I. Vyjádřete primitivní funkce pomocí elementárních funkcí na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3 + 2x + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

5. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$

10. $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **11.** $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int \arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

15. $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$ **18.** $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^3)}$

21. $\int \frac{x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ **22.** $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ **23.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x\log\log x}$ **24.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ **25.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ **26.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$

27. $\int \log x\,\mathrm{d}x$ **28.** $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **29.** $\int \frac{\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x$ **30.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a,b\in\mathbb{R}$ **31.** $\int x^\alpha\log x\,\mathrm{d}x$

32. $\int x^3\log^2 x\,\mathrm{d}x$ **33.** $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **34.** $\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. Výsledky jsou uvedeny „až na konstantu“. **1.** $\frac14 x^4 + x^2 + 16\log|x|$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **2.** $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3.** $-\frac14(1-3x)^{\frac43}$, na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac92\sqrt[3]{x^2} + \frac95 x^{\frac53} - \frac38 x^{\frac83}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **5.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$ **6.** $\frac18\sin^8 x$ na $\mathbb{R}$ **7.** $-\frac12 e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ **8.** $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **9.** $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **10.** $\frac14|x|\cdot x^3$, na $\mathbb{R}$ **11.** $\sin\left(x - \pi\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac12\right]\right) + 2\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac12\right]$, na $\mathbb{R}$ **12.** $F(x) =$

$$\begin{cases} 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[-\infty,-x_2] \\ -\pi(x+x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{8}{\pi}x_1) & x\in[-x_2,-x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x\in[-x_1,x_1] \\ \pi(x-x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{8}{\pi}x_1) & x\in[x_1,x_2] \\ 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[x_2,\infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2 = \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{array}, \text{ na } \mathbb{R}$$

13. $\frac{-10\cdot 5^{-x}\log 2 + 2^{-x}\log 5}{5\log 5\log 2}$, na $\mathbb{R}$ **14.** $\frac12 e^{2x} - e^x + x$, na $\mathbb{R}$ **15.** $\operatorname{tg} x - x$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **16.** $-\operatorname{cotg} x - x$, na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **17.** $\frac{1}{\sqrt6}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt6}{2}$, na $\mathbb{R}$ **18.** $\frac{x}{2} - \frac14\sin 2x$, na $\mathbb{R}$ **19.** $\frac38 x + \frac38\sin x\cos x + \frac14\sin x\cos^3 x$, na $\mathbb{R}$ **20.** $\frac13\operatorname{tg}(x^3)$, na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi})$, $k\in\mathbb{Z}$ **21.** $\frac18\log(1+4x^2)$, na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac12\operatorname{arctg}(x^2)$, na $\mathbb{R}$ **23.** $\log|\log\log x|$, na $(1,e)$ a na (e,∞) **24.** $\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **25.** $-\log\left|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\right|$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **26.** $(x-1)e^x$ na $\mathbb{R}$ **27.** $x\log x - x$ na $(0,\infty)$ **28.** $x\operatorname{arctg} x - \frac12\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **29.** $-\frac12 e^{-x}\cdot(\sin x+\cos x)$, na $\mathbb{R}$ **30.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx + b\sin bx)$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2+b^2\neq 0$; x na $\mathbb{R}$, pokud $a=b=0$ **31.** $\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\cdot\left(\log x - \frac{1}{1+a}\right)$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha\neq 1$; $\frac12\ln^2 x$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha=-1$ **32.** $\frac14 x^4\ln^2 x - \frac18 x^4\ln x + \frac{1}{32}x^4$, na $(0,\infty)$ **33.** $2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)$, na $(0,\infty)$ **34.** $x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$, na $\mathbb{R}$

II. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int \frac{x^{17}-5}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ pomocí $x=\operatorname{tg} y$ **7.** $\int \frac{x^8+x-1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3x+4)^2}$
9. Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c\in\mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$? **10.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **11.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **12.** $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **13.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$
14. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int \frac{\exp x}{\exp x+1}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ **18.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$
19. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int \frac{(2x+3)\ \mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$ **21.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ **22.** $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
23. $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ **24.** $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ **25.** $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}$ **26.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$
27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$ **28.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$ **29.** $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **30.** $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$
31. $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ **32.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ **33.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon>0$ **34.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Výsledky a návody. **1.** $\left(\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}\right)-4\log|x-1|$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **2.** $\left(\sum_1^{8}\frac{1}{2k}x^{2k}\right)-2\log|x-1|+3\log|x+1|$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **3.** $x+\frac16\log|x|-\frac92\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,2)$ nebo $x\in(2,3)$ nebo $x\in(3,+\infty)$ **4.** $\frac16\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **5.** $\frac{\sqrt2}{8}\log\frac{x^2+x\sqrt2+1}{x^2-x\sqrt2+1}+\frac{\sqrt2}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt2+1)+\frac{\sqrt2}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt2-1)$ **6.** $\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac12\operatorname{arctg}x$ **7.** $\frac13x^3+\frac16\log(1+x^2)+\frac{\sqrt3-1}{2}\log(x^2-x\sqrt3+1)-\frac{\sqrt3+1}{2}\log(x^2+x\sqrt3+1)-\frac{3-\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt3)-\frac{3+\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt3)$ **8.** $\frac17\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+4}+\frac{4\sqrt7}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt7}$ **9.** $a+2b+3c=0$ **10.** $6\Big(\frac19u^{(3/2)}-\frac18u^{(4/3)}+\frac17u^{(7/6)}-\frac16u+\frac15u^{(5/6)}-\frac14u^{(2/3)}\Big)$, kde $u=x+1$, $x\in(-1,+\infty)$ **11.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-1,1)$ **12.** $\log\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}-\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt3}+\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt3}$, kde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **13.** $t=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ **14.** $t=\sqrt[6]{x+1}$ **15.** $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **16.** $\log(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **17.** $e^x-\log(1+e^x)$ **18.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ **19.** $\frac12(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x\in(-\infty,1-\sqrt2)$ nebo $x\in(1+\sqrt2,+\infty)$ **20.** $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2}+\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt2}$, kde $t=\sqrt{x^2+2x+4}-x$, $x\in\mathbb{R}$ **21.** $\operatorname{argsinh}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac12x\sqrt{x^2-1}-\frac12\log|x+\sqrt{x^2-1}|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(1,+\infty)$ **23.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac12\arcsin x$ na $(-1,1)$ **24.** $\frac12\operatorname{arctg}\sin^2 x$ **25.** a **26.** substituce $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **27.** substituce $y=\operatorname{tg}x$ **28.** substituce $y=\cos x$ **29.** substituce $y=\operatorname{tg}x$ **30.** substituce $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **31.** a **32.** substituce $y=\operatorname{tg}x$ **33.** substituce $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **34.** substituce $y=\operatorname{tg}x$

III. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností

1. $x^{n+1}-x^{n-1}$, $x\in\langle 0,1\rangle$, **2.** x^n-x^{3n}, $x\in\langle 0,1\rangle$ **3.** $\frac{1}{x+n}$ a) $x\in(0,+\infty)$, b) $x\in\mathbf{R}$ **4.** $\frac{nx}{1+n+x}$, $x\in\langle 0,1\rangle$ **5.** $\frac{x^n}{1+x^n}$, *a)* $x\in\langle 0,1-\varepsilon\rangle$, *b)* $x\in\langle 1-\varepsilon,1+\varepsilon\rangle$, *c)* $x\in\langle 1+\varepsilon,+\infty)$, kde $\varepsilon\in(0,1)$ **6.** $\frac{2nx}{1+n^2x^2}$, *a)* $x\in\langle 0,1\rangle$, *b)* $x\in(1,+\infty)$ **7.** $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x\in\mathbf{R}$ **8.** $\frac{\sin nx}{n}$, $x\in\mathbf{R}$, **9.** $\sin\frac{x}{n}$, $x\in\mathbf{R}$. **10.** $n\cdot\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, $x\in\langle 0,\infty)$

11. Nechť $f_n\rightrightarrows f$ na M a $g_n\rightrightarrows g$ na M. Platí (a) $f_n+g_n\rightrightarrows f+g$ na M; (b) $f_n\cdot g_n\rightrightarrows f\cdot g$ na M; (c) $\frac{f_n}{g_n}\rightrightarrows\frac{f}{g}$ na M?

Výsledky a návody. **1.** $f_n\rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1\rangle$ **2.** $f_n\to 0$ na $\langle 0,1\rangle$, stejnoměrně na $\langle 0,1-\varepsilon\rangle$ pro $\varepsilon\in(0,1)$, na žádném $\langle 1-\varepsilon,1\rangle$ konvergence není stejnoměrná. **3.** $f_n\to 0$ na $\mathbf{R}$, stejnoměrně na (k,∞) pro každé $k\in\mathbf{R}$, na žádném $(-\infty,k)$ konvergence není stejnoměrná. **4.** $f_n\rightrightarrows x$ na $\langle 0,1\rangle$ (dokonce na $\langle 0,k\rangle$ pro $k\in(0,\infty)$, ale ne na okolí $+\infty$. **5.** $f_n(x)\to\begin{cases}0 & x\in\langle 0,1)\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$, a) stejnoměrně, b) nestejnoměrně, c) stejnoměrně. **6.** $f_n\to 0$ na $\mathbf{R}$, stejnoměrně na $\langle\varepsilon,\infty\rangle$ pro $\varepsilon>0$, nestejnoměrně na $\langle 0,\varepsilon\rangle$. **7.** $f_n\rightrightarrows|x|$ na $\mathbf{R}$ **8.** $f_n\rightrightarrows 0$ na $\mathbf{R}$ **9.** $f_n\to 0$ na $\mathbf{R}$, stejnoměrně na omezených intervalech, nestejnoměrně na okolích $\pm\infty$. **10.** $f_n(x)\to\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x>0\end{cases}$, stejnoměrně na $\langle\varepsilon,\infty\rangle$, $\varepsilon>0$, nikoli na $\langle 0,\varepsilon\rangle$. **11.** (a) ANO. (b) NE. Například $f_n(x)=g_n(x)=x+\frac{1}{n}$ na $\mathbf{R}$. Tvrzení však platí, jsou-li f a g omezené na M. (c) NE (ani za předpokladu, že všechny podíly mají smysl). Například $f_n(x)=1$, $g_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{n}$ na $(0,+\infty)$. Tvrzení však platí, jsou-li funkce f a $\frac{1}{g}$ omezené na M.

IV. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řad

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx}{1+k^5x^2}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+2^k}$ **5.** $\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+k^3}$ **6.** $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\sin x}$ **7.** $\sum_{k=1}^{\infty}2^k\sin\frac{1}{3^kx}$ **8.** * $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ **9.** * $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$ **10.** * $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin kx}{\sqrt{k+x}}$

11. * $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}\operatorname{arctg}(kx+k)$

12. Spočtěte limity: (a) $\lim\limits_{x\to 1-}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot\frac{x^k}{x^k+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1-}\sum_{k=1}^{\infty}(x^k-x^{k+1})$ (c) $\lim\limits_{x\to 0+}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^kk^x}$

13. Platí $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$, jestliže (a) $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$, (b) $f_n(x)=nx(1-x)^n$, (c) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^3x^2}$? Jak je to se stejnoměrnou konvergencí f_n na $(0,1)$?

14. Dokažte, že funkce $\zeta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$ má na intervalu $(1,\infty)$ derivace všech řádů.

15. Nechť $\mathbf{a}=\{a_k\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Položme $\zeta_{\mathbf{a}}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k^x}$. Co lze říci o definičním oboru, spojitosti a derivacích funkce $\zeta_{\mathbf{a}}$? (*Jak je to v případě, že $\mathbf{a}=\{a_k\}$ je posloupnost reálných, ne nutně nezáporných čísel?)

16. Nechť $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k^p+x^2k^q}$, kde $p,q\geq 0$. Dokažte, že
(i) f je spojitá na $(0,\infty)$, pokud $\max(p,q)>1$, (ii) f je spojitá na $\mathbb{R}$, pokud $p+q>2$.
(iii) Vyšetřete definiční obor a spojitost f v závislosti na p,q.

17. V kterých bodech má derivaci funkce (a) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}$ (b) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|}{k^2+x^2}$

18. * Dokažte, že $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^3}$ má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou f'' na $(0,2\pi)$.

Výsledky a návody. **1.** Konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$ (totéž platí pro řadu absolutních hodnot, lze použít Weierstrassovo kritérium). **2.** Konverguje bodově na $\mathbf{R}$ (absolutně). Konvergence je stejnoměrná na omezených intervalech (Weierstrassovo kritérium), není omezená na okolích $+\infty$ a $-\infty$ (nutná podmínka). **3.** Konverguje bodově na množině $M = \{x \in \mathbf{R}; -x \notin \mathbf{N}\}$ (neabsolutně), v ostatních bodech nemá smysl. Konvergence je stejnoměrná na $(K, +\infty) \cap M$ pro každé $K \in \mathbf{R}$ (Leibnizovo kritérium), není stejnoměrná na $(-\infty, K) \cap M$ (nutná podmínka). **4.** Konverguje bodově na množině $M = \{x \in \mathbf{R}; x \neq -2^k \text{ pro } k \in \mathbf{N}\}$ (absolutně), v ostatních bodech nemá smysl. Konvergence je stejnoměrná na $(K, +\infty) \cap M$ pro každé $K \in \mathbf{R}$ (Weierstrassovo kritérium), není stejnoměrná na $(-\infty, K) \cap M$ (nutná podmínka). **5.** Konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$ (totéž platí pro řadu absolutních hodnot, lze použít Weierstrassovo kritérium). **6.** Konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$ (neabsolutně, Leibnizovo kritérium). **7.** Konverguje bodově na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (absolutně). Konvergence je stejnoměrná na $\mathbf{R} \setminus \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ pro $\varepsilon > 0$ (Weierstrassovo kritérium), není stejnoměrná na $(-\varepsilon, 0)$ ani na $(0, \varepsilon)$ (nutná podmínka). **Poznámka:** V dalších příkladech se používá i Dirichletovo a Abelovo kritérium a odhady $|\sum_{k=1}^n \sin kx| \leq \frac{1}{2|\sin\frac{x}{2}|}$ a $|\sum_{k=1}^n \cos kx| \leq \frac{1}{2|\sin\frac{x}{2}|}$ pro $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. **8.** Konverguje bodově na $\mathbf{R}$ (pro $x = k\pi$ je to zřejmé, pro ostatní to plyne z Dirichletova kritéria). Konvergence je stejnoměrná na intervalech $(2k\pi + \varepsilon, (2k+2)\pi - \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$ (Dirichletovo kritérium), není stejnoměrná na $(2k\pi, 2k\pi + \varepsilon)$ ani na $(2k\pi - \varepsilon, 2k\pi)$ pro $\varepsilon > 0$ (Bolzano-Cauchyova podmínka). **9.** Konverguje bodově na $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$ (Dirichletovo kritérium, divergence v bodech $2k\pi$ je důsledkem divergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$). Konvergence je stejnoměrná na intervalech $(2k\pi + \varepsilon, (2k+2)\pi - \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$ (Dirichletovo kritérium), není stejnoměrná na $(2k\pi, 2k\pi + \varepsilon)$ ani na $(2k\pi - \varepsilon, 2k\pi)$ pro $\varepsilon > 0$ (věta o záměně limit). **10.** Konverguje stejnoměrně na $(-1, +\infty)$ (Dirichletovo kritérium), pro $x \leq -1$ nemá smysl. **11.** Konverguje bodově na $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$ (Dirichletovo a Abelovo kritérium, divergence v bodech $2k\pi$ je důsledkem divergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$). Konvergence je stejnoměrná na intervalech $(2k\pi + \varepsilon, (2k+2)\pi - \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$ (Dirichletovo a Abelovo kritérium), není stejnoměrná na $(2k\pi, 2k\pi + \varepsilon)$ ani na $(2k\pi - \varepsilon, 2k\pi)$ pro $\varepsilon > 0$ (věta o záměně limit). **12.** (a) Limita je $\frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2} \log 2$ (řada konverguje stejnoměrně na $\langle 0, +\infty)$ podle Abelova kritéria). (b) Limita je 1 (lze spočítat elementárně, nelze přehodit limitu a sumu, řada nekonverguje stejnoměrně na $(1 - \varepsilon, 1)$). (c) Limita je 1 (řada konverguje stejnoměrně například na $(-1, +\infty)$). **13.** (a) $f_n \to 0$ na $\mathbf{R}$, konvergence není stejnoměrná na $(0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$. (b) $f_n \to 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$, konvergence není stejnoměrná na $(0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$. (c) $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0, 1)$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$. **14.** Dokažte pomocí Weierstrassova kritéria, že řada n-tých derivací konverguje lokálně stejnoměrně na $(1, +\infty)$ pro všechna n. **15.** Definiční obor je buď $\emptyset$, nebo interval $(\alpha, +\infty)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbf{R}$, nebo interval $\langle \alpha, +\infty)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbf{R}$, nebo $\mathbf{R}$. Funkce je spojitá na svém definičním oboru. Pro $x \in (\alpha, +\infty)$ (je-li definiční obor $(\alpha, +\infty)$ nebo $\langle \alpha, +\infty)$) nebo pro $x \in \mathbf{R}$ (je-li definiční obor $\mathbf{R}$) má funkce $\zeta_{\mathbf{a}}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ vlastní n-tou derivaci $(\zeta_{\mathbf{a}})^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_k \log^n k}{k^x}$. Je-li definiční obor $\langle \alpha, +\infty)$, pak n-tá derivace zprava v bodě α je dána týmž vzorcem, pokud ovšem řada ve vzorci konverguje (což může a nemusí být pravda). Použije se Weierstrassovo kritérium (a věty o záměně limit a derivací atp.). Pro obecný případ platí stejné závěry, jen se použije Abelovo kritérium místo Weierstrassova. **16.** (i) Ukažte, že řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(0, +\infty)$. (ii) Ukažte, že řada konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$. (iii) Je-li $\max(p, q) \leq 1$, je $D_f = \{0\}$, je-li $\max(p, q) > 1$, je $D_f = \mathbf{R}$. Pro $\max(p, q) > 1$ je f spojitá na $\mathbf{R}$. Je-li navíc $p + q > 2$ nebo $p > q$, je f spojitá na $\mathbf{R}$; je-li $p + q \leq 2$ a $p < q$, není f spojitá v 0 (ani zleva ani zprava). (Případ $p + q \leq 2$ a $p = q$ nemůže nastat, je-li $\max(p, q) > 1$.) **17.** (a) Ve všech bodech definičního oboru, kterým je množina $\{x \in \mathbf{R}; -x \notin \mathbf{N}\}$. (b) $D_f = \mathbf{R}$, derivace existuje (vlastní) v bodech $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. V 0 derivace neexistuje, protože $f'_+(0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ a $f'_-(0) = -f'_+(0)$.

18. Pro první derivaci použijte Weierstrassovo kritérium, pro druhou Dirichletovo kritérium (viz příklad 8).

V. Následující funkce vyjádřete jako součet mocninné řady o středu 0 na maximálním otevřeném intervalu

1. e^{-x^2} **2.** $\cos^2 x$ **3.** $\sin^3 x$ **4.** $\frac{x^{10}}{1-x}$ **5.** $\frac{1}{(1-x)^2}$ **6.** $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ **7.** $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **8.** $\frac{x}{1+x-2x^2}$
9. $\frac{1}{x^2+x+1}$ **10.** $\log(1+x+x^2+x^3)$

Na kruhu konvergence sečtěte mocninné řady

11. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ **12.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ **13.** $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ **14.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^2 x^k$ **15.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ **17.** $\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k$ **18.** $1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k$ **19.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}$

Výsledky a návody. **1.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$ na $\mathbf{R}$. **2.** $1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}$ na $\mathbf{R}$. **3.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4}\cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(1-3^{2k})x^{2k+1}$ na $\mathbf{R}$. **4.** $\sum_{k=10}^{\infty} x^k$ na $(-1,1)$. **5.** $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$ na $(-1,1)$. **6.** $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k-1}(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(k-1)!}x^k$ na $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. **7.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ na $(-1,1)$. **8.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k 2^{k+1}}{3}x^k$ na $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. **9.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(k+1)\frac{\pi}{3}\cdot x^k$ na $(-1,1)$.

10. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, kde $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2l-1} & k=2l-1 \\ -\frac{1}{2l}+\frac{(-1)^{l+1}}{l} & k=2l \end{cases}$ $(l\in\mathbf{N})$ na $(-1,1)$. **11.** $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ na $(-1,1)$. **12.** $\operatorname{arctg} x$ na $(-1,1)$. **13.** $\frac{x}{(1-x)^2}$ na $(-1,1)$. **14.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ na $(-1,1)$. **15.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ na $\mathbf{R}$. **16.** Součet je $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{\log(1+x)}{x}+\log(1+x)-1 & x\in(-1,0)\cup(0,1). \end{cases}$ **17.** $\frac{2x}{(1-x)^3}$ na $(-1,1)$. **18.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ na $(-1,1)$. **19.** $\frac{1}{2}(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\cos x)$ na $\mathbf{R}$.

VI. Fourierovy řady

1. Rozviňte následující funkce ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi,\pi)$ a určete součet všude, kde řada konverguje. (a) $\sin^2 x$, (b) $\cos^3 x$, (c) $\cos^{2m} x$, (d) $\frac{\sin mx}{\sin x}$, (e) $\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m\frac{\sin mx}{\sin x}$, kde $|\alpha|<1$. (f) $\frac{1}{\sin x}$.
2. Pro následující funkce najděte trigonometrickou řadu, jejímž jsou součtem, a výsledek aplikujte v uvedených bodech. (a) x^2 na $(-\pi,\pi)$, $x=0$; (b) x na $(-\pi,\pi)$, $x=\frac{\pi}{2}$;
(c) $\sin ax$ na $(-\pi,\pi)$ $(a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$, $x=\frac{\pi}{2}$; (d) x^2 na $(0,2\pi)$, $x=0$. (e) x^2-x na $(-\pi,\pi)$.
(f) $x^2+\sin^4 x$ na $(0,2\pi)$.
3. (a) Napište funkci $f(x)=x$ na $(0,\pi)$ jako součet cosinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech? (b) Napište funkci $f(x)=x^2$ na $(-\pi,0)$ jako součet sinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech? (c) Napište funkci $f(x)=\sin x$ na $(0,\pi)$ jako součet cosinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech?
***4.** Funkci $f(x)=x$ na $(0,\frac{\pi}{2})$ vyjádřete jako součet trigonometrické řady obsahující jen členy tvaru
(a) $c\sin kx$, $k\in\mathbb{N}$ liché, (b) $c\cos kx$, $k\in\mathbb{N}$ liché, (c) $c\cos kx$, $k\in\mathbb{N}$ sudé, (d) $c\sin kx$, $k\in\mathbb{N}$ sudé. Jak vypadají součty těchto řad?

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. b) $\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. c) $\frac{1}{2^{2m}}\cdot\binom{2m}{m}+\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\binom{2m}{m-n}\cos 2nx$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. d) Pro $m=2k$: $\sum\limits_{n=1}^{k}2\cos(2n-1)x$; pro $m=2k+1$: $1+\sum\limits_{n=1}^{k}2\cos 2nx$; konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. e) $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}\sin nx$, konverguje všude k f. f) Toto není po částech spojitá funkce, nemá FŘ. **2.** a) $\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$. b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$. c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-a^2)}\cdot\sin\pi a\cdot\sin nx$; $\frac{\pi}{\cos\pi a}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}-a}+\frac{1}{n+\frac{1}{2}+a}\right)$. d) $\frac{4\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. **3.** a) $\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot(-1)^n\cdot\frac{\pi}{n}+\frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\right)\sin nx$. **4.** a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^k}{\pi\cdot(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$, součet je $f^*(x)=\begin{cases}-\pi-x & x\in[-\pi,\frac{\pi}{2}]\\ x & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ \pi-x & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$, a 2π-periodicky. b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^k}{2k+1}-\frac{4}{\pi\cdot(2k+1)^2}\right)\cdot\cos(2k+1)x$, součet je

$$f^*(x)=\begin{cases}-\pi-x & x\in[-\pi,\frac{\pi}{2})\\ |x| & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ x+\pi & x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\\ 0 & x=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

, a 2π-periodicky. c) $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi\cdot k^2}\cos 2kx$, součet je $f^*(x)=\begin{cases}\pi+x & x\in[-\pi,\frac{\pi}{2}]\\ |x| & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ \pi-x & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$, a 2π-periodicky. d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^k}{k}\sin 2kx$, součet je $f^*(x)=\begin{cases}\pi+x & x\in[-\pi,\frac{\pi}{2})\\ x & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ x-\pi & x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\\ 0 & x=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$, a 2π-periodicky.

==

VII. Otevřené a uzavřené množiny, vnitřek, uzávěr ...

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené, zjistěte jejich vnitřek, uzávěr, hranici.
(a) $\mathbb{Q}$, (b) $\mathbb{N}$, (c) $\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$, (d) $(-\infty,0)\cup\{x\in\mathbb{Q}\mid x>0\}$
Všechny tyto množiny uvažujte (i) v $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou (ii) v rovině ($\mathbb{R}^2$) s euklidovskou metrikou.

2. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené, zjistěte jejich vnitřek, uzávěr, hranici.

a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0,\ y\le 0\}$;
b) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2+2xy=5\}$;
c) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x\ge 0, y>0, x+y=2, z\le 0\}$;
d) $D=\{f\in\mathcal{C}[0,1]\mid f(\frac{1}{2})=2\}$;
e) $E=\{f\in\mathcal{C}[0,1]\mid f(\frac{1}{2})\in(0,2)\}$;
f) $F=\{f\in\mathcal{C}[0,1]\mid \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0\}$
g) $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x+y|>x+y\}$
g) $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x-y|=x-y\}$

3. Definujme $\mathcal{N}:\mathcal{C}[0,1]\to\mathbb{R}$ předpisem $\mathcal{N}(f)=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Je $\mathcal{N}$ spojité zobrazení?

4. Platí rovnosti $\overline{B(a,\delta)}=\{x\mid\rho(a,x)\le\delta\}$ a $\operatorname{int}\{x\mid\rho(a,x)\le\delta\}=B(a,\delta)$ pro každé $\delta>0$ a) v každém metrickém prostoru b) v normovaném lineárním prostoru ?

Výsledky a návody. **1.** (i) V $\mathbb{R}$: (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\operatorname{bd}\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. (b) Uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{N}} = \operatorname{bd}\mathbb{N} = \mathbb{N}$. (c) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr i hranice je $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. (d) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $(-\infty, 0)$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $[0, \infty)$. (ii) V rovině (jakožto podmnožiny osy x, kterou značíme $\mathbb{R}$): (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\operatorname{bd}\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. (b) Uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{N}} = \operatorname{bd}\mathbb{N} = \mathbb{N}$. (c) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr i hranice je $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. (d) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $\mathbb{R}$. **2.** (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$, $\overline{A} = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, $\operatorname{bd} A = \{(x, y) \mid (x \geq 0, y = 0) \text{ nebo } (x = 0, y \leq 0)\}$. (b) Uzavřená, $\operatorname{int} B = \emptyset$, $\overline{B} = \operatorname{bd} B = B$. (c) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} C = \emptyset$, $\overline{C} = \operatorname{bd} C = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$. (d) Uzavřená, $\operatorname{int} D = \emptyset$, $\overline{D} = \operatorname{bd} D = D$. (e) Otevřená, $\operatorname{int} E = E$, $\overline{E} = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \in [0, 2]\}$, $\operatorname{bd} E = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \in \{0, 2\}\}$. (f) Uzavřená, $\operatorname{int} F = \emptyset$, $\overline{F} = \operatorname{bd} F = F$. (g) Otevřená, $\operatorname{int} G = G$, $\overline{G} = \{(x, y) \mid x + y \leq 0\}$, $\operatorname{bd} G = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$. (h) Uzavřená, $\operatorname{int} H = \{(x, y) \mid x > y\}$, $\operatorname{bd} H = \{(x, y) \mid x = y\}$. **3.** Ano, využijte větu o záměně limity a integrálu. **4.** V metrickém prostoru platit nemusí (např. diskrétní prostor a $\delta = 1$), ale v NLP platí.