XIV. Zjistěte, zda existují limity, a existují-li, spočtěte je

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ **4.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ **7.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Zkoumejte existenci a hodnotu parciálních derivací a diferenciálu (ev. spojitě dodefinované, lze-li to udělat) funkce $f(x,y)=$

8. $\sqrt{x^2+y^2}$ **9.** $\sqrt[3]{x+y^2}$ **10.** $\sqrt[3]{x^2+y}\cdot\ln(x^2+y^2)$ **11.** $|x|\cdot|y|$ **12.** $\sqrt[3]{xy}$ **13.** $\sqrt[3]{x^3+y^3}$

14. $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ **15.** $e^{\frac{-1}{x^2+y^2+xy}}$ **16.** $\frac{x^2y(|x|+|y|)}{x^4+y^2}$

17. Nechť $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Spočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Výsledky a návody. **1.** 2 **2.** 0 **3.** 0 **4.** 0 **5.** 1 **6.** Neexistuje. **7.** 1 **8.** Mimo $(0,0)$ diferencovatelná, v $(0,0)$ neexistují parciální derivace. **9.** Diferencovatelná kromě bodů $(-y^2,y)$, $y\in\mathbb{R}$, v nich neexistují parciální derivace. **10.** V $(0,0)$ spojitě dodefinovat 0. Mimo body $(x,-x^2)$ diferencovatelná. V $(x,-x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2+x^4\neq 1$, pokud $x^2+x^4=1$, je tam diferenciál 0. **11.** Pro $x\neq 0, y\neq 0$ diferencovatelná. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje pro $x\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y\neq 0$; v $(0,0)$ je diferenciál 0. **12.** Pro $x\neq 0, y\neq 0$ diferencovatelná. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje pro $x\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y\neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, ale diferenciál neexistuje. **13.** Mimo body $(x,-x)$ diferencovatelná. V bodech $(x,-x)$, $x\neq 0$ neexistují parciální derivace. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$, ale diferenciál neexistuje. **14.** V $(0,0)$ dodefinovat 0, diferencovatelná všude (v $(0,0)$ je diferenciál 0). **15.** V $(0,0)$ dodefinovat 0, diferencovatelná všude (v $(0,0)$ je diferenciál 0). **16.** V $(0,0)$ dodefinovat 0. Mimo $(0,0)$ diferencovatelná. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, ale diferenciál neexistuje. **17.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$

XV. Funkce dvou proměnných – derivace, složené funkce

1. Vyjádřete parciální derivace prvního a druhého řádu funkcí
$g(x,y)=$ (a) $f(x^2+y^2)$, (b) $f(x,xy)$, (c) $f(x,\frac{x}{y})$, (d) $f(x+y,x-y)$, (e) $f(ax,by)$.

2. Nechť $f(s,t)$ je kladná funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce g pomocí hodnot a derivací funkce f, pokud je (a) $g(x,y)=f(x,y)^{f(x,y)}$, b) $g(x,y)=f(x,y)^{f(y,x)}$.

3. Nechť f má diferenciál v bodě $(1,1)$ a nechť $f(1,1)=f_1'(1,1)=1$, $f_2'(1,1)=2$. Položme $g(t,u)=f(f(u,t),f(t,u))$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial t}(1,1)$.

4. Nechť $f(r,\varphi)=g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, funkce g má diferenciál v bodě $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial r}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})=0$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})=4$. Spočtěte $g_1'(1,1)$, $g_2'(1,1)$.

5. Převeďte do polárních souřadnic rovnici a) $x\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0$, b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

6. Transformujte do polárních souřadnic rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$ (t.j. napište odpovídající rovnici pro $r=r(\varphi)$).

Výsledky a návody. **1.** (a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=f'(x^2+y^2)\cdot 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=f'(x^2+y^2)\cdot 2y$, pokud existuje $f'(x^2+y^2)$. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=f''(x^2+y^2)\cdot 4x^2+2f'(x^2+y^2)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=f''(x^2+y^2)\cdot 4y^2+2f'(x^2+y^2)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=f''(x^2+y^2)\cdot 4xy$, pokud existuje $f''(x^2+y^2)$. V příkladech (b)–(e) předpokládejme existenci totálního diferenciálu funkce f v příslušných bodech. (b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\partial_1 f(x,xy)+y\partial_2 f(x,xy)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=x\partial_2 f(x,xy)$, (c) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\partial_1 f(x,\frac{x}{y})+\frac{1}{y}\partial_2 f(x,\frac{x}{y})$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-\frac{x}{y^2}\partial_2 f(x,\frac{x}{y})$, (d) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\partial_1 f(x+y,x-y)+\partial_2 f(x+y,x-y)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\partial_1 f(x+y,x-y)-\partial_2 f(x+y,x-y)$, (e) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=a\partial_1 f(ax,by)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=b\partial_2 f(ax,by)$, zde stačí existence $\partial_1 f$ a $\partial_2 f$.

2. (a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(x,y) \cdot (\log f(x,y)+1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial s}(x,y) \cdot (\log f(x,y)+1)$, (b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial s}(y,x)\log f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,y) \cdot \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t}(y,x)\log f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial s}(x,y) \cdot \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right)$ **3.** 4 **4.** $g_1' = -2,\ g_2' = 2.$ **5.** (a) $r\sin 2\varphi \frac{\partial u^*}{\partial r} + \cos 2\varphi \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} = 0$ (b) $\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} = 0$ **6.** $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = r$

XVI. Určete y' a y'' v bodech, v jejichž okolí je uvedenou rovnicí zadána diferencovatelná funkce $y = y(x)$

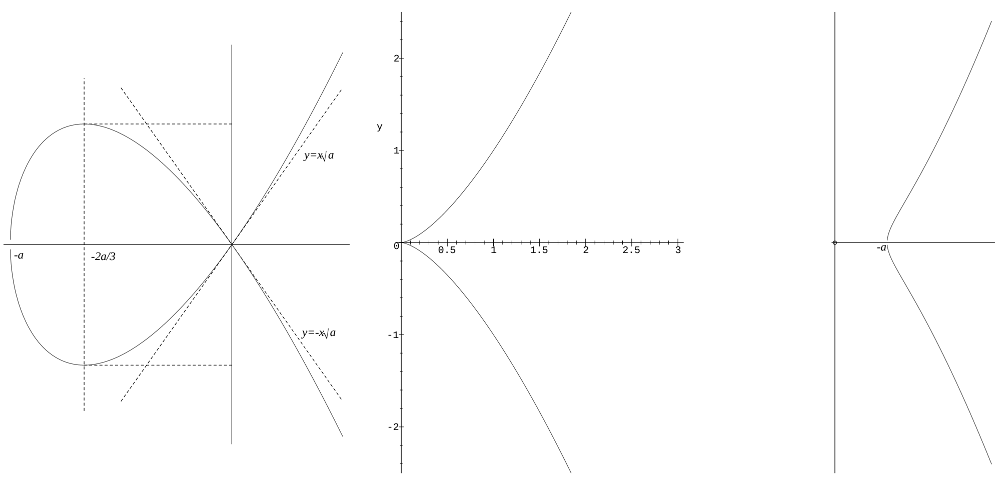
1. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2 \quad a \in \mathbb{R}$ **2.** $\log\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **3.** $y - \varepsilon \sin y = x \quad 0 < \varepsilon < 1$
4. $x^y = y^x$ **5.** $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Vyšetřete průběh implicitně zadaných funkcí a načrtněte příslušné křivky

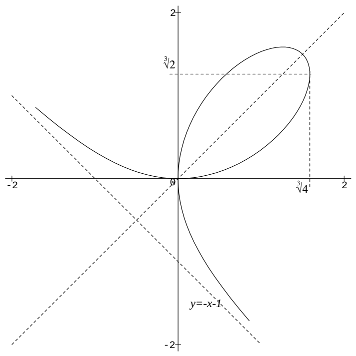
6. $y^2 = ax^2 + x^3$ **7.** $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ **8.** $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ **9.** $x^2 + y^4 = x^6$
10. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ **11.** $(y-x^2)^2 = x^5$ **12.** $(a+x)y^2 = (a-x)x^2$
13. $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$, kde $a \le b \le c$

Výsledky a návody. **1.** $y' = \frac{y+x}{y-x}$, $(x,y) \ne (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}), (\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}})$ **2.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $(x,y) \ne (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}), (-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})$ **3.** $y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$ **4.** $y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{x\log y + y}{y \log x + x}$, $(x,y) \ne (e,e)$ **5.** $y' = \frac{y}{x}$ **6.**

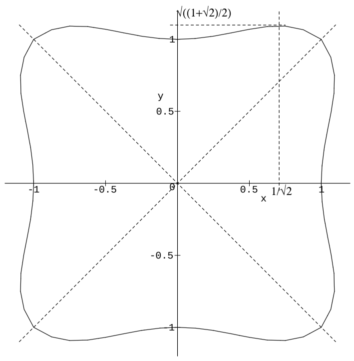
a>0 a=0 a<0



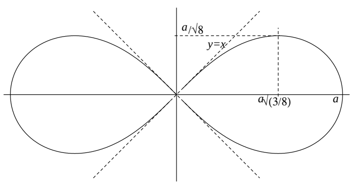
7.



8.



10.



Ad 7. Postup řešení. Označme $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ a $M = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$. Zřejmě $F(x,y) = F(y,x)$, a tak je M symetrická podle přímky $y = x$. F je třídy $\mathcal{C}^1$ (dokonce $\mathcal{C}^\infty$), a platí $\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x^2 - y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3(y^2 - x)$. $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ právě ve dvou bodech M, a to $(0,0)$ a $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ právě ve dvou bodech M, a to $(0,0)$ a $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. Nyní zvolme pevné x a zkoumejme počet y splňujících $F(x,y) = 0$. Položme $F_x(y) = F(x,y)$. Pak zřejmě $\lim_{y\to-\infty} F_x(y) = -\infty$ a $\lim_{y\to+\infty} F_x(y) = +\infty$. Navíc $F_x'(y) = 3(y^2 - x)$, a tedy F_x je rostoucí na $\mathbb{R}$, pokud $x \le 0$, proto má v tomto případě rovnice $F_x(y) = 0$ právě jedno řešení (označme $y_1(x)$). Pokud $x > 0$, pak F_x roste na $(-\infty, -\sqrt{x}]$, klesá na $[-\sqrt{x}, \sqrt{x}]$ a opět roste na $[\sqrt{x}, \infty]$. Platí $F_x(-\sqrt{x}) = x^3 + 2x^{\frac{3}{2}} > 0$, a tedy

existuje právě jedno $y_2(x) \in (-\infty, -\sqrt{x})$ splňující $F_x(y_2(x)) = 0$. Dále $F_x(\sqrt{x}) = x^3 - 2x^{\frac{3}{2}}$, tudíž $F_x(\sqrt{x}) > 0$ pro $x > \sqrt[3]{4}$, $F_x(\sqrt{x}) < 0$ pro $x \in (0, \sqrt[3]{4})$. Pro $x > \sqrt[3]{4}$ již tedy žádné další řešení není, pro $x \in (0, \sqrt[3]{4})$ jsou další dvě – $y_3(x) \in (-\sqrt{x}, \sqrt{x})$ a $y_4(x) \in (\sqrt{x}, +\infty)$. Z věty o implicitních funkcích nyní plyne, že $y_1, \dots, y_4$ jsou ve svých definičních oborech třídy $\mathcal{C}^\infty$, a že jejich derivace lze spočítat: $y_i' = \frac{y_i - x^2}{y_i^2 - x}$. Vyšetřeme tedy průběh jednotlivých y_i. Začněme s y_1. Je definováno na $(-\infty, 0)$, tedy $y_1^2 - x > 0$. Abychom zjistili znaménko $y_1 - x^2$, spočtěme $F_x(x^2) = x^6 - 2x^3 > 0$, a tedy $y_1 < x^2$, tudíž $y_1' < 0$, a y_1 je klesající. Protože $F_x(0) = x^3 < 0$, je $y_1 > 0$. Z toho, že je klesající, plyne, že y_1 má v $0-$ i v $-\infty$ limitu. Označme L limitu v $0-$. Pak $0 = \lim_{x\to 0-} F(x, y_1) = L^3$, a tedy $L = 0$. Je-li K limita v $-\infty$, pak $K = +\infty$, neboť jinak $0 = \lim_{x\to-\infty} F(x, y_1) = -\infty$. Dále lze zjistit, že y_1 má v $-\infty$ asymptotu $y = -x - 1$, neboť $F_x(-x + c) = 3x^2(c+1) - 3xc(c+1) + c^3$, a tedy $F_x(-x-1) = -1 < 0$, odkud máme $y_1(x) > -x - 1$, a pro $c > -1$ je $F_x(-x + c) > 0$ v okolí $-\infty$, a tedy na okolí $-\infty$ platí $-x - 1 < y_1(x) < -x + c$. Dále lze ukázat, že $\lim_{x\to 0-} y_1'(x) = 0$, neboť $F_x(-x) = 3x^2 > 0$, a tedy $y_1(x) < -x$, a tak $|y_1'(x)| \le \frac{x^2}{-2x} = -\frac{x}{2}$, a proto má limitu 0. Obdobně lze vyšetřit zbylá tři řešení, přitom y_2 je symetrické s y_1 podle přímky $y = x$, y_2 a y_3 mají v $0+$ limitu 0 a v $\sqrt[3]{4}-$ limitu $\sqrt[3]{2}$ (to plyne z věty o implicitních funkcích na okolí bodu $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$, v němž je $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$).

XVII. Vyjádřete uvedené primitivní funkce na maximálních intervalech existence pomocí elementárních funkcí

1. $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ 8. $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$ **9.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ **10.** $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$
11. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^3)}$ **14.** $\int \frac{x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x \log\log x}$ **17.** $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ **18.** $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ **20.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ **21.** $\int x^\alpha \log x\,\mathrm{d}x$
22. $\int x^3 \log^2 x\,\mathrm{d}x$ **23.** $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **24.** $\int \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$ **25.** $\int \frac{\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x$
26. Spočtěte (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ pomocí substituce $x = \operatorname{tg} t$ (b) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ pomocí substituce $x = \frac{1}{\cos t}$ (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$, $(\alpha < \beta)$ pomocí substituce $x = \alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x$
27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ **28.** $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$ **29.** $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ **30.** $\int \frac{x\cdot e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. Výsledky jsou uvedeny „až na konstantu“. **1.** $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na $\mathbb{R}$ **2.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **3.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$, na $(-\infty, 1)$ a na $(1, \infty)$ **4.** $\frac{1}{4}|x|\cdot x^3$, na $\mathbb{R}$ **5.** $\frac{-10\cdot 5^{-x}\log 2 + 2^{-x}\log 5}{5\log 5\log 2}$, na $\mathbb{R}$ **6.** $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$, na $\mathbb{R}$ **7.** $\operatorname{tg} x - x$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ 8. $-\operatorname{cotg} x - x$, na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **8.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{6}}{2}$, na $\mathbb{R}$ **9.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, na každém z intervalů $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **10.** $\sin\left(x - \pi\cdot\left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right]\right) + 2\cdot\left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right]$, na $\mathbb{R}$ **11.** $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$, na $\mathbb{R}$ **12.** $\frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x$, na $\mathbb{R}$ **13.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3)$, na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}$ **14.** $\frac{1}{8}\log(1 + 4x^2)$, na $\mathbb{R}$ **15.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$, na $\mathbb{R}$ **16.** $\log|\log\log x|$, na $(1, e)$ a na (e, ∞) **17.** $-\log|\cos x|$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **18.** $\log|\sin x|$, na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **19.** $\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **20.** $-\log\left|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\right|$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **21.** $\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\cdot\left(\log x - \frac{1}{1+a}\right)$, na $(0, \infty)$ pro $\alpha \neq 1$; $\frac{1}{2}\ln^2 x$, na $(0, \infty)$ pro $\alpha = -1$ **22.** $\frac{1}{4}x^4\ln^2 x - \frac{1}{8}x^4\ln x + \frac{1}{32}x^4$, na $(0, \infty)$ **23.** $2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x} - 1)$, na $(0, \infty)$ **24.** $x\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$, na $\mathbb{R}$ **25.** $-\frac{1}{2}e^{-x}\cdot(\sin x + \cos x)$, na $\mathbb{R}$ **26.** $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ **27.** $-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ **28.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$ **29.** $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)$ **30.** **31.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x$ **32.** $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg} x}(\sin\operatorname{arctg} x - \cos\operatorname{arctg} x)$ (substituce $t = \operatorname{arctg} x$

XVIII. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int \frac{x^8+x-1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3x+4)^2}$ **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$ **4.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$ **5.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$

Spočtěte či převeďte na integrál z racionální funkce

7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ **8.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$ **9.** $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$ **10.** $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. **1.** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\log(x^2 - x\sqrt{3}+1) - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\log(x^2 + x\sqrt{3}+1) - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$ **2.** $\frac{1}{7}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+4} + \frac{4\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$ **3.** $-\frac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}x}{2+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}} + \left[\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right]\pi$ **4.** $\frac{1}{3}\log\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\right)$ **5.** $e^x - \log(1+e^x)$ **6.** $\frac{\sqrt{1-e^x}-\sqrt{1+e^x}}{2e^x} - \frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}}} - \frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}}$ **7.** substituce $\sqrt{x^2+1} = x+t$ **8.** substituce $t=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ **9.** substituce $t=\sqrt[6]{x+1}$ **10.** substituce $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

XIX. Vypočtěte následující integrály

1. $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$, $\alpha\in(0,\pi)$ **3.** $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon\in[0,1)$ **4.** $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$, $|a|<1$, $|b|<1$, $ab>0$ **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $ab\neq 0$ **6.** $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int_0^{\log 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

8. $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x$ **10.** $\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$ **11.** $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

13. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int_{-1}^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ **15.** $\int_1^e (x\log x)^2\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

18. $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ **19.** $\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$ **21.** $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}$ **22.** $\int_0^{\pi} \cos^n x\cos nx$

Výsledky a návody. **1.** 1 **2.** $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$ **3.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, substituce $t=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ **4.** $-\frac{1}{a}\log\frac{1-a}{1+a}$ pokud $a=b$, $\frac{1}{\sqrt{ab}}\log\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$ pro $a\neq b$ (např. substituce $y=1-x$ a $t=\sqrt{\frac{(1-b)^2+2by}{(1-a)^2+2ay}}$) **5.** $\frac{\pi}{2|ab|}$ (např. $t=\operatorname{tg}x$) **6.** $200\sqrt{2}$ **7.** $\frac{1-\log 2}{2}$ **8.** 4π **9.** $2-\frac{2}{e}$ **10.** $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **11.** $2-\frac{\pi}{2}$ **12.** $\frac{1}{16}\pi a^4$
13. $\frac{\pi^2}{4}$ **14.** $\frac{1}{2}\log 3-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ **15.** $\frac{5e^3-2}{27}$ **16.** $\frac{1+\sqrt{2}}{30}$ **17.** $\frac{\pi}{6}(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})$, substituce $t=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$
18. $2\pi\sqrt{2}$, např. substituce $t=\operatorname{tg}x$ na $(0,\frac{\pi}{2})$ **19.** $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$ **20.** Vyjádřete sin a cos pomocí exponenciely (i v dalších příkladech). **21.** π pro n liché, 0 pro n sudé **22.** $\frac{\pi}{2^n}$

XX. Obsahy ploch a délky křivek

1. Najděte obsahy ploch ohraničených křivkami (všechny parametry jsou kladné):
(a) $ax=y^2$, $ay=x^2$ (b) $y=x^2$, $x+y=2$ (c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (d) $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ $(AC-B^2>0)$
2. Najděte obsahy ploch ohraničených parametricky zadanými křivkami:
(a) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(t\in[0,2\pi])$ a $y=0$ (b) $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$
(c) $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$
3. Najděte obsahy ploch ohraničených křivkami zadanými v polárních souřadnicích:
(a) $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (b) $r=a(1+\cos\varphi)$ (c) $r=a\sin 3\varphi$
4. Pomocí polárních souřadnic či vhodné parametrizace najděte obsahy ploch ohraničených křivkami (a) $x^3+y^3=3axy$ (b) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ (c) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (d) $x^4+y^4=ax^2y$
5. Spočtěte délky křivek
(a) $y=x^{\frac{3}{2}}$ $(0\le x\le 4)$ (b) $y=e^x$, $(0\le x\le x_0)$ (c) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\log y$ $(1\le y\le e)$
(d) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (e) $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$ (f) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ (g) $r=a\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$ (h) $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $1\le r\le 3$

Výsledky a návody. **1.** (a) $\frac{a^2}{3}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) πab (d) $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$ (pokud $C>0$) **2.** (a) $3\pi a^2$ (b) $\frac{16}{3}$ ($t\in[0,2]$) (c) $6\pi a^2$ **3.** (a) a^2 (b) $\frac{3}{2}\pi a^2$ (c) $\frac{\pi}{4}a^2$ **4.** (a) $3a^2$ (b) $2\pi a^2\sqrt{2}$ (c) $\frac{3}{8}\pi a^2$ (d) $\frac{\pi}{4}a^2$ (parametrizovat tak, že $y=tx$) **5.** (a) $\frac{8}{27}(\sqrt{1000}-1)$ (b) $\sqrt{e^{2x_0}+1}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{e^{2x_0}+1}-1}{\sqrt{e^{2x_0}+1}}-\sqrt{2}-\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ (c) $\frac{1}{4}(e^2+1)$ (d) $6a$ (e) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\log(\sqrt{2}-1)$ (f) $2\pi^2 a$ (g) $a(\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\log(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}))$ (h) $2+\frac{1}{2}\log 3$

Test číslo 3 – první verze

1. Položme $f(x,y)=\begin{cases} x+|x|^\alpha+|y|^\alpha & \text{má-li tento výraz smysl,}\\ x & \text{jinak.}\end{cases}$

(a) Určete, pro která $\alpha\in\mathbb{R}$ je f spojitá v bodě $(0,0)$. (5 bodů)

(b) Zjistěte, pro která $\alpha\in\mathbb{R}$ existují $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, a spočtěte je. (7 bodů)

(c) Zjistěte, pro která $\alpha\in\mathbb{R}$ má f v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, a určete ho. (8 bodů)

Řešení. (a) Pro $\alpha>0$ je f zřejmě spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ (z vět o spojitosti elementárních funkcí a věty o spojitosti součtu). Pro $\alpha=0$ je $f(x,y)=x+2$ pro každé (x,y), což je opět funkce spojitá na celém $\mathbb{R}^2$. Pokud $\alpha<0$, pak dle definice f máme $f(0,0)=0$, $f(x,x)=x+2|x|^\alpha$ pro $x\neq 0$, a tedy $\lim\limits_{x\to 0+} f(x,x)=+\infty$. Proto f není spojitá v $(0,0)$.

Závěr: f je spojitá v $(0,0)$, právě když $\alpha\geq 0$.

(b) Pokud $\alpha<0$, pak platí, dle definice f, $f(x,0)=x$ pro každé x, $f(0,y)=0$ pro každé y. Tedy, z definice praciálních derivací plyne, že $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Pokud $\alpha=0$, pak $f(x,y)=x+2$ na celém $\mathbb{R}^2$, a tedy opět $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Zbývá případ $\alpha>0$. Pak počítejme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ dle definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+|x|^\alpha}{x}=\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sgn}x\cdot|x|^{\alpha-1})\quad\begin{cases}=1 & \alpha>1\\ \text{neexistuje} & \alpha\leq 1\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|^\alpha}{y}=\lim_{y\to 0}(\operatorname{sgn}y\cdot|y|^{\alpha-1})\quad\begin{cases}=0 & \alpha>1\\ \text{neexistuje} & \alpha\leq 1\end{cases}$$

Závěr: Pro $\alpha\in(0,1]$ parciální derivace v $(0,0)$ neexistují, jinak je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

(c) Pro $\alpha<0$ není f v $(0,0)$ spojitá (viz (a)), a tedy nemá totální diferenciál. Pro $\alpha\in(0,1]$ nemá f v $(0,0)$ parciální derivace (viz (b)), a tedy nemá totální diferenciál.

Pro $\alpha=0$ je $f(x,y)=x+2$, a tedy $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ na celém $\mathbb{R}^2$, tedy parciální derivace jsou spojité na $\mathbb{R}^2$, a proto má f totální diferenciál dokonce v každém bodě. Přitom zřejmě $\mathrm{d}f(0,0)(h,k)=h$.

Nyní uvažujme $\alpha>1$. Pokud diferenciál existuje, pak má tvar $\mathrm{d}f(0,0)(x,y)=x$. Zda je toto totální diferenciál, zjistíme z definice:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x|^\alpha+|y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|x|^{\alpha-1}\cdot\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|y|^{\alpha-1}\cdot\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

protože $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|x|^{\alpha-1}=0$ a $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1$, podobně pro druhou limitu.

Závěr: Pokud $\alpha=0$ nebo $\alpha>1$, pak $\mathrm{d}f(0,0)(x,y)=x$, jinak $\mathrm{d}f(0,0)$ neexistuje.

2. Nechť $g = g(x,y)$ má totální diferenciál v bodě $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Buď $f(r,\varphi) = g(-r\cos\varphi, r^2 \sin\varphi)$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, víte-li, že $\frac{\partial f}{\partial r}(\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi) = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi) = -1$. (15 bodů)

Řešení. Z věty o derivaci složené funkce dostaneme, že v bodě $(\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi)$ platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot (-\cos\varphi) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot (2r\sin\varphi)\\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot (r\sin\varphi) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot (r^2\cos\varphi)\end{aligned}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostaneme

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial x} + \sqrt{3}\frac{\partial g}{\partial y}\\ -1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\frac{\partial g}{\partial y},\end{aligned}$$

a tedy $\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{2}{5\sqrt{3}}$, $\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{4}{5\sqrt{3}}$.

3. Na maximálních intervalech existence vyjádřete pomocí elementárních funkcí primitivní funkci $\int \frac{1}{x} \operatorname{tg}^2 \sqrt{\log x^2 + 15}\,\mathrm{d}x$ (15 bodů)

Řešení. Nejprve zjistěme intervaly spojitosti integrandu. Funkce tg je spojitá na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkoumejme tedy, kdy $\sqrt{\log x^2 + 15} \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Pokud $k < 0$, pak to platit nemůže (nalevo je nezáporné číslo), pokud $k = 0$, pak mus9 být $\sqrt{\log x^2 + 15} \in [0, \frac{\pi}{2})$, tedy $\log x^2 + 15 \in [0, \frac{\pi^2}{4})$, neboli $\log x^2 \in [-15, \frac{\pi^2}{4} - 15)$, tedy $x^2 \in [e^{-15}, e^{\frac{\pi^2}{4} - 15})$, neboli $|x| \in [e^{-\frac{15}{2}}, e^{\frac{\pi^2}{8} - \frac{15}{2}})$. Pokud $k > 0$, musí být $\log x^2 + 15 \in ((-\frac{\pi}{2} + k\pi)^2, (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2)$, tedy $|x| \in (e^{\frac{1}{2}((-\frac{\pi}{2}+k\pi)^2 - 15)}, e^{\frac{1}{2}((\frac{\pi}{2}+k\pi)^2-15)})$. Tedy primitivní funkce bude existovat na intervalech $(e^{\frac{1}{2}((-\frac{\pi}{2}+k\pi)^2 - 15)}, e^{\frac{1}{2}((\frac{\pi}{2}+k\pi)^2-15)})$ a $(-e^{\frac{1}{2}((\frac{\pi}{2}+k\pi)^2-15)}, -e^{\frac{1}{2}((-\frac{\pi}{2}+k\pi)^2 - 15)})$ pro $k > 0$ a na intervalech $(e^{-\frac{15}{2}}, e^{\frac{\pi^2}{8} - \frac{15}{2}})$ a $(-e^{\frac{\pi^2}{8} - \frac{15}{2}}, -e^{-\frac{15}{2}})$.

Všimněme si, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log x^2 + 15) = \frac{2}{x}$, a tedy substitucí $y = \log x^2 + 15$ převedeme náš integrál na $\int \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y$. Nyní proveďme substituci $t = \sqrt{y}$, čili $y = t^2$, což povede na integrál $\int t \operatorname{tg}^2 t\,\mathrm{d}t$, a počítejme:

$$\begin{aligned}\int t \operatorname{tg}^2 t\,\mathrm{d}t &= \int t \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int t \cdot (\frac{1}{\cos^2 t} - 1)\,\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2} + \int \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{t^2}{2} + t\operatorname{tg} t - \int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2} + t \operatorname{tg} t + \log|\cos t| + C,\end{aligned}$$

tedy zpětným dosazením $\int \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{y}{2} + \sqrt{y} \operatorname{tg}\sqrt{y} + \log|\cos\sqrt{y}| + C$, a tedy
$\int \frac{1}{x} \operatorname{tg}^2 \sqrt{\log x^2 + 15}\,\mathrm{d}x = -\frac{\log x^2 + 15}{2} + \sqrt{\log x^2 + 15} \operatorname{tg}\sqrt{\log x^2 + 15} + \log|\cos\sqrt{\log x^2 + 15}| + C$
na výše uvedených intervalech.

Test číslo 3 – druhá verze

1. Položme $f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha + |y|^\alpha - y & \text{má-li tento výraz smysl,} \\ -y & \text{jinak.} \end{cases}$

(a) Určete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ je f spojitá v bodě $(0,0)$. (5 bodů)

(b) Zjistěte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ existují $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, a spočtěte je. (7 bodů)

(c) Zjistěte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ má f v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, a určete ho. (8 bodů)

Řešení. Stejně jako v první verzi dojdeme k výsledkům:

(a) f je spojitá v $(0,0)$, právě když $\alpha \geq 0$.

(b) Pro $\alpha \in (0,1]$ parciální derivace v $(0,0)$ neexistují, jinak je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.

(c) Pokud $\alpha = 0$ nebo $\alpha > 1$, pak $\mathrm{d}f(0,0)(x,y) = -y$, jinak $\mathrm{d}f(0,0)$ neexistuje.

2. Nechť $g = g(x,y)$ má totální diferenciál v bodě $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Buď $f(r,\varphi) = g(r^2\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, víte-li, že $\frac{\partial f}{\partial r}(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}) = -1$ a $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}) = 1$. (15 bodů)

Řešení. Z věty o derivaci složené funkce dostaneme, že v bodě $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot (2r\cos\varphi) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot (\sin\varphi) \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot (-r^2\sin\varphi) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot (r\cos\varphi) \end{aligned}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostaneme

$$\begin{aligned} -1 &= \sqrt{3}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial y}, \end{aligned}$$

a tedy $\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{2}{5\sqrt{3}}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{4}{5\sqrt{3}}$.

3. Na maximálních intervalech existence vyjádřete pomocí elementárních funkcí primitivní funkci

$\int e^x \operatorname{cotg}^2 \sqrt{e^{x+1} - 1}\,\mathrm{d}x$ (15 bodů)

Řešení. Nejprve zjistěme intervaly spojitosti integrandu. Funkce cotg je spojitá na $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkoumejme tedy, kdy $\sqrt{e^{x+1} - 1} \in (k\pi, (k+1)\pi)$. Protože na levé straně je nezáporné číslo, musí být $k \geq 0$. Pak dostáváme $e^{x+1} - 1 \in (k^2\pi^2, (k+1)^2\pi^2)$, neboli $e^{x+1} \in (k^2\pi^2 + 1, (k+1)^2\pi^2 + 1)$, tedy $x + 1 \in (\log(k^2\pi^2 + 1), \log((k+1)^2\pi^2 + 1))$, neboli $x \in (\log(k^2\pi^2 + 1) - 1, \log((k+1)^2\pi^2 + 1) - 1)$, což jsou tedy maximální intervaly existence naší primitivní funkce.

Všimněme si, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x+1} - 1) = e^{x+1} = e \cdot e^x$, a tedy můžeme provést substituci $y = e^{x+1} - 1$, čímž náš integrál převedeme na $\int \frac{1}{e} \operatorname{cotg}^2 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y$. Dále proveďme substituci $t = \sqrt{y}$, neboli $y = t^2$, pak integrál přejde na tvar $\int \frac{2}{e} t \operatorname{cotg}^2 t\,\mathrm{d}t$. Počítejme:

$$\begin{aligned} \int t \operatorname{cotg}^2 t\,\mathrm{d}t &= \int t \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int t \cdot (\frac{1}{\sin^2 t} - 1)\,\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2} + \int \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{t^2}{2} - t\operatorname{cotg} t + \int \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2} - t\operatorname{cotg} t + \log|\sin t| + C, \end{aligned}$$

tedy zpětným dosazením $\int \frac{1}{e}\operatorname{cotg}^2\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{y}{e} - \frac{2}{e}\sqrt{y}\operatorname{cotg}\sqrt{y} + \frac{2}{e}\log|\sin\sqrt{y}| + C$, a tedy

$$\int e^x \operatorname{cotg}^2\sqrt{e^{x+1}-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{x+1}-1}{e} - \frac{2}{e}\sqrt{e^{x+1}-1}\operatorname{cotg}\sqrt{e^{x+1}-1} + \frac{2}{e}\log|\sin\sqrt{e^{x+1}-1}| + C$$

na výše uvedených intervalech.

XXI. Vyšetřete konvergenci (absolutní, neabsolutní) následujících integrálů

1. a) $\int_0^1 x^{\log x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 x^{-\log x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ **4.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{e^{\sin x}-1}$ **6.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x-\cos x}$ **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int_\alpha^\beta \frac{\arcsin^2(\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^q x(1-\sin x)^p}$ **11.** $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ **12.** $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ **13.** $\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$
14. $\int_{e+1}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ **15.** $\int_0^\infty \frac{x^k}{1+x^t}\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int_1^\infty x^k\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$
18. $\int_0^\infty x^\alpha\operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\beta\operatorname{tg}^\gamma x\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$ **21.** $\int_0^\infty 2x\cos\left(x^4\right)\,\mathrm{d}x$
22. $\int_0^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\sin x\,\mathrm{d}x$ **23.** $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ **24.** $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ **25.** $\int_0^\infty \frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$
26. $\int_0^\infty x^\alpha\ln(1+x)\cos x\,\mathrm{d}x$ **27.** $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. **1.** a) diverguje, b) konverguje **2.** konverguje **3.** diverguje **4.** konverguje **5.** konverguje **6.** diverguje **7.** konverguje **8.** konverguje, pokud $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, diverguje, je-li jedno z α,β nekonečné **9.** konverguje, pokud $p < 1$ a $q < 1$ **10.** konverguje, pokud $q < 1$ a $p < \frac{1}{2}$ **11.** konverguje, pokud $p > 1$ a $q < 1$ **12.** konverguje, pokud $p > 1$ nebo $p = 1$ & $q > 1$ **13.** konverguje, pokud $p > 1$ & $r < 1$ nebo $p = 1$ & $q > 1$ & $r < 1$ **14.** konverguje, pokud $p > 1$ nebo $p = 1$ & $q > 1$ nebo $p = q = 1$ & $r > 1$ **15.** konverguje, pokud $-1 < k < t-1$ nebo $-1 > k > t-1$ **16.** konverguje, pokud $m < 3$ **17.** konverguje, pokud $k < -1$ **18.** konverguje, pokud $\alpha < -1 < \alpha+\beta$ **19.** konverguje, pokud $\alpha+\gamma > -1$ a $\beta-\gamma > -1$ **20.** konverguje (neabsolutně) **21.** konverguje (neabsolutně) **22.** konverguje (neabsolutně) **23.** konverguje pro $\alpha > 0$, absolutně pro $\alpha > 1$ **24.** konverguje pro $\alpha > 1$ **25.** konverguje pro $\alpha > 0$, absolutně pro $\alpha > 1$ **26.** konverguje pro $-2 < \alpha < 0$, absolutně pro $-2 < \alpha < -1$ **27.** konverguje absolutně

XXII. Stejnoměrná konvergence a její aplikace

1. Spočtěte limity: (a) $\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k}\cdot\frac{x^k}{x^k+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{k=1}^\infty (x^k - x^{k+1})$ (c) $\lim\limits_{x\to 0+}\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k k^x}$

2. Platí $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$, jestliže (a) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, (b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, (c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$? Jak je to se stejnoměrnou konvergencí f_n na $(0,1)$?

3. Dokažte, že funkce $\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^x}$ je $\mathcal{C}^\infty$ na $(1,\infty)$. Co lze říci o jejím průběhu?

4. Nechť $\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ je posloupnost reálných čísel. Položme $\zeta_{\boldsymbol{a}}(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{a_k}{k^x}$. Co lze říci o definičním oboru, spojitosti a derivacích funkce $\zeta_{\boldsymbol{a}}$?

5. Nechť $f(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{x}{k^p+x^2k^q}$, kde $p,q \ge 0$. Dokažte, že (i) f je spojitá na $(0,\infty)$, je-li $\max(p,q) > 1$, (ii) f je spojitá na $\mathbb{R}$, je-li $p+q > 2$. (iii)* Vyšetřete definiční obor a spojitost f v závislosti na p,q.

6. V kterých bodech má derivaci funkce (a) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k+x}$ (b) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{|x|}{k^2+x^2}$

7. Dokažte, že $f(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k^3}$ má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou f'' na $(0,2\pi)$.

Výsledky a návody. **1.** (a) $\frac{1}{2}\log 2$ (řada konverguje stejnoměrně na $[0,1]$) (b) 1 (konvergence není stejnoměrná) (c) 1 (konvergence je stejnoměrná) **2.** (a) $f_n(x) \to 0$ na $[0,1]$, $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \to \frac{1}{2}$, tedy konvergence není stejnoměrná. (b) $f_n(x) \to 0$ na $[0,1]$, nikoli stejnoměrně, avšak $\int_0^1 f_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \to 0$ (c) $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$, tedy lze zaměnit. **3.** Řada k-tých derivací konverguje stejnoměrně na $(1+\varepsilon,\infty)$ pro každé $\varepsilon > 0$ a každé k. Funkce je klesající, konvexní, $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+}\zeta(x) = +\infty$. **4.** Nechť $c = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$. Pokud $c < 1$, pak je funkce $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}$, pokud $c > 1$, má prázdný definiční obor. Pokud $c = 1$, může být definiční obor $\mathbb{R}$, $\emptyset$, (a,∞), nebo $[a,\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$. V prvním případě je $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}$, v posledních dvou na (a,∞). Na svém definičním oboru je vždy spojitá. **5.** (iii) Pokud $\max(p,q) \le 1$, pak $D_f = \{0\}$, jinak $D_f = \mathbb{R}$. Pro $\max(p,q) > 1$ je f spojitá n $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, v 0 je spojitá, právě když $p > 1$ nebo $p + q > 2$. **6.** (a) f je definována na $\mathbb{R}\setminus\{-n \mid n\in\mathbb{N}\}$ a v každém bodě svého definičního oboru má derivaci. (b) f je spojitá na $\mathbb{R}$, derivaci má všude kromě bodu 0, kde jsou jednostranné derivace různé.

Test číslo 4 – první verze

1. Spočtěte $\displaystyle\int_0^{134\pi}\frac{\mathrm{d}x}{7+4\cos x}$ (16 bodů)

Řešení. Nejprve si uvědomme, že integrovaná funkce je 2π-periodická, a tedy si můžeme „zkrátit“ interval integrace:

$$\int_0^{134\pi}\frac{\mathrm{d}x}{7+4\cos x} = \sum_{k=0}^{66}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{7+4\cos x} = \sum_{k=0}^{66}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}y}{7+4\cos(y-2k\pi)} = 67\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{7+4\cos x}.$$

Počítejme tedy $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{7+4\cos x}$. Proveďme substituci „$y = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$“. Pak máme

$$x = 2\operatorname{arccotg} y, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{2}{1+y^2}, \qquad y\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{2}{\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}-1}{\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{y^2-1}{y^2+1},$$

a tedy podle druhé substituční metody platí

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{7+4\cos x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y}{7+4\frac{y^2-1}{y^2+1}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}y}{11y^2+3} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\cdot\sqrt{\frac{3}{11}}\cdot\sqrt{\frac{11}{3}}\,\mathrm{d}y}{3\left(\left(\sqrt{\frac{11}{3}}y\right)^2+1\right)}$$

$$= \left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{11}}\operatorname{arctg}\left(y\sqrt{\frac{11}{3}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{33}}.$$

A tedy původní integrál má hodnotu $67\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{33}} = \frac{134\pi}{\sqrt{33}}$.

2. Spočtěte délku grafu funkce $f(x) = \log\cos x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$. (16 bodů)

Řešení. Délka grafu je rovna

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

Nyní můžeme například použít substituci „$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$“. Pak máme

$$x = 2 \operatorname{arctg} y, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2}{1+y^2}, \qquad y \in \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right),$$
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

tedy po substituci dostaneme

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_{-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} \frac{\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y}{\frac{1-y^2}{1+y^2}} = \int_{-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} \frac{2\,\mathrm{d}y}{1-y^2} = \int_{-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) \mathrm{d}y$$
$$= \left[\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|\right]_{-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = \log\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right| - \log\left|\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right| = 2\log\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}.$$

Ještě bychom mohli spočítat $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$:

$$1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}},$$
$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - 1 = 0, \qquad \text{tedy}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.$$

Výsledek lze tedy přepsat ve tvaru $2\log\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

3. Zjistěte, pro které hodnoty parametru α existuje Newtonův integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{(15+x)^{2\alpha}}{x^{\alpha+2}} \cdot (\sin 3x - 3\sin x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(18 bodů)}$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá na $(0,\infty)$, tedy stačí vyšetřit její chování v pravém okolí 0 a v okolí $+\infty$.

Nejprve vyšetřeme chování funkce v pravém okolí 0. Platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{3\cos 3x - 3\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-9\sin 3x + 3\sin x}{6x} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4,$$
$$\lim_{x\to 0+} (15+x)^{2\alpha} = 15^{2\alpha},$$

odkud plyne jednak, že integrovaná funkce je na jistém pravém okolí 0 záporná, a proto nemění znaménko, a pak podle srovnávacího kritéria $\int_0^1 \frac{(15+x)^{2\alpha}}{x^{\alpha+2}} \cdot (\sin 3x - 3\sin x)\,\mathrm{d}x$ existuje, právě když existuje $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha-1}}$, což nastává právě pro $\alpha < 2$.

Nyní se věnujme chování v okolí $+\infty$. Funkce $\sin 3x - 3\sin x$ má omezenou primitivní funkci (a to $-\frac{1}{3}\cos 3x + 3\cos x$). Dále pro $\alpha < 2$ je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(15+x)^{2\alpha}}{x^{\alpha+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\frac{15}{x}+1)^{2\alpha} x^{2\alpha}}{x^{\alpha+2}} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{15}{x}+1)^{2\alpha} x^{\alpha-2} = 0,$$

a navíc je funkce $\frac{(15+x)^{2\alpha}}{x^{\alpha+2}}$ na jistém okolí $+\infty$ klesající, protože její derivace (podle x) je

$$\frac{2\alpha(15+x)^{2\alpha-1}\cdot x^{\alpha+2} - (15+x)^{2\alpha}\cdot(\alpha+2)x^{\alpha+1}}{x^{2\alpha+4}} = \frac{(15+x)^{2\alpha-1}\cdot x^{\alpha+1}}{x^{2\alpha+4}} \cdot (2\alpha x - (\alpha+2)(15+x))$$
$$= \frac{(15+x)^{2\alpha-1}\cdot x^{\alpha+1}}{x^{2\alpha+4}} \cdot (x(\alpha-2) - 15(\alpha+2)),$$

což je na nějakém okolí $+\infty$ zřejmě záporné. Tedy pro $\alpha < 2$ $\int_1^{+\infty} \frac{(15+x)^{2\alpha}}{x^{\alpha+2}} \cdot (\sin 3x - 3\sin x)\,\mathrm{d}x$ existuje dle Dirichletova kritéria.
Závěr: Integrál ze zadání existuje, právě když $\alpha < 2$.

TEST ČÍSLO 4 – DRUHÁ VERZE

1. Spočtěte $\displaystyle\int_0^{126\pi} \frac{\mathrm{d}x}{8+5\sin x}$ (16 bodů)

Řešení. Podobně jako v první verzi z 2π-periodičnosti integrované funkce plyne

$$\int_0^{126\pi} \frac{\mathrm{d}x}{8+5\sin x} = 63\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{8+5\sin x}.$$

Dále k výpočtu použijme substituci „$y = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$“. Pak máme

$$x = 2\operatorname{arccotg} y, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{2}{1+y^2}, \qquad y \in (-\infty, +\infty)$$
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2y}{1+y^2}$$

a tedy podle druhé substituční metody platí

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{8+5\sin x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y}{8+5\frac{2y}{1+y^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}y}{8+8y^2+10y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(2y+\frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16}+4}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(2y+\frac{5}{4})^2+\frac{231}{16}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16}{231}\frac{\mathrm{d}y}{\left(\frac{8y+5}{\sqrt{231}}\right)^2+1}$$
$$= \left[\frac{16}{231}\frac{\sqrt{231}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{8y+5}{\sqrt{231}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi\sqrt{231}.$$

A tedy původní integrál má hodnotu $63\cdot 2\pi\sqrt{231} = 126\pi\sqrt{231}$.

2. Spočtěte délku grafu funkce $f(x) = \log\sin x$ na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$. (16 bodů)

Řešení. Délka grafu je rovna

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

Nyní můžeme například použít substituci „$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$“. Pak máme

$$x = 2\operatorname{arctg} y, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2}{1+y^2}, \qquad y \in \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, \operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\right),$$
$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2},$$

tedy po substituci dostaneme

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi} \frac{\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y}{\frac{2y}{1+y^2}} = \int_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi} \frac{\mathrm{d}y}{y}$$
$$= [\log|y|]_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}^{\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi} = \log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right|$$

Jako v první verzi zjistíme, že $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, a dále

$$\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} - 1 + 1}{1 - \sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$

a tedy výsledek lze přepsat ve tvaru $\log\frac{\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} = 2\log\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

3. Zjistěte, pro které hodnoty parametru α existuje Newtonův integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+7)^{2\alpha+3}}\cdot(\cos 2x - \cos x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(18 bodů)}$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá na $(0,\infty)$, tedy stačí vyšetřit její chování v pravém okolí 0 a v okolí $+\infty$.

Nejprve vyšetřeme chování funkce v pravém okolí 0. Platí

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0+}\frac{-2\sin 2x + \sin x}{2x} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to 0+}(x+7)^{2\alpha+3} = 7^{2\alpha+3},$$

a tedy integrovaná funkce je v jistém pravém okolí 0 záporná, a navíc podle srovnávacího kritéria $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{(x+7)^{2\alpha+3}}\cdot(\cos 2x - \cos x)\,\mathrm{d}x$ existuje, právě když existuje $\int_0^1 x^{\alpha+2}\,\mathrm{d}x$, což nastává, právě když $\alpha > -3$.

Nyní se věnujme chování v okolí $+\infty$. Funkce $\cos 2x - \cos x$ má omezenou primitivní funkci (a to $\frac{1}{2}\sin 2x - \sin x$). Navíc pro $\alpha > -3$ platí $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{(x+7)^{2\alpha+3}} = 0$, a podobně jako v první verzi zjistíme pomocí derivace, že funkce $\frac{x^\alpha}{(x+7)^{2\alpha+3}}$ je (pro $\alpha > -3$) na jistém okolí $+\infty$ klesající, a tedy podle Dirichletova kritéria $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(x+7)^{2\alpha+3}}\cdot(\cos 2x - \cos x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Závěr: integrál ze zadání existuje, právě když $\alpha > -3$.

XXIII. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností a řad

1. $x^n - x^{n+1}$, $x\in[0,1]$, **2.** $x^n - x^{2n}$, $x\in[0,1]$ **3.** $\frac{1}{x+n}$, $x\in(0,+\infty)$ **4.** $\frac{nx}{1+n+x}$, $x\in[0,1]$

5. $\frac{x^n}{1+x^n}$, *a)* $x\in[0,1-\varepsilon]$, *b)* $x\in[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$, *c)* $x\in[1+\varepsilon,+\infty)$, kde $\varepsilon\in(0,1)$

6. $\frac{2nx}{1+n^2x^2}$, *a)* $x\in[0,1]$, *b)* $x\in(1,+\infty)$ **7.** $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x\in\mathbb{R}$ **8.** $\frac{\sin nx}{n}$, $x\in\mathbb{R}$, **9.** $\sin\frac{x}{n}$, $x\in\mathbb{R}$.

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx}{1+k^5x^2}$ **11.** $\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{x^2}{k\log^2 k}\right)$ **12.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$ **13.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin kx}{\sqrt{k+x}}$