11. Algebrou za příjemnější 11. (i 12.) cvičení

Akce (neboli působení) grupy na množině

Orbity & stabilizátory

1. Uvažujte působení eukleidovské grupy $\mathbf{E}_2$ na množině $\mathbb{R}^2$.

   (a) Která zobrazení obsahuje podgrupa $(\mathbf{E}_2)_x$ pro daný bod x? [pro $x = [0;0]$ jde o $\mathbf{O}_2$; pro obecný bod pak o rotace se středem v x a rotace okolo v x složené s reflexí okolo osy procházející počátkem a bodem x.]

   (b) Určete, které prvky patří do $\mathbb{R}^2_g$, kde $g \neq \mathrm{id}$ je
   (i) translace (ii) rotace (iii) reflexe. [i. $\emptyset$ ii. počátek iii. body na ose reflexe]

2. Uvažujte působení grupy $G = \mathbb{S}_n$ na množině $\{(a,\, b) : 1 \leq a, b \leq n\}$, přičemž permutace π působí po složkách, tj. $\pi((a,b)) = (\pi(a), \pi(b))$.

   (a) Kolik má toto působení orbit a jak jsou velké?
   [2 orbity: $n(n-1)$-prvková orbita prvků tvaru (a,b) pro $a \neq b$, n-prvková orbita prvků tvaru (a,a)]

   (b) Jak vypadají stabilizátory $G_{(1,1)}$, resp. $G_{(1,2)}$ a jaký mají index? [$G_{(1,1)} = \{\pi \in \mathbb{S}_n \mid \pi(1) = 1\} \simeq \mathbb{S}_{n-1}$, $G_{(1,2)} = \{\pi \in \mathbb{S}_n \mid \pi(1) = 1 \,\&\, \pi(2) = 2\} \simeq \mathbb{S}_{n-2}$ (pozor, že jde o izomorfismy, nikoli o rovnosti!)]

3. Uvažujte působení grupy $\mathbf{D}_{22}$ na množině X všech náhrdelníků sestavených ze 4 zelených, 4 žlutých a 3 červených kuliček (formálně je X množina všech obarvení vrcholů pravidelného 11-úhelníka zadaným způsobem). Existuje v X

   (a) dvouprvková (b) čtyřprvková (c) jedenáctiprvková

   orbita? [(a) ne (b) ne (c) ano (červené u sebe a po jejich jedné straně dva zelené a dva žluté vždy u sebe, ne druhé straně symetricky)]

4. Ukažte, že konjugaci lze interpretovat jako působení grupy na její vlastní nosné množině, kde prvek g působí jako $g(x) = gxg^{-1}$. Pro grupu $\mathbb{S}_4$ vypište orbity a pro každou orbitu určete stabilizátor nějakého jejího prvku.

   [zobrazení $g \mapsto g \cdot - \cdot g^{-1}$ je opravdu homomorfismus;

orbita	stabilizátor
$(\bullet\ \bullet\ \bullet\bullet)$	$G_{(1234)} = \langle(1\,2\,3\,4)\rangle$
$(\bullet\ \bullet\ \bullet)$	$G_{(123)} = \langle(1\,2\,3)\rangle$
$(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$	$G_{(12)(34)} = \langle(1\,3\,2\,4)\rangle \cup (12)\,\langle(1\,3\,2\,4)\rangle$
$(\bullet\bullet)$	$G_{(12)} = \{(1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4), id\}$
id	$G_{id} = \mathbb{S}_4$

   ]

Burnsideova věta

5. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ určete, kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu n barvami (až na orotování čtyřstěnu). Předpokládáme, že α) každou stěnu barvíme celistvě právě jednou barvou (tedy žádné puntíky či proužky), β) různé stěny mohou mít totožné barvy a γ) není nutné použít barvy všecky. [$\frac{n^4+11n^2}{12}$]

6. Dětská stavebnice obsahuje 8 červených a 8 modrých dílků ve tvaru rovnostranného trojúhelníka. Kolika způsoby z nich lze sestavit velký rovnostranný trojúhelník o čtyřnásobné hraně

   (a) až na otočení? [$\frac{1}{3}\binom{16}{8}$]

   (b) až na otočení a převrácení podél (některé) výšky? [$\frac{1}{6}[\binom{16}{8} + 3[\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} + \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{4}]]$]

7. Anička chce pro každého ze svých 506 facebookových přátel vytvořit podobný (ale ne stejný) odznáček, rozhodne se proto pro následující návrh: rozdělí kruh na 12 stejných výsečí a každou výseč obarví. Kolik minimálně barev musí použít, aby splnila, co si předsevzala, předpokládáme-li, že dva odznáčky jsou různé, nelze-li jeden získat z druhého pootočením? [pro n barev máme $\frac{n^{12}+n^6+2n^4+2n^3+2n^2+4n}{12}$ různých obarvení, takže alespoň 3]

Symetrie geometrických objektů

8. Popište prvky grupy rotací

   (a) čtyřstěnu [$\mathbb{A}_4$] (b) osmistěnu [$\mathbb{S}_4$] (c) dvanáctistěnu [$\mathbb{A}_5$]

   (pečlivě argumentujte, proč jste našli všechny rotace) a určete, kterým známým grupám jsou izomorfní.

9. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najděte nějakou množinu $X_n \subseteq \mathbb{R}^2$ takovou, že $\mathbf{Sym}(X_n) \simeq \mathbb{Z}_n$. [možné příklady: $n = 1$: znak **2** umístěný kdekoli v rovině; $n = 2$: písmeno **T** umístěné svislou čarou v počátku (písmeno **H** by ale neprošlo); $n = 3$ rovnostranný trojúhelník se středem v počátku, jehož hrany jsou tvořeny šipkami směřujícími po/proti směru hodinových ručiček (bez šipek by opět neprošel); není to náhodou obecný návod?]

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc:

10. Uvažujte působení grupy $\mathbb{S}_n$ na množině $\{(a_1, \ldots, a_k) \mid 1 \leq a_i \leq n\}$, přičemž permutace π působí po složkách. Dokažte, že počet orbit je roven počtu ekvivalencí na k-prvkové množině. [Je-li E ekvivalence na $\{1 \ldots k\}$, pak pro rozkladovou třídu prvku $[c]_E = \{c_1 < \ldots < c_m\}$ dejme v prvku $(a_1, \ldots, a_k)$ na místa s indexy $\{c_1, \ldots, c_m\}$ číslo c_1; snadno (haha) se již rozmyslí, že takto je definována bijekce mezi ekvivalencemi a orbitami tohoto působení.]

11. Uvažujme působení grupy $\mathbb{A}_5$ na množinu $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$, kteréžto působení je opět definováno po složkách, tj. vztahem
$$\pi(k, l, m) = (\pi(k), \pi(l), \pi(m)) \text{ pro každé } \pi \in \mathbb{A}_5.$$
    Určete počet orbit tohoto působení a nějakou množinu reprezentantů těchto orbit.

    [5 orbit; reprezentanti např. $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3)$]

12. Kolik různých náhrdelníků lze sestavit ze šesti černých a tří žlutých korálků, použijeme-li vždy všech devět? (Předpokládáme, že máme k dispozici potřebné propriety jako šňůrku apod.) [7]

13. Uvažujte grupu G řádu p^k (p prvočíslo). Dokažte, že existuje prvek $a \in G$ různý od jednotky, který komutuje se všemi ostatními prvky. (Návod: použijte působení G na G konjugací, rozmyslete si, co znamenají jednoprvkové orbity a použijte stejný trik jako v důkazu Cauchyovy věty.)