

## CVIČENÍ Z ÚVODU DO TEORIE GRUP

### Opakování:

- (1) Popište všechny podgrupy a množiny automorfismů a endomorfismů grupy  
(a)  $\mathbb{Z}_{50}$  (b)  $\mathbb{Z}_{23}^*$ .
- (2) Popište všechny podgrupy grupy  $\mathbb{Z}_3^3$ .

6.10.

### 2. PERMUTAČNÍ GRUPY

**2.1.** Nechť  $\pi, \sigma \in S_n$ .

- (a) Dokažte, že  $\pi\sigma = \sigma\pi$ , právě když  $\pi^\sigma = \pi$ ,
- (b) spočítejte  $\pi^\sigma$  pro  $\pi = (134)(58)(279)$  a  $\sigma = (17)(24)(39)(58)$  a rozhodněte, zda  $\pi\sigma = \sigma\pi$ .

**2.2.** Dokažte, že

- (a)  $S_n = \langle \{(ij) \mid i < j, i, j \in \{1, \dots, n\}\} \rangle$ ,
- (b)  $S_n = \langle (12), (23), \dots, (n-1 n) \rangle$ ,
- (c)  $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$ ,

**2.3.** Dokažte, že je alternující grupa  $A_n$  pro všechna  $n \geq 3$  generovaná trojcykly.

**2.4.** Nechť  $n \geq 5$  a  $N$  je normální podgrupa alternující grupy  $A_n$ . Dokažte, že  $N = A_n$ , pokud

- (a)  $N$  obsahuje nějaký trojcyklus,
- (b)  $N$  obsahuje permutaci, která má v cyklickém zápisu cyklus délky aspoň 4,
- (c)  $N$  obsahuje permutaci, která má v cyklickém zápisu právě jeden trojcyklus,
- (d)  $N$  obsahuje permutaci, která má v cyklickém zápisu aspoň dva trojcykly,
- (e)  $N$  obsahuje permutaci, která má v cyklickém zápisu nějaký dvojcyklus.

**2.5.** Dokažte, že je grupa  $A_n$  pro všechna  $n \neq 1, 2, 4$  jednoduchá.