7 Z pralesa těles do oceánu grup

Zadání
Cvičení 3. a 4. dubna, verze ze dne 18. dubna 2024.

Cíle cvičení: Dnes si uvědomíme, že kořenová a rozkladová nadtělesa můžeme hledat nejen pomocí faktorizace, nýbrž i jako podtělesa vhodných větších (nejlépe algebraicky uzavřených) těles. Všimneme si toho, že mezi oběma konstrukcemi najdeme izomorfismus, což, jak se později ukáže, vůbec není náhoda. A poté se střemhlav vrhneme do teorie grup a na začátek se ponoříme do struktury grupy z nejspletitějších, jíž je grupa permutací.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 7.1. Napište všechna kořenová a rozkladová nadtělesa nad tělesem $\mathbb{Q}$ obsažená v $\mathbb{C}$ následujících polynomů z $\mathbb{Q}[x]$:

(a) $x^2 - 2$,

(b) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$.

Úloha 7.2. Dokažte, že jsou izomorfní páry těles

(a) $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^3 - 2)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,

(b) $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^2 - 3)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$,

(c) $\mathbb{R}[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 2)$ a $\mathbb{C}$.

Úloha 7.3. Zapište následující permutace jako součin nezávislých cyklů a pro každou permutaci σ určete σ^{-1} a σ^{2020}:

(a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_5$,

(b) $\tau = (4\,6\,5\,1\,2) \in \mathbf{S}_6$,

(c) $\sigma = (1\,5\,6)(2\,3\,8\,4\,7) \in \mathbf{S}_8$,

(d) $\rho = (4\,3\,5) \circ (5\,1\,2) \in \mathbf{S}_5$.

Úloha 7.4. Buďte $\pi, \tau \in \mathbf{S}_n$.

(a) Ukažte, že je-li v cyklickém zápisu permutace π prvek b hned po prvku a, pak je v cyklickém zápisu permutace $\sigma = \tau\pi\tau^{-1}$ prvek $\tau(b)$ hned po prvku $\tau(a)$,

(b) určete $\pi\tau\pi^{-1}$ a $\tau\pi\tau^{-1}$ pro permutace π a τ z příkladu 7.3.

Připomeňme, že operaci $\pi^\tau = \tau\pi\tau^{-1}$ se říká *konjugace prvku* π *prvkem* τ a prvek π^τ je pak s prvkem π *konjugovaný*.

Úloha 7.5. Ověřte, že je relace „být konjugovaný s“ ekvivalence.

A nakonec ještě trochu počítání pro radost a povzbuzení:

Úloha 7.6. Je-li $m \in \mathbb{Q}[x]$ ireducibilní polynom a $\beta \in \mathbb{C}$ jeho komplexní kořen, dokažte, že jsou tělesa $\mathbb{Q}[\alpha]/(m(\alpha))$ a $\mathbb{Q}(\beta)$ izomorfní.

Úloha 7.7. Napište jako rozšíření $\mathbb{Q}$ v tělese $\mathbb{C}$ rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$.

Úloha 7.8. Najděte všechny permutace α na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, pro něž platí $\alpha \circ (1\,2\,3) \circ \alpha^{-1} = (1\,2\,4)$.

Úloha 7.9. Je-li $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, určete počet prvků množiny všech permutací $\alpha \in \mathbf{S}_5$,

(a) které jsou konjugované s permutací π,

(b) pro něž $\alpha\pi = \pi\alpha$.

Tvoří tyto množiny podgrupu $\mathbf{S}_5$?

Úloha 7.10. Kolik ekvivalenčních tříd má ekvivalence „být konjugovaný“ na grupě $\mathbf{S}_6$?

Úloha 7.11. Uvnitř tělesa $T = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^4 + \alpha + 1)$ nalezněte kořenové nadtěleso polynomu $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.