# 1. KONSTRUKCE LEBESGUEOVY MÍRY

## I. ABSTRAKTNÍ DEFINICE MÍRY

**1.** Definice $\sigma$-algebry: Nechť $X$ je množina a $\mathcal{A}$ *nějaký* systém podmnožin $X$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je **$\sigma$-algebra**, pokud platí:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow (A^c =)X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(3) $A_n \in \mathcal{A}$ pro $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

**2.** Příklady: $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(X)$ (t.j. systém *všech* podmnožin $X$) je $\sigma$-algebra. $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X\}$ je $\sigma$-algebra.

**3.** Definice míry: Nechť $X$ je množina a $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra podmnožin $X$. **Míra** na $(X, \mathcal{A})$ je zobrazení $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, které splňuje:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;
(2) Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

**4.** Příklady: $X$ buď libovolná množina a $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.
a) $\mu(A) = 0$ pro $A \subset X$ je nulová míra.
b) $\mu(A)$ je počet prvků $A$ ($+\infty$ pro nekonečnou $A$) je *aritmetická (sčítací) míra.*
c) Nechť $x \in X$. Pak $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ je *Diracova míra* nesená bodem $x$.

## II. INTERVALY A BORELOVSKÉ MNOŽINY V $\mathbb{R}^k$

**1.** Intervaly: **Intervalem** v $\mathbb{R}^k$ rozumíme množinu tvaru $I = I_1 \times \cdots \times I_k$, kde $I_1, \ldots, I_k$ jsou intervaly (libovolného typu) v $\mathbb{R}$. **Objemem** intervalu $I$ (značíme $\operatorname{vol} I$) rozumíme jeho objem jakožto kvádru, t.j. součin délek intervalů $I_1, \ldots, I_k$. (Pokud je aspoň jeden z těchto intervalů degenerovaný, je objem 0, pokud jsou všechny nedegenerované a aspoň jeden je neomezený, je objem $+\infty$.)

**2.** Otevřené množiny: Množina $M \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, pokud pro každé $x \in M$ existuje $\delta > 0$, že $B(x, \delta) \subset M$ (kde $B(x, \delta)$ je koule o středu $x$ a poloměru $\delta$).

**3.** Každá otevřená množina v $\mathbb{R}^k$ je sjednocením posloupnosti po dvou disjunktních (polouzavřených) intervalů.

**4.** Borelovské množiny: Označme symbolem $\mathcal{B}^k$ nejmenší $\sigma$-algebru obsahující otevřené množiny v $\mathbb{R}^k$. Tato $\sigma$-algebra se nazývá **$\sigma$-algebra borelovských množin.** Dle předchozího bodu je to zároveň nejmenší $\sigma$-algebra obsahující intervaly.

## III. VLASTNÍ KONSTRUKCE LEBESGUEOVY MÍRY

**1.** Vnější míra: Pro $A \subset \mathbb{R}^k$ libovolnou položme

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n \mid I_n \text{ jsou intervaly a } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}.$$

Tuto množinovou funkci nazveme **vnější Lebesgueovou mírou**.

**2.** Pozorování: Definice $\lambda^*$ se nezmění, budeme-li uvažovat pouze otevřené intervaly; nebo pouze intervaly o hranách $\leq \delta$ pro pevné $\delta > 0$. Dále je zřejmé, že $\lambda^*(x + A) = \lambda^*(A)$ pro každé $A \subset \mathbb{R}^k$ a $x \in \mathbb{R}^k$.

**3.** Monotonie a $\sigma$-subaditivita: Platí:

$$A \subset B \Rightarrow \lambda^*(A) \subset \lambda^*(B),$$
$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Longrightarrow \lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

**4.** Míra intervalu: Je-li $I$ interval, pak $\lambda^*(I) = \operatorname{vol} I$.

**5.** $F_1$, $F_2$ disjunktní uzavřené omezené množiny $\Longrightarrow \lambda^*(F_1 \cup F_2) = \lambda^*(F_1) + \lambda^*(F_2)$.

**6.** $F_1, F_2, \dots, F_n$ po dvou disjunktní uzavřené omezené množiny

$$\Longrightarrow \lambda^*(F_1 \cup \dots \cup F_n) = \lambda^*(F_1) + \dots + \lambda^*(F_n).$$

**7.** $G$ otevřená, $\varepsilon > 0 \Longrightarrow$ existuje $F \subset G$ uzavřená, $\lambda^*(F) > \lambda^*(G) - \varepsilon$.
**8.** Definice: Označme $\mathcal{B}_0^k$ systém všech množin $A \subset \mathbb{R}^k$, pro které pro každé $\varepsilon > 0$ existují $F \subset A$ uzavřená a $G \supset A$ otevřená, že $\lambda^*(G \setminus F) < \varepsilon$.
**9.** $G$ omezená otevřená, $F \subset G$ uzavřená $\Longrightarrow \lambda^*(G \setminus F) = \lambda^*(G) - \lambda^*(F)$
**10.** $\mathcal{B}_0^k$ je uzavřená na doplňky a konečné průniky.
**11.** Kritérium měřitelnosti: Nechť $A \subset \mathbb{R}^k$ je omezená a nechť pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset A$ uzavřená, že $\lambda^*(F) > \lambda^*(A) - \varepsilon$. Pak $A \in \mathcal{B}_0^k$.
**12.** Je-li $\lambda^*(A) = 0$, pak $A \in \mathcal{B}_0^k$. Každý interval patří do $\mathcal{B}_0^k$.
**13.** Nechť $I$ je omezený interval a $A_n \subset I$ jsou po dvou disjunktní prvky $\mathcal{B}_0^k$. Pak

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_0^k \text{ a } \lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

**14.** Nechť $A_n \subset \mathbb{R}^k$ jsou po dvou disjunktní prvky $\mathcal{B}_0^k$. Pak

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_0^k \text{ a } \lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

**15.** Závěr: $\mathcal{B}_0^k$ je (nejmenší) $\sigma$-algebra obsahující intervaly a nulové množiny, $\lambda^k = \lambda^* \restriction \mathcal{B}_0^k$ je míra, invariantní vůči posunutí, a navíc $\lambda^k(I) = \operatorname{vol} I$ pro každý interval. $\lambda^k$ se nazývá **$k$-rozměrná Lebesgueova míra**.
**16.** Poznámky:
(i) $\lambda^k$ je svými vlastnostmi v předchozím bodě jednoznačně určena.
(ii) Existuje $B \subset [0,1]$ taková, že $\lambda^*(B) = \lambda^*([0,1] \setminus B) = 1$.
(iii) $\mathcal{B}_0^k$ je ostře větší než $\mathcal{B}^k$.

## IV. Poznámky o úplnosti míry

**1.** Definice úplné míry. Nechť $X$ je množina, $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra podmnožin $X$ a $\mu$ míra na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že $\mu$ je úplná, pokud platí: Jestliže $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ a $B \subset A$, pak $B \in \mathcal{A}$ (a ovšem $\mu(B) = 0$).
**2.** Zúplnění míry. Nechť $\mu$ je míra na $(X, \mathcal{A})$. Nechť $\mathcal{A}_0$ je systém těch množin $M \subset X$, pro které existují $A, B \in \mathcal{A}$, že $A \subset M \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Pro $M \in \mathcal{A}_0$ položme $\mu_0(M) = \mu(A)$, kde $A$ je ta množina z definice. Pak $\mathcal{A}_0$ je $\sigma$-algebra a $\mu_0$ je úplná míra na $(X, \mathcal{A}_0)$. Nazýváme ji **zúplněním** míry $\mu$.
**3.** $\lambda^k \restriction \mathcal{B}^k$ není úplná, $\lambda^k$ je její zúplnění.

## 2. Zkoumejte existenci a konvergenci Lebesgueových integrálů

**1.** Zkoumejte $\int_0^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Ukažte, že a) $x^\alpha \in Z^R_{(0,\infty)}$, b) $x^\alpha \cdot \chi_{(0,\infty)} \in Z^R_{\mathbb{R}}$, c) $x^\alpha \cdot \chi_{[0,\infty)} \notin Z^*_{\mathbb{R}}$, ale patří do $\mathscr{L}^R_{\mathbb{R}}$. Pro která $\alpha$ integrál konverguje?

**2.** $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$ **4.** $\int_{-1}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$ **5.** $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}$ **6.** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

**7.** $\int_0^\infty \frac{x^\beta}{1+x^\alpha \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **8.** Nechť $D$ je Dirichletova funkce, tj. $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.
Zkoumejte a) $\int_0^1 D(x)\,\mathrm{d}x$, b) $\int_1^\infty D(x)\,\mathrm{d}x$, c) $\int_{-5}^5 (1 - D(x))\,\mathrm{d}x$, d) $\int_{-\infty}^5 D(x) - 1\,\mathrm{d}x$, e) $\int_7^\infty D(x) \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$, f) $\int_{-\infty}^{-10} (D(x) - 1) \sin x\,\mathrm{d}x$.

### Zkoumejte limity a možnost použití vět o záměně limity a integrálu

**9.** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$ **10.** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

---

Výsledky a návody. **1.** a),b) Uvažme $f_n(x) = x^\alpha$ na $[1 + \frac{1}{n}, n]$, 0 pro $x \geq n + \frac{1}{2}$ a $x \leq 1$, lineární na meziintervalech. c) Pokud $f \leq x^\alpha$, $f \in Z$, pak $f(1) \geq 0$, a neexistuje $f \in Z$, $f \geq x^\alpha$. Pro $\alpha < -1$ integrál konverguje (a je $-\frac{1}{1+\alpha}$), pro $\alpha \geq -1$ diverguje (a je $+\infty$). **2.** Konverguje – integrand je spojitý na $[0,1]$. **3.** Funkce je v $Z^R$, porovnáním s $\frac{1}{\sqrt{x}}$ u 0 zjistíme, že konverguje. **4.** Není v $Z^*$, zřejmě je v $\Lambda$. Je v $Z^R_{(0,3)}$ a v $Z^K_{(-1,0)}$, integrál konverguje, protože konvergují $\int_{-1}^0$ a $\int_0^3$. **5.** Zřejmě je v $Z^R$, rozdělme na $\int_0^1$ a $\int_1^\infty$. Konverguje, právě když $a \in (1,2)$, jinak je $+\infty$. **6.** Není v $Z^*$, je v $\Lambda$. Nejprve rozdělme na $(0,\pi)$ a $(\pi,\infty)$. $\int_0^\pi$ konverguje, právě když $\alpha < 2$, jinak je $+\infty$. Dále zkoumejme $\int_\pi^\infty f^+$ a $\int_\pi^\infty f^-$. Pro $\alpha > 1$ oba konvergují, jinak jsou oba $+\infty$. Tedy pro $\alpha > 1$ $\int_1^\pi$ konverguje, jinak neexistuje. Závěr: Pro $\alpha \in (1,2)$ původní integrál konverguje (funkce patří do $\mathscr{L}$), pro $\alpha \geq 2$ je $+\infty$ (funkce patří do $\mathscr{L}^R \setminus \mathscr{L}$), pro $\alpha \leq 1$ neexistuje (funkce je v $\Lambda \setminus \mathscr{L}^*$). **7.** Patří do $Z^R$, konverguje pokud $\alpha \geq 2(\beta+1) > 0$ nebo $1 + \alpha < \beta < -1$. **8.** a) Není v $Z^*$, je v $\mathscr{L}$, integrál je 0. b) Není v $Z^*$, zřejmě je v $\mathscr{L}^R$, integrál je 0, tedy je v $\mathscr{L}$. c) Není v $Z^*$, je v $\mathscr{L}$, integrál je 5. d) Není v $Z^*$, je v $\mathscr{L}^R$, integrál je $+\infty$. e) Není v $Z^*$, zřejmě je v $\Lambda$, integrál je 0, tedy je v $\mathscr{L}$. e) Není v $Z^*$, zřejmě je v $\Lambda$, integrál neexistuje, není v $\mathscr{L}^*$. **9.** $\int_0^1 f_n = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$ (jde to spočítat), $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$ (lze použít věta o stejnoměrné konvergenci), $f_n \searrow 0$ na $[0,1]$ (lze použít Léviho věta), $|f_n| \leq 1$ (lze použít Lebesgueova věta). **10.** $\int_0^1 f_n = \frac{\log(1+n^2)}{n} \to 0$ (jde to spočítat), $f_n \not\rightrightarrows$ na $[0,1]$, ani to není monotónní posloupnost, ale $|f_n| \leq \frac{1}{2}$ (lze použít Lebesgueova věta). **11.** $0 \leq f_n \leq x^n$, $0 \leq \int_0^1 f_n \leq \frac{1}{n} \to 0$ (jde to odhadnout), $f_n \to 0$ na $(0,1)$ a $|f_n| \leq 1$ (lze použít Lebesgueova věta), $f_n \searrow 0$ na $(0,1)$ (lze použít Léviho věta), stejnoměrně nekonverguje. **12.** Na $(1,\infty)$: $0 \leq f_n \leq \frac{1}{x^n}$, $0 \leq \int_1^\infty f_n \leq \frac{1}{n-1}$ pro $n \geq 2$ (lze to odhadnout), $f_n \searrow 0$ na $(1,\infty)$, $\int_1^\infty f_2$ konverguje (lze použít Léviho věta), $f_n \to 0$ na $(1,\infty)$ a $|f_n| \leq f_2$ pro $n \geq 2$ (lze použít Lebesgueova věta).

---

## 3. Fubiniova věta, integrály závislé na parametru

**1.** Spočtěte $\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pokud a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$; b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$, $f(x,y) = e^{-(x+y)}$; c) $M$ je omezená osami a křivkou $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $f(x,y) = xy$. **2.** Spočtěte objemy těles ohraničených plochami a) $z = 1$ a $z^2 = x^2 + y^2$; b) $z = 1$ a $z = x^2 + y^2$; c) $z = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 2$, $y = 3$ a $z = xy$; d) $x^2 + y^2 = Rx$ a $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (kde $R > 0$). **3.** Spočtěte pomocí Fubiniovy věty: a) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$; d) $\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2) - \log(1+b^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. **4.** Spočtěte s využitím věty o derivaci podle parametru: a) $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. **5.** Vyšetřete průběh funkce a) $F(a) = \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\,\mathrm{d}x$; b) $F(a) = \int_0^1 \log(x^2 + a^2)\,\mathrm{d}x$; c) $F(a) = \int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}$.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{280}$. **2.** a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{\pi}{2}$, c) 10, d) $\frac{4}{3}R^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$. **3.** a) $\frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b}$, pokud $a,b>0$ nebo $a,b<0$, jinak integrál diverguje; b) $\log\frac{a+1}{b+1}$ pro $a,b>-1$, 0 pro $a=b$, jinak nekonverguje; c) $\log\frac{b}{a}$ pro $a,b>0$, 0 pro $a=b$, jinak nekonverguje; d) $\pi(a-b)$. **4.** a) $\log(a+1)$ pro $a>-1$; b) $\pi\arcsin a$ pro $a\in[-1,1]$. **5.** a) Definována na $(-1,\infty)$, tam spojitá, klesající, konvexní, $\lim\limits_{a\to-1+}F(a)=+\infty$, $\lim\limits_{a\to+\infty}F(a)=0$. b) Definována na $\mathbb{R}$, spojitá a sudá, na $[0,\infty]$ rostoucí, $\lim\limits_{a\to+\infty}=+\infty$, $F(0)=\log 2-1$. c) Definováno pro $a>0$, tam spojité, rostoucí, konvexní, $\lim\limits_{a\to 0+}F(a)=0$, $\lim\limits_{a\to+\infty}F(a)=+\infty$, $\lim\limits_{a\to 0+}F'(a)=0$.

==========================================================

## 4. Komplexní čísla, analytické funkce

**1.** Spočtěte a) $(1+i)^{20}$, b) $(1-i)^7$, c) $(1+\sqrt{3}i)^{-10}$. **2.** Najděte všechna komplexní čísla $z$, pro která platí a) $z^4=1$, b) $z^4=-16$, c) $z^3=-1$, d) $z^4=-8-8\sqrt{3}i$.

**3.** Pro následující funkce spočtěte derivaci podle komplexní proměnné ve všech bodech, kde existuje: a) $f(z)=\operatorname{Re}z$, b) $f(z)=\operatorname{Re}(z^2)$, c) $f(z)=(\operatorname{Re}z)^2$, d) $f(z)=|z|^2$, e) $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z$, f) $f(z)=2\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z+i|z|^2$. **4.** Určete maximální oblast, na nichž je funkce analytická: a) $f(z)=3\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z+i(3\operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z)$, b) $f(z)=e^{-\operatorname{Im}z}\cdot e^{i\operatorname{Re}z}$, c) $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z+i\operatorname{Im}z$, d) $f(z)=\sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arg}z}$, e) $f(z)=\log|z|+i\operatorname{Arg}z$.

**5.** V bodech d),e) předchozího příkladu určete (a nakreslete) obor hodnot funkce $f$.

**6.** Nechť $D$ je oblast v rovině. Najděte všechny funkce $f$ analytické v oblasti $D$, které splňují a) $f$ je reálná, b) $\bar{f}$ je analytická, c) $|f|$ je konstantní, d) $\operatorname{Re}f$ je konstantní.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) $-1024$, b) $8(1+i)$, c) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2048}$. **2.** a) $1,i,-1,-i$, b) $\sqrt{2}(\pm2\pm i)$ (4 možnosti), c) $-1$, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, d) $\pm(\sqrt{3}-i)$, $\pm(1+\sqrt{3}i)$. **3.** a) nikde, b) jen v 0, tam 0, c) jen pro $\operatorname{Re}z=0$, tam 0, d),e) jen v 0, tam 0, f) jen pro $\operatorname{Re}z=0$, tam $2\operatorname{Im}z$. **4.** a) celá rovina ($f(z)=(3-i)z$); b) celá rovina; c) $\emptyset$ (derivace existuje jen v bodě $i$, kde je 1); d),e) $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}\mid z\le 0\}$. **5.** d) $\{z\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Re}z>0\}$; e) $\{z\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Im}z\in(-\pi,\pi)\}$. **6.** Pouze konstantní: a),b),d) použije CR podmínky; c) využijte b) a toho, že $\bar{f}=\frac{|f|^2}{f}$.

==========================================================

## 5. Komplexní čísla – elementární funkce

**1.** Najděte všechna $z\in\mathbb{C}$, pro která platí a) $e^z=-2$, b) $e^z=1+\sqrt{3}i$, c) $e^{2z-1}=2$, d) $\cos z=2$, e) $\sin z=i$. **2.** Spočtěte a) $\operatorname{Log}(-ei)$, b) $\operatorname{Log}(1-i)$. **3.** Jaký je vztah mezi množinami $\log(i^2)$ a $2\log i$? (Nebo obecněji mezi $\log(z^2)$ a $2\log z$?)

**4.** Vyjádřete $\operatorname{Log}(z_1z_2)$ pomocí $\operatorname{Log}z_1$ a $\operatorname{Log}z_2$. Kdy platí $\operatorname{Log}(z_1z_2)=\operatorname{Log}z_1+\operatorname{Log}z_2$?

**5.** Najděte všechny hodnoty a určete hlavní hodnotu a) $(1+i)^i$, b) $(-1)^{\frac{1}{\pi}}$, c) $i^i$, d) $(1-i)^{4i}$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) $\ln 2+(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$, b) $\ln 2+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, c) $\frac{1}{2}(\ln 2-1)+k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$, d) $2k\pi+i\ln(2\pm\sqrt{3})$, $k\in\mathbb{Z}$, e) $(2k+1)\pi+i\ln(\sqrt{2}+1)$, $2k\pi+i\ln(\sqrt{2}-1)$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.** a) $1-i\frac{\pi}{2}$, b) $\ln 2-i\frac{\pi}{4}$. **3.** $2\log z\subsetneq \mathit{log}(z^2)$. **4.** Nechť $z_1=r_1e^{i\phi_1}$, $z_2=r_2e^{i\phi_2}$, kde $\phi_1,\phi_2\in(-\pi,\pi]$.

Pak $\operatorname{Log}(z_1z_2)=\begin{cases}\operatorname{Log}z_1+\operatorname{Log}z_2+2\pi i & \phi_1+\pi_2\in(-2\pi,-\pi],\\ \operatorname{Log}z_1+\operatorname{Log}z_2 & \phi_1+\pi_2\in(-\pi,\pi],\\ \operatorname{Log}z_1+\operatorname{Log}z_2-2\pi i & \phi_1+\pi_2\in(\pi,2\pi].\end{cases}$ Speciálně, pokud $\operatorname{Re}z_1>0$ a $\operatorname{Re}z_2>0$, pak $\operatorname{Log}(z_1z_2)=\operatorname{Log}z_1+\operatorname{Log}z_2$. **5.** a) $\exp(-\frac{\pi}{4}-2k\pi)(\cos(\frac{1}{2}\ln 2)+i\sin(\frac{1}{2}\ln 2))$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $\cos(2k+1)+i\sin(2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$; c) $\exp(-\frac{\pi}{4}-2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; d) $\exp(\pi-8k\pi)(\cos(2\ln 2)+i\sin(2\ln 2)$, $k\in\mathbb{Z}$. Hlavní hodnoty jsou ve všech případech pro $k=0$.

## 6. Integrály a křivkové integrály komplexních funkcí

**1.** Spočtěte integrály a) $\int_1^2 (\frac{1}{t} - i)^2 \, \mathrm{d}t$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2it} \, \mathrm{d}t$, c) $\int_0^{+\infty} e^{-zt} \, \mathrm{d}t$, $z \in \mathbb{C}$, d) $\int_0^{\pi} e^{(1+i)t} \, \mathrm{d}t$, využijte k vyjádření $\int_0^{\pi} e^t \cos t \, \mathrm{d}t$ a $\int_0^{\pi} e^t \sin t \, \mathrm{d}t$. **2.** Spočtěte křivkové integrály $\int_C f(z) \, \mathrm{d}z$, kde a) $f(z) = \frac{z+2}{z}$, $C$ je i) polokružnice $z = 2e^{i\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$, ii) polokružnice $z = 2e^{i\phi}$, $\phi \in [\pi, 2\pi]$, iii) kružnice $z = 2e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi]$; b) $f(z) = z - 1$, $C$ je i) úsečka $[0, 2]$ na reálné ose, ii) polokružnice od 0 do 2 (se středem v 1, v dolní polorovině); c) $f(z) = \pi e^{\pi \bar{z}}$, $C$ je obvod čtverce s vrcholy 0, 1, $1 + i$, $i$. **3.** S využitím primitivních funkcí spočtěte a) $\int_C z^n \, \mathrm{d}z$, kde $C$ je jednotková kružnice obíhaná proti směru hodinových ručiček a $n \in \mathbb{Z}$; b) $\int_i^{\frac{i}{2}} e^{\pi z} \, \mathrm{d}z$, c) $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} \, \mathrm{d}z$, d) $\int_1^3 (z-1)^3 \, \mathrm{d}z$, kde tyto integrály jsou přes libovolnou křivku s uvedenými krajními body.

**4.** Spočtěte $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ s vyžitím Cauchyho věty.

---

## 7. Řady a Taylorovy řady

**1.** Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Co lze říci o limitách $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{z_n}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n|$ ? **2.** Sečtěte řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \sin nt$. **3.** Vyjádřete funkci $f$ mocninnou řadou o středu $z_0$ a určete kruh konvergence, pokud a) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1$; b) $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$, $z_0 = 0$; c) $f(z) = \sin z^2$, $z_0 = 0$, spočtěte $f^{(6)}(0)$, $f^{(15)}(0)$; d) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = i$; e) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$; f) $f(z) = \sinh z$, $z_0 = \pi i$. **4.** Pro funkci $f(z) = \operatorname{tgh} z$ najděte první dva nenulové členy Maclaurinovy řady a určete kruh konvergence.

---

## Test číslo 3

**1.** Spočtěte integrál $\int_M f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde $f(x, y) = e^{-2y-3x}$ a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 3x\}$ (15 bodů)

**2.** Vyšetřete průběh funkce $F(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$, to jest:

a) Určete definiční obor. (3 body)

b) Ukažte, že $F$ je spojitá tím, že ověříte předpoklady věty o spojitosti podle parametru. (6 bodů)

c) Spočtěte derivaci $F$ pomocí věty o derivování dle parametru, a usuďte, jak je $F$ monotónní. (8 bodů)

d) Spočtěte druhou derivaci $F$, a vyvoďte závěry o konvexitě ev. konkávnosti $F$. (8 bodů)

e) Spočtěte limity $F$ v krajních bodech definičního oboru, a také jednostranné derivace $F$ (pomocí vhodných vět o limitních přechodech). (7 bodů)

f) Načrtněte graf funkce $F$. (3 body)

**3.** Určete všechna komplexní řešení rovnice $z^5 = 16\sqrt{3} + 16i$. (16 bodů)

**4.** Uvažme komplexní funkci $f(x + iy) = \frac{x+i(2-|y+2|)}{x^2+y^2}$.

a) Určete maximální oblast, kde je $f$ holomorfní. (17 bodů)

b) Spočtěte $\int_C f(z) \, \mathrm{d}z$, kde $C$ je jednotková kružnice se středem v 0 probíhaná po směru hodinových ručiček. (17 bodů)

---

## 8. Laurentovy řady

**1.** Rozveďte funkci $\frac{1}{1+z}$ v Laurentovu řadu na oblasti $1 < |z| < \infty$.

**2.** Funkci $f$ rozviňte v Laurentovy řady o středu $z_0$ a určete, kde konvergují. a) $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, $z_0 = 0$; b) $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$, $z_0 = 1$; c) $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$, $z_0 = 0$; d) $f(z) = \exp(z + \frac{1}{z})$, $z_0 = 0$.

**3.** S použitím derivování nebo integrování řad rozviňte funkci $f$ v Taylorovu nebo Laurentovu řadu o středu $z_0$. a) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$, $z_0 = 0$; b) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$, $z_0 = 0$; c) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $z_0 = 1$ (nejprve vyjádřete $\frac{1}{z}$); d) $f(z) = \operatorname{Log}(1 + z)$, $z_0 = 0$; **4.** Pomocí řad určete oblast holomorfnosti (spojitě dodefinovaných) funkcí a) $f(z) = \frac{e^{cz}-1}{z}$ ($c \in \mathbb{C}$); b) $f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{z-1}$; c) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$; d) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$. **5.** Najděte několik (3 až 4) prvních členů Laurentovy řady funkce $f$ na uvedené oblasti. a) $f(z) = \frac{e^z}{z(1+z^2)}$, $0 < |z| < 1$; b) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $0 < |z| < \pi$; c) $f(z) = \frac{1}{e^z-1}$, $0 < |z| < 2\pi$.

## 9. Póly, rezidua, reziduová věta

**1.** Určete povahu singularit funkcí a určete hlavní část příslušné Laurentovy řady. a) $z\exp(\frac{1}{z})$; b) $\frac{z^2}{1+z}$; c) $\frac{\sin z}{z}$; d) $\frac{\cos z}{z}$; e) $\frac{1}{(2-z)^3}$. **2.** Ukažte, že singularity následujících funkcí jsou póly, určete jejich stupeň a příslušné reziduum. a) $\frac{1-\cosh z}{z^3}$; b) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$; c) $\frac{e^{2z}}{(2-z)^3}$; d) $\operatorname{tgh} z$; e) $\frac{z}{\cos z}$; f) $\frac{e^z}{z^2+\pi^2}$; g) $\frac{z^{\frac{1}{4}}}{z+1}$ $(|z|>0,\ 0<\arg z<2\pi)$. **3.** Najděte rezidua následujících funkcí v bodě 0. a) $\frac{1}{z+z^2}$; b) $z\cos\frac{1}{z}$; c) $\frac{z-\sin z}{z}$; d) $\frac{\operatorname{cotg} z}{z^4}$; e) $\frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$. **4.** Pomocí reziduové věty spočtěte $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, pokud a) $f(z)=\frac{e^{-z}}{z^2}$, $C$ je kružnice $|z|=2$; b) $f(z)=z^2\exp\frac{1}{z}$, $C$ je kružnice $|z|=1$; c) $f(z)=\frac{z+1}{z^2-2z}$, $C$ je kružnice (i) $|z|=1$, (ii) $|z|=3$; d) $f(z)=\exp(z+\frac{1}{z})$, $C$ je kružnice $|z|=1$. **5.** Pomocí reziduové věty spočtěte reálné integrály. a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$; d) $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$; e) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $(a\geq 0)$; f) $\int_0^\infty \frac{x^3\sin ax}{x^4+4}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$; g) $\int_0^\infty \frac{x^3\sin x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$.