# CVIČENÍ Z ÚVODU DO TEORIE GRUP

**Opakování:**

(1) Najděte všechny permutace $\sigma \in A_8$ $((123)(45)(67))^\sigma = (18)(237)(56)$
(2) Spočítejte velikost třídy konjugace $\{((13)(467))^\sigma \mid \sigma \in S_7\}$.

## 3. Normální a charakteristické podgrupy

**3.1.** Nechť $\mathcal{A} = (A, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa a nechť $N \trianglelefteq A$ a $H \leq A$. Dokažte, že $H \cap N \trianglelefteq H$.

**3.2.** Definujme podgrupu $A = \bigcup_n A_n$ grupy $S(\mathbb{N})$, kde $A_n$ chápeme jako podgrupy $S(\mathbb{N})$. Dokažte, že je grupa $A$ nekonečná jednoduchá.

**3.3.** Nechť $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa a $X \subseteq G$ množina jejích generátorů, tj. $G = \langle X \rangle$ Dokažte, že $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg\ \forall g \in X\}$.

Připomeňme, že $D_{2n}$ je grupa všech symetrií pravidelného n-úhleníku a že pro rotaci $r$ u úhel $\frac{2\pi}{n}$ a osovou symetrii $o$ platí

$$D_{2n} = \langle r, o \rangle \cong \langle (1\ 2\ 3\ \ldots\ n-1\ n), (2\ n)(3 n-1)\ldots \rangle \leq S_n.$$

**3.4.** Nechť $r$ je rotace u úhel $\frac{2\pi}{n}$ a $o$ osovou symetrii . Označme $H := \langle r \rangle \leq D_{2n}$. Dokažte, že

(a) $[D_{2n} : H] = 2$ a $H \trianglelefteq D_{2n}$,
(b) $oho^{-1} = oho = h^{-1}$ pro každé $h \in H$,
(c) jestliže $K \leq H$, pak $K \trianglelefteq D_{2n}$,
(d) spočítejte centrum grupy $D_{2n}$ pro $n \geq 3$.

*Date*: 16. října 2020.