte jako schémata úloh, u zkoušky se může samozřejmě počítat s jinými hodnotami.

1. Začínáme pěstovat grupy

1.1. Zaveďte relace rmod H a lmod H a dokažte s jejich pomocí Lagrangeovu větu.

1.2. Zkonstruujte prostý homomorfismus grupy $D_{24} \times \mathbb{Z}_{24}$ do nějaké konečné symetrické grupy.

1.3. Popište a určete počet prvků množin $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_3^2)$ a $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3^2)$.

1.4. Popište všechny podgrupy a množiny automorfismů a endomorfismů grupy $\mathbb{Z}_{17}^*$.

1.5. Je-li H vlastní podgrupa A_8, rozhodněte, zda je zobrazení $\tilde{L} : G \to S(G/\mathrm{lmod}\, H)$ dané předpisem $\tilde{L}(g)(aH) = gaH$ prosté. Své tvrzení odůvodněte.

2. Faktorizovat či nefaktorizovat?

2.1. Vyslovte a dokažte Větu o homomorfismu a První větu o izomorfismu pro grupy.

2.2. Vyslovte a dokažte Druhou a Třetí větu o izomorfismu pro grupy.

2.3. V jakém vztahu je centrum grupy G a grupa vnitřních automorfismů grupy G? Své tvrzení dokažte.

2.4. Uveďte tři příklady nekomutativní jednoduché grupy.

2.5. Uveďte příklad nekonečné jednoduché grupy.

3. Cesta do středu grupy

3.1. Definujte charakteristické a úplně charakteristické podgrupy a uveďte v D_{16} tři charakteristické podgrupy (a ověřte to).

3.2. Popište všechny charakteristické a úplně charakteristické podgrupy grup $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_{100}$.

3.3. Spočítejte centrum $Z(Q)$ grupy kvaterninonů $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Rozhodněte, zda je $Z(Q)$ (a) normální, (b) charakteristická, (c) úplně charakteristická podgrupa grupy Q. Svá tvrzení odůvodněte.

3.4. Vyslovte a dokažte tvrzení o centru konečné p-grupy. Je každá konečná p-grupa řešitelná?

3.5. Uveďte (až na izomorfismus) všechny grupy řádu 49.

4. Skládáme grupu: direktní a semidirektní součin

4.1. Zaveďte direktní a semidirektní součin dvou grup. Vyslovte a dokažte tvrzení o tom, kdy je grupa izomorfní semidirektnímu součinu svých podgrup.

4.2. Zaveďte direktní součin dvou grup. Vyslovte a dokažte tvrzení o tom, kdy je grupa izomorfní direktnímu součinu svých podgrup. Kdy direktní součin není kartézským součinem?

4.3. Definujte semidirektní součin a popište až na izomorfismus všechny semidirektní součiny $S_3 \rtimes A_7$. Svá tvrzení odůvodněte.

4.4. Napište S_4 (až na izomorfismus) všemi možnými způsoby jako semidirektní součin $H \rtimes K$. Svá tvrzení odůvodněte.

4.5. Najděte všechny semidirektní součiny $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_6$.

5. Do řady! Po podgrupách nahoru a zase dolů.

5.1. Zkonstruujte horní centrální řadu grupy a ověřte korektnost konstrukce.

5.2. Definujte nilpotentní grupu a rozhodněte, které z grup $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{20})$, S_{20}, D_{20} jsou nilpotentní (a případně určete index nilpotence). Svá tvrzení odůvodněte.

5.3. Definujte řešitelnou grupu a rozhodněte, které z grup $\mathbb{Z}_4$, S_3, $\mathrm{Inn}(S_4)$, D_{12} jsou řešitelné a případně určete stupeň řešitelnosti. Svá tvrzení odůvodněte.

5.4. Charakterizujte řešitelnost grupy pomocí subnormálních řad. Tvrzení dokažte.

5.5. Vyslovte tvrzení o vztahu nilpotentních a řešitelných grup. Tvrzení dokažte.

5.6. Definujte řešitelnou a nilpotentní grupu. Uveďte aspoň tři příklady řešitelných grup, které nejsou nilpotentní.

6. Sylowovy podgrupy - kladivo na konečné grupy

6.1. Zaveďte pojem Sylowovy podgrupy, vyslovte Sylowovy věty a dokažte tvrzení o konjugovanosti podgrupy.

6.2. Zaveďte pojem Sylowovy podgrupy, vyslovte Sylowovy věty a dokažte dvě tvrzení o řádech podgrup.

6.3. Kdy je Sylowova podgrupa normální? Své tvrzení odůvodněte.

6.4. Popište všechny Sylowovy podgrupy grup (a) Z_6, (b) S_6 (c) S_{10}. Svá tvrzení odůvodněte.

6.5. Popište všechny Sylowovy podgrupy grupy $S_3 \times S_4$. Svá tvrzení odůvodněte.

6.6. Definujte pojem Sylowovy podgrupy a rozhodněte, zda grupa S_{100} obsahuje podgrupu řádu 2^{50}. Své tvrzení odůvodněte.

7. Nilpotentní grupy - příběh lásky mezi p-grupami

7.1. Zformulujte aspoň tři podmínky ekvivalentní podmínky nilpotentnce konečné grupy a tvrzení dokažte.

7.2. Vyslovte a dokažte charakterizaci konečných nilpotentních grup pomocí Sylowových podgrup.

7.3. Je konečný direktní součin nilpotentních grup vždy nilpotentní? Je semidirektní součin nilpotentních grup vždy nilpotentní? Svá tvrzení dokažte.

7.4. Popište (až na izomorfismus) všechny Sylowovy podgrupy nilpotentní grupy $\mathcal{G}$, jestliže je řádu 77.

8. Hledá se p-grupa

8.1. Vyslovte a dokažte tvrzení o struktuře konečných abelovských p-grup.

8.2. Najděte až na izomorfismus všechny grupy řádu 155, (51, 39, 34...).

9. Cyklické grupy celého světa, spojte se!

9.1. Vyslovte a dokažte tvrzení o struktuře konečných abelovských grup.

9.2. Vyslovte a dokažte tvrzení o struktuře konečně generovaných abelovských grup.

9.3. Popište (až na izomorfismus) všechny abelovské grupy řádu
(a) 27, (b) 81, (c) 108.

10. Kompoziční řady - jedinečnost až na pořadí

10.1. Zaveďte pojmy jednoduchá grupa, subnormální řada a kompoziční řada. Spočítejte kompoziční řadu grupy S_n pro všechna přirozená n (tvrzení o jednoduchosti grup A_n nedokazujte).

10.2. Co znamená, že jsou dvě řady subnormální řady izomorfní? Vyslovte a dokažte Jordan Hölderovu větu o jednoznačnosti kompozičních řad.

10.3. Najděte všechny kompozičních řady cyklické grupy $\langle g \rangle$ řádu 48.

10.4. Najděte všechny kompozičních řady grupy D_8.

10.5. Najděte nějakou kompoziční řadu grupy D_{40}.

11. Volnost součinů, rovnost homomorfismů, bratrství prezentací

11.1. Definujte volný součin systému grup. Co je redukované slovo? Vyslovte a dokažte univerzální vlastnost volného součinu, tj. tvrzení o existenci a jednoznačnosti homomorfismu do libovolné grupy se systémem daných homomorfismů (tvrzení o unicitě redukovaného slova nemusíte dokazovat).

11.2. Zaveďte pojem volná grupa. Vyslovte a dokažte tvrzení o existenci volných grup s danou volnou bází. Existují dvě neizomorfní volné grupy s volnou bází velikosti 2^{57}?

11.3. Co je prezentace grupy? Najděte nějakou prezentaci grupy $\mathbb{Z}_{50}$.

11.4. Kdy je volná grupa komutativní? Své tvrzení odůvodněte.

12. Schreierova transversála - matka volných podgrup

12.1. Definujte pojem Schreierova transversála. Je-li $\varphi : F(\{x, y\}) \to S_4$ homomorfismus na S_4 určený $\varphi(x) = (12)$, $\varphi(y) = (1234)$, najděte Schreierovu transversálu podgrupy $Ker\ \varphi$.

12.2. Vyslovte a dokažte tvrzení o podgrupě konečného indexu konečně generované grupy.

12.3. Vyslovte a dokažte tvrzení o podgrupách volných grup.

12.4. Je-li $\varphi : F(\{x, y\}) \to S_3$ homomorfismus na S_3 určený $\varphi(x) = (12)$, $\varphi(y) = (123)$, najděte volnou bázi grupy $Ker\ \varphi$.

12.5. Existuje ve volné grupě o dvou generátorech $F(x, y)$ normální podgrupa indexu 126? Je grupa $F(x, y)$ řešitelná? Svá tvrzení odůvodněte.

12.6. Existuje faktor volné grupy o dvou generátorech izomorfní grupě S_6? Své tvrzení odůvodněte.