Teorie čísel: Cvičení 3 – výsledky, nápovědy, vzorová řešení

Simona Hlavinková, e-mail: simonkahlavinkova@gmail.com

Nápovědy:

-2.–6. Postupujte podobně jako v příkladech předvedených na cvičení.

7. Správnost řešení si samozřejmě snadno ověříte pomocí nějakého softwaru – existuje i dost online nástrojů.

8. Buď využijte nějakou rovnost z přednášky, která obsahuje p_n, q_n, p_{n+1} a q_{n+1}, nebo indukcí dokažte tvrzení (zjevně ekvivalentní tomu, co potřebujete), že když budete konečný řetězový zlomek vyčíslovat „odspoda" (tak, jak se složené zlomky normálně vyčíslují), budete ho vždy dostávat v základním tvaru.

9. Nápověda už je obsažená v zadání, ne?

10. Hrubý postup byl naznačený na přednášce a je k nalezení ve skriptech v sekci 2.7.

11. Část a) se dá udělat přímo tím, že si člověk napíše patřičnou rovnost, zjistí, jakou kvadratickou rovnici musí číslo řešit, a následně položí koeficient u x roven jedné. (Ani to není úplně triviální.) Možná jde část d), tj. většinu věty 2.15 ze skript, dokázat i snáz, ale já znám důkaz založený na následujícím tvrzení *(které rozhodně nemusíte znát)*. Pro algebraické číslo ζ stupně 2 označme jeho sdružený kořen η. Řekneme, že ζ je *redukované*, pokud $\zeta > 1$ a $\eta \in (-1, 0)$.

    Věta (asi Galois). *Řetězový zlomek ζ je čistě periodický právě tehdy, když je ζ redukované. Navíc je v takovém případě redukované i $-1/\eta$ a příslušné periody jsou vůči sobě obrácené, tj. když $\zeta = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_m}]$, tak $-1/\eta = [\overline{a_m, \ldots, a_1, a_0}]$.*

Výsledky:

-2. $[1, \overline{2}]$, sblížené zlomky 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$

-1. $\frac{5+\sqrt{285}}{10}$

0. $\sqrt{k^2 + 2k}$

1. $n = 3$: $[1, \overline{1, 2}]$, 1, 2, $\frac{5}{3}$
   $n = 11$: $[3, \overline{3, 6}]$, 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{63}{19}$
   $n = 13$: $[3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$, 3, 4, $\frac{7}{2}$

2. $[\overline{1}]$

3. a) $\frac{5+\sqrt{13}}{6}$
   b) $\frac{-7+\sqrt{87}}{2}$
   c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

4. a) $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$
   b) $\frac{2-k+\sqrt{k^2+2k}}{2}$

5. $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, kde F_n je Fibonacciho posloupnost začínající $F_0 = F_1 = 1$. (Obecně jmenovatel i čitatel splňuje rekurentní vzorec $a_{n+2} = ka_{n+1} + a_n$, odkud lze případně určit i explicitní vzorec. Posloupnost odpovídající $k = 2$ se nazývá Pellova čísla.)

6. a) $[k, \overline{2k}]$
   b) $[k - 1, \overline{1, 2k - 2}]$