I. Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$ splňujících nerovnost

1. $|x+1|+|x-2| \leq 4$ **2.** $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$ **3.** $\frac{x-1}{x+2} < \frac{x}{x+1}+1$
4. $\sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x^2+3x-4}$ **5.** $1 \leq |ax+1| < 2,\ a \in \mathbb{R}$ **6.** $ax^2+bx+c \geq 0,\ a,b,c \in \mathbb{R}$
7. $\cos x \leq \sin x$ **8.** $\cos^2 x > \sin^2 x$ **9.** $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-3x+3\right) \geq 0$

Dokažte indukcí následující rovnosti a nerovnosti

10. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ **11.** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **12.** $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{n}{2}x \sin\frac{n+1}{2}x$
13. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ **14.** $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},\ n>1$ **15.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
16. $|\sin\sum\limits_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k,\ x_1,\ldots,x_n \in [0,\pi]$ **17.** $2^n \geq n^2,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{3\}$

II. Zobrazení a suprema

1. Platí výrok $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R})(|a-b+c| \geq |a|-|b|-|c|)$?
2. Nechť $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Nalezněte $D_f,\ H_f,\ f^{-1}$.
3. Nechť $\varphi :< 0,\infty) \to < 1,\infty)$ je bijekce a $\psi(x)=\sqrt{\varphi^2(x)-1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1}, a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Co je $D_{\psi^{-1}}$?
4. Vyšetřete z hlediska monotonie (bez užití derivace) následující funkce a načrtněte jejich graf:
a) $f(x)=\frac{3x+2}{2x-3}$ *c)* $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$
b) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ *d)* $f(x)=2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x$
5. Nechť $f: X \to Y,\ A, B \subset X$. Platí obecně a) $f(A)\cup f(B)=f(A\cup B)$; b) $f(A\setminus B) \subset f(A)\setminus f(B)$; c) $f(A)\setminus f(B) \subset f(A\setminus B)$; d) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$?
Jak je to v případě, že $A, B \subset Y$ a místo f píšeme v a)–d) f^{-1}?
6. Charakterizujte zobrazení $f: M \to L$, pro která platí
a) $(\forall A \subset M)(f^{-1}(f(A))=A)$; b) $(\forall B \subset L)(f(f^{-1}(B))=B)$.
7. Platí výrok $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R})(|a-b+c| \geq |a|-|b|-|c|)$?
8. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ a $S=\sup A$, $s=\inf A$, $T=\sup B$, $t=\inf A$. Co lze říci o supremu množin $A\cup B$, $A\cap B$, $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$, $-A=\{-a \mid a\in A\}$, $A\cdot B=\{a\cdot b \mid a\in A, b\in B\}$, $A-B$, $A\setminus B$, $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$?

III. Spočtěte následující limity posloupností

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+n\cdot\sin 2n}{n\cdot\cos 3n+(6n+\sin 4n)^2}$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}[kx]}{n^2},\ x\in\mathbb{R}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$ **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ **6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n},\ (A,B,C>0)$ **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a},\ (a\geq 0)$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$ **10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\right)$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, kde $a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ **14.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, kde $a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2-a_n}$
15. Pro která $x\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$? Totéž pro $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx$.
16. Pro které posloupnosti reálných čísel platí obecně, že

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists k)(\forall n>b_k)(|a_n-A|\leq\varepsilon)\ ?$$

IV. Spočtěte limity

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i\sqrt{n+i}$, pokud $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{37+i}{\ln(n+1)} \cdot \left(\frac{1+2i}{\sqrt{5}}\right)^n$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{\sqrt{n^7}+\sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7}-\sqrt[3]{n^7}})$ **5.** Spočtěte v závislosti na $k,l\in\mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ **7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ **9.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\log_{10} n}$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n-i}{2+in}\right)$ **13.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1+i\sqrt{3})^{3n-2}}{8^n-1}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i}{n}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ **15.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) + \frac{i}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$ **16.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

17. Dokažte, že součin $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots$ má konečnou nenulovou hodnotu.

18. Nechť $p\in\mathbb{N}$, $a_n\geq 0$. Dokažte, že $a_n\to a \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n}\to\sqrt[p]{a}$.

19. Dokažte: $(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a, x_n>0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a$.

V. Vyšetřete konvergenci následují cí ch řad:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{k^k}$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{k}{k\sqrt{2}+1}$ **5.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$ **6.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k$

Zjistěte, pro které hodnoty parametrů konvergují následují cí řady:

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\ln x}$, $x\in\mathbb{R}$ **8.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{k^\alpha+1}{k^\beta+1}$, $0\leq\alpha\leq\beta$

10. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x\in\mathbb{R}$ **11.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!e^k}{k^k}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x\in\mathbb{R}$ **12.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kxe^{-kx}\cos kx$, $x\in\mathbb{R}$

13. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$, $x\in\mathbb{R}$ **14.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{\sqrt{k}\ln k}$, $x\in\mathbb{R}$ **15.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k}$, $z\in\mathbb{C}$

16. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)\sqrt[k]{\frac{x^2}{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$

Vyšetřete konvergenci (absolutní, neabsolutní) následují cí ch řad:

17. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k\sin k}{k^2+1}$ **18.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k\sin^2 k}{k^2+1}$ **19.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[k]{k}}{\ln k}$

20. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+1}\frac{\sinh k^2+\cosh k^2}{\cosh k^2+1}$ **21.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+\sqrt{k}}$, $z\in\mathbb{C}$

VI. Vyšetřete konvergenci (absolutní, neabsolutní) následujících řad

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^k}{a^k k^2}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos k}{2+\cos k}\right)^{2k-\ln k}$ **3.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ **4.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ **5.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right)$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ **8.** $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\ldots$ $(a,b,d>0)$ **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!e^k}{k^{k+p}}$

10. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!k^{-p}}{q(q+1)\ldots(q+k)}$ $(q>0)$ **11.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+k-1)}{k!k^q}$ **12.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^p \cdot \frac{1}{n^q}$

13. Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k)^2 < \infty$. Dokažte, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ konverguje absolutně.

Test číslo 1 – první verze

1. Spočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)\cdot\sqrt{n}.$ (15 bodů)

Řešení. Naše posloupnost je součinem dvou posloupností, vyšetříme každou zvlášť. Zřejmě platí

$$3=\sqrt[n]{3^n}\le\sqrt[n]{2^n+3^n}\le\sqrt[n]{2\cdot 3^n}=3\cdot\sqrt[n]{2}\longrightarrow 3,$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$ podle věty o policajtech. Druhou část můžeme upravit:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)\cdot\sqrt{n}&=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)\cdot\sqrt{n}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)\cdot\sqrt{n}\\&=\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}\right),\end{aligned}$$

kde oba zlomky mají limitu $\frac{1}{2}$, tedy limita druhé části je 0. Podle věty o limitě součinu je tedy limita posloupnosti v zadání $3\cdot 0=0$.

2. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ v závislosti na $x\in\mathbb{R}$. (15 bodů)

Řešení. Nejprve spočtěme

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|^2\sqrt[k]{|x|}}{\sqrt[k]{2k+1}}=|x|^2.$$

Tedy pro $|x|<1$ řada konverguje absolutně (Cauchyho odmocninové kritérium) a pro $|x|>1$ diverguje (limita k-tého členu není 0). Zbývá případ $|x|=1$, tj. $x=1$ nebo $x=-1$. V těchto případech jde o řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ resp. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$, tedy řada pravidelně střídá znaménka a navíc posloupnost $\frac{1}{2k+1}$ je klesající a má limitu 0. Tedy podle Leibnizova kritéria řada konverguje. Řada absolutních hodnot má v obou případech tvar $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$, která diverguje, neboť ji lze srovnat s harmonickou řadou, tj.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{2k+1}}{\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}>0.$$

Shrňme výsledek: Pro $|x|<1$ řada konverguje absolutně, pro $|x|=1$ konverguje, ale ne absolutně, pro $|x|>1$ diverguje.

3. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{2k\pi}{3}\sqrt[k]{x^2-2x+1}\left(\frac{k^3}{k^2+1}-k\right)$ v závislosti na $x \in \mathbb{R}$. (20 bodů)

Řešení. Nejprve si všimněme, že pro $x = 1$ jsou všechny členy řady nulové, a tedy zřejmě řada konverguje absolutně. Dále předpokládejme $x \neq 1$. Pak $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$, a tedy $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{x^2-2x+1} = 1$ a navíc je tato posloupnost monotónní (klesající pro $|x-1| > 1$, konstantní pro $|x-1| = 1$, rostoucí pro $|x-1| < 1$). Tedy, podle Abelova kritéria, naše řada konverguje, právě když konverguje řada $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{2k\pi}{3}\left(\frac{k^3}{k^2+1}-k\right)$. Ta už nezávisí na x. Člen $\cos\frac{2k\pi}{3}$ nabývá střídavě hodnot $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$, a tedy má omezené částečné součty (střídavě $-\frac{1}{2}, -1, 0$). Dále

$$\left(\frac{k^3}{k^2+1}-k\right) = \frac{-k}{k^2+1} = \frac{-1}{k+\frac{1}{k}},$$

což má zřejmě limitu 0. Navíc je tato posloupnost monotónní, protože

$$k + \frac{1}{k} < k + 1 + \frac{1}{k+1} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}.$$

Podle Dirichletova kritéria tedy řada $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{2k\pi}{3}\left(\frac{k^3}{k^2+1}-k\right)$ konverguje, a proto řada v zadání konverguje pro každé $x \neq 1$. Pokud jde o absolutní konvergenci, uvědomme si, že $|\cos\frac{2k\pi}{3}| \geq \frac{1}{2}$ pro každé k,

$$\left|\frac{k^3}{k^2+1}-k\right| = \frac{1}{k+\frac{1}{k}} \geq \frac{1}{k+1},$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{x^2-2x+1}\frac{1}{k+1}$ pro $x \neq 1$ diverguje, protože ji lze srovnat s harmonickou řadou (neboť, jak zmíněno výše, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{x^2-2x+1} = 1$).

Shrňme výsledky: Řada konverguje pro každé x, absolutně jen pro $x = 1$.

Test číslo 1 – druhá verze

1. Spočtěte limitu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n}\cdot\left(2\sqrt{n+2} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\cdot\sqrt{n}$. (15 bodů)

2. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ v závislosti na $x \in \mathbb{R}$. (15 bodů)

3. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{(4k+1)\pi}{6}\sqrt[k]{x^2}\left(\frac{k^2x^2}{k^2x^2+k}-1\right)$ v závislosti na $x \in \mathbb{R}$. (20 bodů)

VII. Spočtěte limity nebo dokažte, že neexistují

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ **5.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ **7.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$ **9.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $(m,n\in\mathbb{N})$

13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, $(n\in\mathbb{N})$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ **15.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $(m,n\in\mathbb{N}, a,b\in\mathbb{R})$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $(m,n\in\mathbb{N})$ **17.** $\lim\limits_{x\to 1}([x]-x)$ **18.** $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$ **19.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **21.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(\cos\alpha x)}{\log(\cos\beta x)}$

VIII. Spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{\log(x^{10}+x+1)}$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sqrt{|\cos\frac{1}{x}|}$ **7.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\log(x+1)-\sin\log x)$ **9.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(a,b,c>0)$ **10.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}$ **12.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ **13.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{i\cdot\arcsin x}{ix+\sin x-2x}$ **15.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ **16.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(1+2^x)\cdot\log(1+\frac{3}{x})$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}\cdot x^k$ **18.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$, **19.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

20. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby platilo $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

IX. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkcí

1. x^x **2.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **3.** $(\sin x)^{\cos x}$ **4.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$ **5.** $\arcsin(\sin x)$, **6.** $\log\arccos x$

7. $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ **8.** $\operatorname{arctg} e^x-\log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$ **9.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$

10. $(\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}$ **11.** $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{\ln|x|}} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

12. Spočtěte limity a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$, $(a>0)$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

X. Příklady na průběh funkcí

1. $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ **2.** $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ **3.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$

4. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$ **5.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$ **6.** $f(x)=\frac{x^4+8}{x^3+1}$

7. $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$ **8.** $f(x)=\frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ **9.** $f(x)=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$

10. $f(x)=\sin x+\cos^2 x$ **11.** $f(x)=|\sin x|+\cos 2x$ **12.** $f(x)=\exp(-x^2+3x-7)$

Na kruhu konvergence sečtěte mocninné řady

13. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ **14.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ **15.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k$ **16.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^2 x^k$ **17.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

18. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)}$ **19.** . $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(k+1)x^k$ **20.** $1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k$ **21.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{(4k)!}$

XI. Další příklady na průběh funkcí

1. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ **2.** $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **3.** $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$
4. $f(x) = \arcsin(\cos^2 x)$ **5.** $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ ***6.** $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$
***7.** $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2-1}}$ ***8.** $f(x) = \arcsin(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2})$
***9.** $f(x) = |\operatorname{arctg} \frac{1-x\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4}|$

XII. Spočtěte následující limity (pomocí l'Hospitalova pravidla či jinak):

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x}$ **4.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$
5. $\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$ **7.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$
9. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$ **10.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$
11. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{cotg}(x-a)}$ **12.** $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$, $a > 0$ **13.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right)$
14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\,\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$

XIII. Spočtěte následující limity pomocí Taylorova vzorce

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ **3.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $(a > 0)$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ **7.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$.

Test číslo 2 – první verze

1. Vypočtěte limitu (bez použití l'Hospitalova pravidla): $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ (15 bodů)

Řešení. Podle definice mocniny platí:

$$\left(\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}},$$

a tedy stačí spočítat

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} \log \frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}.$$

Zřejmě platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1+8^x+27^{x^2}}{3} = 1,$$

a přitom pro $x > 0$ platí $8^x > 1$ a $27^x > 1$, a tedy $\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3} > 1$, a tak podle věty o limitě složené funkce máme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}}{\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3} - 1} = 1,$$

a proto stačí vypočítat

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\left(\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}-1\right).$$

Výraz, jehož limitu nyní počítáme, si upravíme:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}-1\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{8^x+27^{x^2}-2}{x}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8^x-1}{x}+\frac{27^{x^2}-1}{x}\right)$$

Přitom platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\tfrac{8^x-1}{x}&=\lim_{x\to 0+}\tfrac{e^{x\log 8}-1}{x\log 8}\cdot\log 8=\log 8 \qquad \text{a}\\ \lim_{x\to 0+}\tfrac{27^{x^2}-1}{x}&=\lim_{x\to 0+}\tfrac{e^{x^2\log 27}-1}{x^2\log 27}\cdot x\log 27=0,\end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\left(\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}-1\right)=\frac{\log 8}{3}.$$

Ze spojitosti exponenciální funkce dostaneme konečně

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1+8^x+27^{x^2}}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\log 8}{3}}=\sqrt[3]{8}=2.$$

2. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci (včetně jednostranných derivací) ve všech bodech, v nichž existuje, pro funkci $f(x)=(x-2)^2\left|x^2-4\right|+\sqrt{1-e^{-x^4}}$. (15 bodů)

Řešení. Pišme $f(x)=g(x)+h(x)$, kde $g(x)=(x-2)^2\left|x^2-4\right|$ a $h(x)=\sqrt{1-e^{-x^4}}$. Funkce g je zřejmě definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$. Totéž platí pro funkci h, protože pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $-x^4\le 0$, a tedy $1-e^{-x^4}\ge 0$. A tedy f je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Pro $x\ne\pm 2$ (podle vět o derivaci součinu a složené funkce atp.) platí

$$\begin{aligned}g'(x)&=2(x-2)\left|x^2-4\right|+(x-2)^2\cdot 2x\cdot\operatorname{sgn}(x^2-4)=2(x-2)\operatorname{sgn}(x^2-4)(x^2-4+x^2-2x)\\&=4(x-2)\operatorname{sgn}(x^2-4)(x^2-x-2).\end{aligned}$$

V bodech ± 2 dopočítáme derivaci jako limitu derivace, což lze, neboť g je spojitá. Takto dostáváme:

$$\begin{aligned}g'(2)&=\lim_{x\to 2}g'(x)=0,\\ g'_+(-2)&=\lim_{x\to -2+}g'(x)=64 \qquad \text{a}\\ g'_-(-2)&=\lim_{x\to -2-}g'(x)=-64.\end{aligned}$$

Nyní se podívejme na funkci h. Pro $x\ne 0$ je $1-e^{-x^4}>0$, a tedy můžeme derivovat:

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-e^{-x^4}}}\cdot\left(-e^{-x^4}\right)\cdot(-4x^3)=\frac{2x^3e^{-x^4}}{\sqrt{1-e^{-x^4}}}.$$

Zbývá vyšetřit chování v bodě 0. K tomuto účelu počítejme

$$\lim_{x\to 0} h'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 e^{-x^4}}{\sqrt{1-e^{-x^4}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 e^{-x^4}}{\sqrt{\frac{e^{-x^4}-1}{-x^4}}\sqrt{x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x e^{-x^4}}{\sqrt{\frac{e^{-x^4}-1}{-x^4}}} = 0,$$

z čehož plyne, že $h'(0) = 0$. Nyní použijme větu o derivaci součtu a shrňme výsledky:

$$\begin{aligned}
f'(x) =& 4(x-2)\operatorname{sgn}(x^2-4)(x^2-x-2) + \tfrac{2x^3 e^{-x^4}}{\sqrt{1-e^{-x^4}}} \qquad \text{pro } x \neq 0, \pm 2,\\
f'(0) =& -16,\\
f'(2) =& \tfrac{16e^{-16}}{\sqrt{1-e^{-16}}},\\
f'_-(-2) =& -64 - \tfrac{16e^{-16}}{\sqrt{1-e^{-16}}},\\
f'_+(-2) =& 64 - \tfrac{16e^{-16}}{\sqrt{1-e^{-16}}}.
\end{aligned}$$

3. Vyšetřete průběh (tj. intervaly monotonie, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkávnosti, inflexní body a náčrtek grafu) funkce $f(x) = x + 2\sin x$. (20 bodů)
Řešení. Funkce f je zřejmě definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = 1 + 2\cos x \qquad \text{a} \qquad f''(x) = -2\sin x.$$

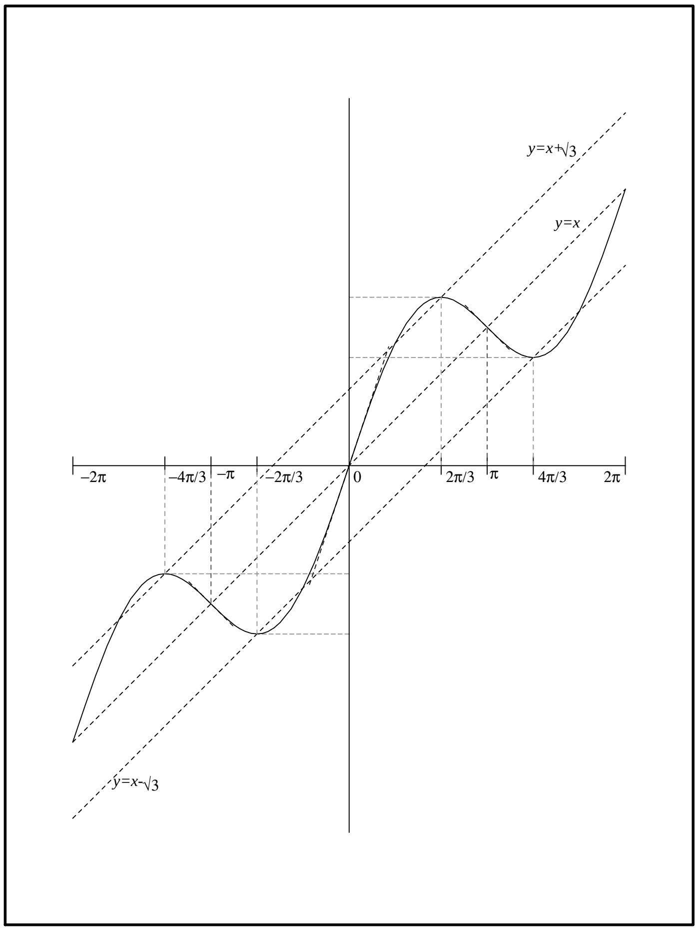
Nejprve vyšetřeme monotonii. Vidíme, že $f'(x) > 0$, právě když $\cos x > -\frac{1}{2}$, což nastává právě na intervalech $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Podobně, $f'(x) < 0$, právě když $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Odtud dostáváme, že

(1) f je rostoucí na intervalu $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$,
(2) f je klesající na intervalu $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$,
(3) v bodech $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ má f lokální minimum, $f(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}$,
(4) v bodech $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ má f lokální maximum, $f(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}$.

Nyní se věnujme konvexitě a konkávnosti. Zřejmě $f''(x) > 0$, právě když $\sin x < 0$, což nastává právě na intervalech $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Podobně $f''(x) > 0$, právě když $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. A tedy

(5) f je konvexní na intervalu $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$,
(6) f je konkávní na intervalu $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$,
(7) v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ má f inflexní bod, přitom $f(k\pi) = k\pi$, $f'(2k\pi) = 3$ a $f'((2k+1)\pi) = -1$.

Nyní už můžeme načrtnout graf. Doplňme ještě, že $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



– –

Test číslo 2 – druhá verze

1. Vypočtěte limitu (bez použití l'Hospitalova pravidla): $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1+27^x+8^{x^2}}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ (15 bodů)

Řešení. Postupujme stejně jako v první verzi, a vyjde nám $\sqrt[3]{27} = 3$.

2. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci (včetně jednostranných derivací) ve všech bodech, v nichž existuje, pro funkci $f(x) = (x+2)^2 \left| x^2 - 4 \right| + \sqrt{e^{x^4} - 1}$. (15 bodů)

Řešení. Analogicky jako v první verzi dojdeme k výsledku:

$$\begin{aligned}
f'(x) =& 4(x+2)\,\mathrm{sgn}(x^2-4)(x^2+x-2) + \tfrac{2x^3 e^{x^4}}{\sqrt{e^{x^4}-1}} \quad \text{pro } x \neq 0, \pm 2,\\
f'(0) =& 16,\\
f'(-2) =& -\tfrac{16e^{16}}{\sqrt{e^{16}-1}},\\
f'_-(2) =& -64 + \tfrac{16e^{16}}{\sqrt{e^{16}-1}},\\
f'_+(2) =& 64 + \tfrac{16e^{16}}{\sqrt{e^{16}-1}}.
\end{aligned}$$

3. Vyšetřete průběh (tj. intervaly monotonie, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkávnosti, inflexní body a náčrtek grafu) funkce $f(x) = x - 2\sin x$. (20 bodů)

Řešení. $f'(x) = 1 - 2\cos x$, $f''(x) = 2\sin x$, a tedy

(1) f je klesající na intervalu $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$,
(2) f je rostoucí na intervalu $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$,
(3) v bodech $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ má f lokální minimum, $f(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}$,
(4) v bodech $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ má f lokální maximum, $f(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}$.
(5) f je konvexní na intervalu $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$,
(6) f je konkávní na intervalu $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$,
(7) v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ má f inflexní bod, přitom $f(k\pi) = k\pi$, $f'(2k\pi) = -1$ a $f'((2k+1)\pi) = 3$.