I. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností a řad

1. $x^{n+1} - x^{n-1}$, $x \in [0,1]$, **2.** $x^n - x^{3n}$, $x \in [0,1]$ **3.** $\frac{1}{x+n}$ a) $x \in (0,+\infty)$, b) $x \in \mathbb{R}$
4. $\frac{nx}{1+n+x}$, $x \in [0,1]$ **5.** $\frac{x^n}{1+x^n}$, *a)* $x \in [0,1-\varepsilon]$, *b)* $x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, *c)* $x \in [1+\varepsilon,+\infty)$, kde $\varepsilon \in (0,1)$ **6.** $\frac{2nx}{1+n^2x^2}$, *a)* $x \in [0,1]$, *b)* $x \in (1,+\infty)$ **7.** $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ **8.** $\frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$,
9. $\sin\frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. **10.** $n\cdot\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, $x \in [0,\infty)$ **11.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{1+k^5x^2}$ **12.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{k\log^2 k}\right)$
13. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ **14.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin kx}{\sqrt{k+x}}$

Výsledky a návody. **1.** $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$ **2.** $f_n \to 0$ na $[0,1]$, stejnoměrně na $[0,1-\varepsilon]$ pro $\varepsilon \in (0,1)$, na žádném $[1-\varepsilon,1]$ konvergence není stejnoměrná. **3.** $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, stejnoměrně na (k,∞) pro každé $k \in \mathbb{R}$, na žádném $(-\infty,k)$ konvergence není stejnoměrná. **4.** $f_n \rightrightarrows x$ na $[0,1]$ (dokonce na $[0,k]$ pro $k \in (0,\infty)$, ale ne na okolí $+\infty$. **5.** $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$, a) stejnoměrně, b) nestejnoměrně, c) stejnoměrně. **6.** $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, stejnoměrně na $[\varepsilon,\infty]$ pro $\varepsilon > 0$, nestejnoměrně na $[0,\varepsilon]$. **7.** $f_n \rightrightarrows |x|$ na $\mathbb{R}$ **8.** $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$ **9.** $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, stejnoměrně na omezených intervalech, nestejnoměrně na okolích $\pm\infty$. **10.** $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x > 0 \end{cases}$, stejnoměrně na $[\varepsilon,\infty]$, $\varepsilon > 0$, nikoli na $[0,\varepsilon]$ **11.** Konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. **12.** Konverguje stejnoměrně na $[-n,n]$, $n > 0$, ne na okolích $\pm\infty$. **13.** Konverguje stejnoměrně na $[2n\pi+\varepsilon, 2(n+1)\pi-\varepsilon]$, $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in (0,\pi)$, nikoli na okolích $2n\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **14.** Konverguje stejnoměrně na $(-1,\infty)$.

II. Trigonometrické a Fourierovy řady

1. (a) Sečtěte trigonometrickou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.
(b) Spočtěte $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx \,\mathrm{d}x$ $(n = 0,1,2,\dots)$
2. Sečtěte trigonometrickou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$, kde $0 < q < 1$. Je tato řada F. ř. svého součtu?
3. Pro následující funkce najděte trigonometrickou řadu, jejímž jsou součtem, a výsledek aplikujte v uvedených bodech. (a) x^2 na $(-\pi,\pi)$, $x = 0$; (b) x na $(-\pi,\pi)$, $x = \frac{\pi}{2}$; (c) $\sin ax$ na $(-\pi,\pi)$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$, $x = \frac{\pi}{2}$; (d) x^2 na $(0,2\pi)$, $x = 0$.
4. Rozviňte funkci (a) $f(x) = x$ na $(0,\pi)$ v cosinovou řadu; (b) $f(x) = x^2$ na $(-\pi,0)$ v sinovou řadu.
5. Rozviňte následující funkce ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi,\pi)$ a určete součet všude, kde řada konverguje. (a) $\cos^{2m} x$, (b) $\frac{\sin mx}{\sin x}$, (c) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha^m \frac{\sin mx}{\sin x}$, kde $|\alpha| < 1$.
6. Dokažte, že pro $|x| < 1$ platí $\sin \pi x = \pi x \cdot \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$. (Rozviňte ve Fourierovu řadu funkci $\cos\alpha x$ na $(-\pi,\pi)$, aplikujte pro $x = \pi$, vyjádřete $\operatorname{cotg}\alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi}$ a výslednou rovnost integrujte.)

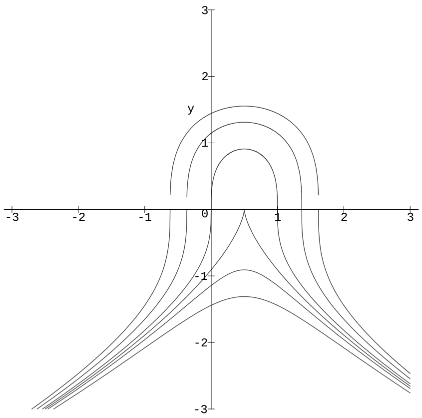
Výsledky a návody. **1.** a) $e^{\cos x}\cos(\sin x)$, b) 2π pro $n=0$, $\frac{\pi}{n!}$ pro $n\ge 1$. **2.** $\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$. Ano. **3.** a) $\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$. b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$. c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-a^2)}\cdot\sin\pi a\cdot\sin nx$; $\frac{\pi}{\cos\pi a}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{n+\frac12-a}+\frac{1}{n+\frac12+a}\right)$. d) $\frac{4\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. **4.** a) $\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot(-1)^n\cdot\frac{\pi}{n}+\frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\right)\sin nx$. **5.** a) $\frac{1}{2^{2m}}\cdot\binom{2m}{m}+\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\binom{2m}{m-n}\cos 2nx$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. b) Pro $m=2k$: $\sum\limits_{n=1}^{k}2\cos(2n-1)x$; pro $m=2k+1$: $1+\sum\limits_{n=1}^{k}2\cos 2nx$; konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. c) $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}\sin nx$, konverguje všude k f. **6.** $\cos\alpha x=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-\alpha^2)}\sin\pi\alpha\cos nx$; $\operatorname{cotg}\alpha\pi-\frac{1}{\alpha\pi}=\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$.

III. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic a určete množinu všech bodů z $\mathbb{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbb{R}$

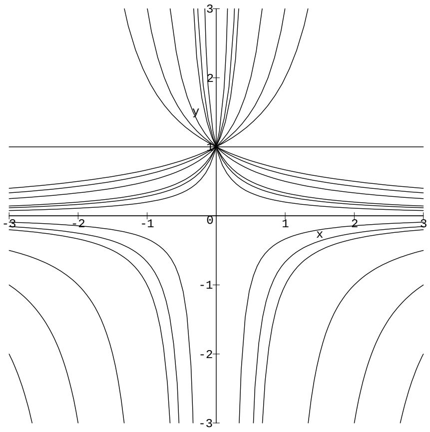
1. $y\cdot y'=\frac{1-2x}{y}$ **2.** $xy'+y=y^2$ **3.** $y'=10^{x+y}$ **4.** $e^{-y}(1+y')=1$ **5.** $y'=\frac{\cos x}{e^y}$
6. $y'+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0,\ x\in(-1,1)$ (*na zbylých intervalech) **7.** $y'\sin x=y\ln y,\ y(\frac{\pi}{2})=1$
8. $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2},\ y(0)=1$ **9.** $y-xy'=b(1+x^2y'),\ y(1)=1\ (b\in\mathbb{R})$

Výsledky a návody. **1.** $y_c=\sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x\in\mathbb{R}$, pro $c<-\frac14$; $y^{1,2}_{-1/4}=-\sqrt[3]{3}\cdot\left(x-\frac12\right)^{\frac23}$, $x\in(-\infty,\frac12)$; nebo $x\in(\frac12,\infty)$; $y_c^{1,2,3}=\sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x\in(-\infty,\frac12-\frac12\sqrt{1+4c})$, nebo $x\in(\frac12-\frac12\sqrt{1+4c},\frac12+\frac12\sqrt{1+4c})$, nebo $x\in(\frac12+\frac12\sqrt{1+4c},\infty)$, pro $c>-\frac14$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^3<-3(x-\frac12)^2\}$. **2.** $y_0=1$, $x\in\mathbb{R}$; $y_\infty=0$, $x\in\mathbb{R}$; $y_c^{1,2}=\frac{1}{1-cx}$, $x\in(-\infty,\frac1c)$ nebo $x\in(\frac1c,\infty)$, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=0 \text{ nebo } y=1\}$ (bodem $(0,1)$ prochází nekonečně mnoho řešení, ale jen jedno z nich je definováno na celém $\mathbb{R}$). **3.** $y_c=-\log_{10}(c-10^x)$, $x\in(-\infty,\log_{10}c)$, pro $c>0$; $\emptyset$. **4.** $y_\infty=0$, $x\in\mathbb{R}$; $y_c^1=-\log(1+e^{x-c})$, $x\in\mathbb{R}$, pro $c\in\mathbb{R}$; $y_c^2=-\log(1-e^{x-c})$, $x\in(-\infty,-c)$, pro $c\in\mathbb{R}$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\le 0\}$. **5.** $y_c=\log(\sin x+c)$, $x\in\mathbb{R}$, pro $c>1$; $y_c^k=\log(\sin x+c)$, $x\in(2k\pi-\arcsin c,(2k+1)\pi+\arcsin c)$, $k\in\mathbb{Z}$, pro $c\in(-1,1]$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>\log(\sin x+1) \text{ nebo } \sin x=-1\}$. **6.** $y_{-\frac32\pi}=-1$, $x\in(-1,1)$; $y_{\frac{\pi}{2}}=1$, $x\in(-1,1)$; $y_c=\begin{cases}x\cdot\sin c+\sqrt{1-x^2}\cdot\cos c & x\in(-1,-\sin c)\\ -1 & x\in[-\sin c,1)\end{cases}$ pro $c\in(-\frac32\pi,-\frac{\pi}{2})$; $y_c=\begin{cases}x\cdot\sin c+\sqrt{1-x^2}\cdot\cos c & x\in(\sin c,1)\\ 1 & x\in[-1,\sin c)\end{cases}$, pro $c\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $y_{-\frac{\pi}{2}}=-x$, $x\in(-1,1)$; $\emptyset$. **7.** $y_0=1$, $x\in\mathbb{R}$; $y_c^k=e^{c\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=1\}$ (body $(2k\pi,1)$, $k\in\mathbb{Z}$ prochází nekonečně mnoho řešení, ale jen jedno z nich je definované na celém $\mathbb{R}$). Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0. **8.** $y_0=x$, $x\in\mathbb{R}$; $y_\infty^{1,2}=-\frac1x$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$; $y_c^{1,2}=\frac{x+c}{1-cx}$, $x\in(-\infty,\frac1c)$ nebo $x\in(\frac1c,\infty)$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=y\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1^1. **9.** Pro $b=0$: $y_c=cx$, $x\in\mathbb{R}$, pro $c\in\mathbb{R}$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\ne 0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1. Pro $b\ne 0$: $y_0=b$, $x\in\mathbb{R}$; $y_c^{1,2}=b+\frac{cx}{1+bx}$, $x\in(-\infty,-\frac1b)$ nebo $x\in(-\frac1b,\infty)$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=b\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0, pokud $b=1$; neexistuje, pokud $b=-1$; $y^1_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b<-1$; $y^2_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b\in(-1,1)\cup(1,\infty)$.

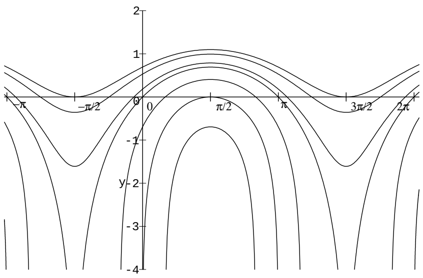
1.



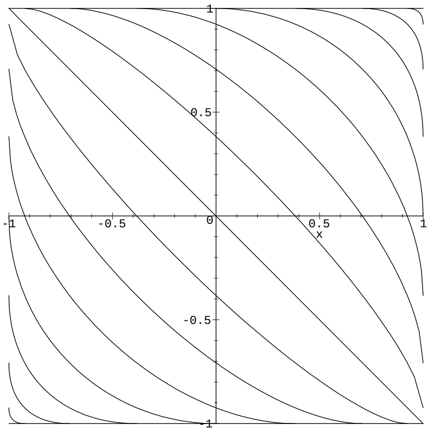
2.



5.



6.



IV. Řešte následující diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{2y}{x}$ **2.** $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ **3.** $y' = \frac{y}{x} - 1$ **4.** $y'x = y + x^2$ **5.** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
6. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ **7.** $xy' + y = \log x + 1$ **8.** $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ $(a \in \mathbb{R})$
9. $(2x+1)y' + y = x$ **10.** $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$ **11.** $y' + y \cos x = \sin 2x$ **12.** $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

- -

Výsledky a návody. **1.** $y = cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **2.** $y = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **3.** $y = -x \log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **4.** $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. **5.** $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **6.** $y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. **7.** $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **8.** Pro $a = 0$: $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$; pro $a \neq 0$: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \left(\frac{1}{|a|} \log \frac{1+\sin \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{1-\sin \operatorname{arctg} \frac{x}{a}} + c \right)$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **9.** $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **10.** $y = 1 + \frac{1}{2\cos x} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. **11.** $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. **12.** $y = x^2e^{-x} + \frac{c}{x}e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

V. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

1. $y''+4y'+4y=0$ **2.** $y''-3y'+2y=0$ **3.** $y''-6y'+13y=0$ **4.** $y''-2y'-3y=e^{4x}$ **5.** $y''-2y'+2y=\cos x$ **6.** $y'''-y''-2y'=e^{2x}+x^3+3x^2+1$ **7.** $y''+3y'+2y=\sin x+\sin 2x$ **8.** $4y'''+y'=3e^x+2\sin\frac{x}{2}$ **9.** $y''-3y'+2y=\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ **10.** $y''-y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ **11.** $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2+x+1}$ **12.** $y''+y=\operatorname{tg}x$ **13.** $y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$

– –

Výsledky a návody. **1.** $y=ce^{-2x}+dxe^{-2x}$ **2.** $y=ce^x+de^{2x}$ **3.** $y=e^{3x}(c\cos 2x+d\sin 2x)$ **4.** $y=\frac{1}{5}e^{4x}+ce^{-x}+de^{3x}$ **5.** $y=\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x+e^x(c\cos x+d\sin x)$ **6.** $y=(\frac{x}{6}-\frac{5}{36})e^{2x}-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{7}{8}x+a+be^{-x}+ce^{2x}$ **7.** $y=-\frac{1}{20}\sin 2x-\frac{3}{20}\cos 2x-\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x+ce^{-x}+de^{-2x}$ **8.** $y=\frac{3}{5}e^x-x\sin\frac{x}{2}+a+b\cos\frac{x}{2}+c\sin\frac{x}{2}$ **9.** $y=-e^x\arcsin e^x-e^{2x}\operatorname{argtgh}\sqrt{1-e^{2x}}+ce^x+de^{2x}$, $x\in(-\infty,0)$ **10.** $y=e^x(1+e^{2x})\operatorname{arctg}e^x+ce^x+de^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ **11.** $y=e^x\cdot\left(c+dx-\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x\in\mathbb{R}$ **12.** $y=-\cos x\log\frac{1+\sin x}{|\cos x|}+c\cos x+d\sin x$, $x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **13.** $y=e^x\cdot\left(c+dx+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}\right)$, $x\in(-2,2)$

==

Test číslo 1 – první verze

1. Rozviňte funkci $f(x)=\cos^2 x+\operatorname{sgn}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi,\pi)$. Určete součet této řady všude, kde konverguje. (20 bodů)

Řešení. Platí $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, kde $f_1(x)=\cos^2 x$ a $f_2(x)=\operatorname{sgn}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Spočítáme Fourierovy koeficienty zvlášť pro f_1 a pro f_2, Fourierovy koeficienty funkce f budou součtem koeficientů f_1 a f_2.

Pro funkci f_1 platí:

$$f_1(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

je tedy trigonometrickým polynomem, a proto tento trigonometrický polynom je její Fourierovou řadou (t.j. $a_0^1=1$, $a_2^1=\frac{1}{2}$, ostatní koeficienty jsou nulové).

Pro funkci f_2 počítejme:

$$a_0^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}}-1\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}1\,\mathrm{d}x=-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}a_k^2&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}}-\cos kx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin k\frac{\pi}{4}-0+0-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin k\frac{\pi}{4}\\&=-\frac{2}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{4},\qquad\text{pro } k=1,2,\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_k^2&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}}-\sin kx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{k}\cdot\cos k\frac{\pi}{4}-\frac{\cos k\pi}{k}\right)+\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\cos k\pi}{k}+\frac{1}{k}\cdot\cos k\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{2}{k\pi}\cdot\left(\cos k\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\right),\qquad\text{pro } k=1,2,\dots\end{aligned}$$

Fourierova řada funkce f je tedy

$$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos x + \frac{2+\sqrt{2}}{\pi}\sin x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)\cos 2x - \frac{1}{\pi}\sin 2x$$
$$+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left(- \cdot \sin k\frac{\pi}{4} \cdot \cos kx + \left(\cos k\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\right)\sin kx\right).$$

Protože funkce f je na $(-\pi, \pi)$ po částech spojitá a po částech monotónní, je součtem její Fourierovy řady následující funkce:

$$f^*(x) = \begin{cases} \cos^2 x + \operatorname{sgn}(x - 2k\pi - \frac{\pi}{4}) & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \setminus \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\}, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 & x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt{1-y^2}$. Načrtněte jejich grafy. (20 bodů)
Řešení. Ze zadání plyne, že y může nabývat pouze hodnot z intervalu $[-1, 1]$. Rovněž vidíme, že funkce $y = -1$ a $y = 1$ (na $\mathbb{R}$) jsou řešením. Na intervalech, kde y nabývá hodnot z $(-1, 1)$, můžeme upravovat:

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{1-y^2} \\ \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} &= 1 \\ (\arcsin y)' &= 1 \\ \arcsin y &= x - c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Protože levá strana nabývá hodnot z $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, musí v tomto intervalu ležet i pravá strana, odkud dostáváme $x \in (c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2})$. Dostáváme tedy řešení

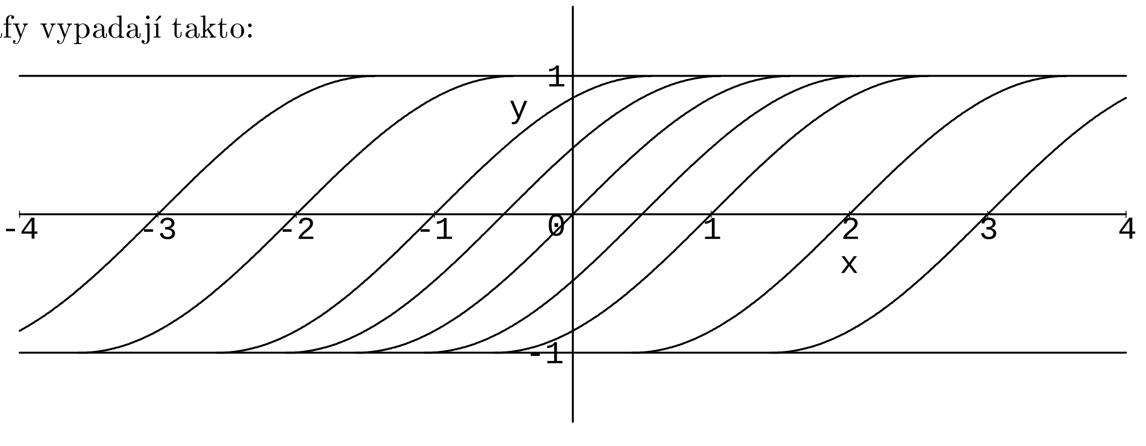
$$y(x) = \sin(x-c), \qquad x \in (c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}).$$

Nyní zkoumejme, jak je to s maximálními řešeními. Triviální řešení ($y = 1$ a $y = -1$) jsou definována na celém $\mathbb{R}$, a tedy jsou maximální.
Pro řešení $y(x) = \sin(x-c)$ na $x \in (c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2})$ máme: limita v $c - \frac{\pi}{2}+$ je -1, limita v $c + \frac{\pi}{2}+$ je 1. Derivace $y' = \cos(x-c)$ má v $c - \frac{\pi}{2}+$ i v $c + \frac{\pi}{2}-$ limitu 0. Odtud dostáváme tvar všech maximálních řešení:

$$y = 1,\ x \in \mathbb{R}, \qquad y = -1,\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, c - \frac{\pi}{2}] \\ \sin(x-c) & x \in (c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}), \quad c \in \mathbb{R} \\ 1 & x \in [c + \frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

Grafy vypadají takto:



3. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = e^x$. (10 bodů)

Řešení: Rovnici upravujeme:

$$\begin{aligned} y' - y\,\mathrm{tg}\,x &= e^x \\ y'\cos x - y\sin x &= e^x\cos x \\ (y\cos x)' &= e^x \cos x \end{aligned}$$

Nyní potřebujeme zintegrovat funkci na pravé straně. Použijeme dvakrát metodu per-partes.

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x,$$

tedy

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned} y\cos x &= \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c \\ y &= \frac{1}{2}e^x(1 + \mathrm{tg}\,x) + \frac{c}{\cos x} \end{aligned}$$

Tyto funkce jsou řešením na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Test číslo 1 – druhá verze

1. Rozviňte funkci $f(x) = \sin^2 x + \mathrm{sgn}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Určete součet této řady všude, kde konverguje. (20 bodů)

Řešení. Platí $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, kde $f_1(x) = \sin^2 x$ a $f_2(x) = \mathrm{sgn}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Spočítáme Fourierovy koeficienty zvlášť pro f_1 a pro f_2, Fourierovy koeficienty funkce f budou součtem koeficientů f_1 a f_2.

Pro funkci f_1 platí:

$$f_1(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

je tedy trigonometrickým polynomem, a proto tento trigonometrický polynom je její Fourierovou řadou (t.j. $a_0^1 = 1$, $a_2^1 = -\frac{1}{2}$, ostatní koeficienty jsou nulové).

Pro funkci f_2 počítejme:

$$\begin{aligned} a_0^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{4}} -1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \\ a_k^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{4}} -\cos kx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin(-k\frac{\pi}{4}) - 0 + 0 - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin(-k\frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{2}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{4}, \qquad \text{pro } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_k^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{4}} -\sin kx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{k}\cdot\cos\frac{k\pi}{4} - \frac{\cos k\pi}{k}\right) + \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\cos k\pi}{k} + \frac{1}{k}\cdot\cos\frac{k\pi}{4}\right) \\
&= \frac{2}{k\pi}\cdot\left(\cos k\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\right), \qquad\qquad \text{pro } k = 1, 2, \dots
\end{aligned}
$$

Fourierova řada funkce f je tedy

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos x + \frac{2+\sqrt{2}}{\pi}\sin x + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\cos 2x - \frac{1}{\pi}\sin 2x \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left(\cdot\sin k\frac{\pi}{4}\cdot\cos kx + \left(\cos k\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\right)\sin kx\right).
\end{aligned}
$$

Protože funkce f je na $(-\pi,\pi)$ po částech spojitá a po částech monotónní, je součtem její Fourierovy řady následující funkce:

$$
f^*(x) = \begin{cases} \sin^2 x + \operatorname{sgn}(x - 2k\pi + \frac{\pi}{4}) & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \setminus \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\}, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}
$$

2. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = -\sqrt{1-y^2}$. Načrtněte jejich grafy. (20 bodů)
Řešení. Ze zadání plyne, že y může nabývat pouze hodnot z intervalu $[-1,1]$. Rovněž vidíme, že funkce $y = -1$ a $y = 1$ (na $\mathbb{R}$) jsou řešením. Na intervalech, kde y nabývá hodnot z $(-1,1)$, můžeme upravovat:

$$
\begin{aligned}
y' &= -\sqrt{1-y^2} \\
-\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} &= 1 \\
(\arccos y)' &= 1 \\
\arccos y &= x - c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Protože levá strana nabývá hodnot z $(0,\pi)$, musí v tomto intervalu ležet i pravá strana, odkud dostáváme $x \in (c, c+\pi)$. Dostáváme tedy řešení

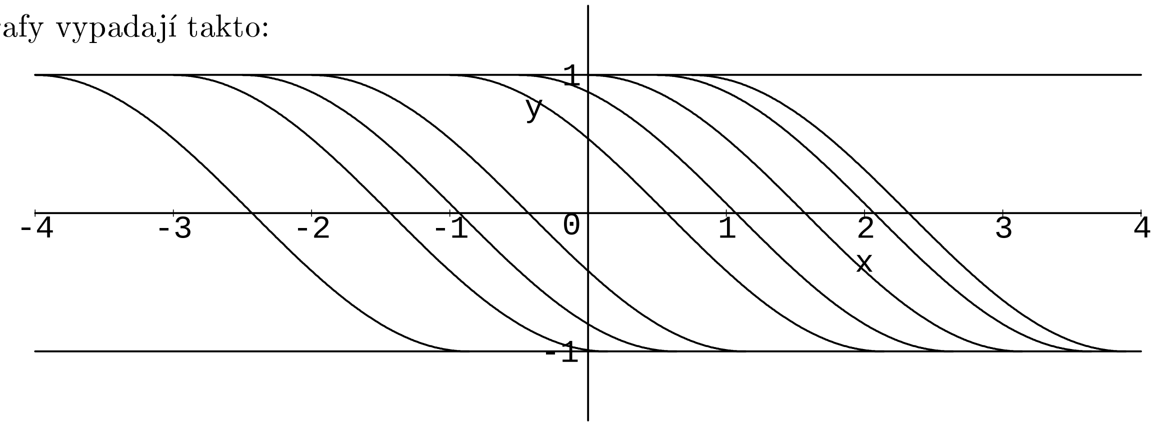
$$
y(x) = \cos(x-c), \qquad x \in (c, c+\pi).
$$

Nyní zkoumejme, jak je to s maximálními řešeními. Triviální řešení ($y = 1$ a $y = -1$) jsou definována na celém $\mathbb{R}$, a tedy jsou maximální.
Pro řešení $y(x) = \cos(x-c)$ na $x \in (c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2})$ máme: limita v $c+$ je 1, limita v $c+\pi-$ je -1. Derivace $y' = -\sin(x-c)$ má v $c+$ i v $c+\pi-$ limitu 0. Odtud dostáváme tvar všech maximálních řešení:

$$y = 1,\ x \in \mathbb{R}, \qquad y = -1,\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, c] \\ \cos(x - c) & x \in (c, c + \pi) \\ -1 & x \in [c + \pi, \infty) \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Grafy vypadají takto:



3. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' + y \operatorname{cotg} x = e^{-x}$. (10 bodů)
Řešení: Rovnici upravujeme:

$$\begin{aligned} y' + y \operatorname{cotg} x &= e^{-x} \\ y' \sin x + y \cos x &= e^{-x} \sin x \\ (y \sin x)' &= e^{-x} \sin x \end{aligned}$$

Nyní potřebujeme zintegrovat funkci na pravé straně. Použijeme dvakrát metodu per-partes.

$$\int e^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x,$$

tedy

$$\int e^{x} \sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned} y \sin x &= -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + c \\ y &= -\frac{1}{2} e^{-x} (1 + \operatorname{cotg} x) + \frac{c}{\sin x} \end{aligned}$$

Tyto funkce jsou řešením na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

VI. Zjistěte, zda (X,ρ) je metrický prostor, a pokud ano, popište, jak v něm vypadá konvergence posloupností

1. X je libovolná množina, $\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ **2.** $X = \mathbb{R}$ a) $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$, b) $\rho(x,y) = (x-y)^2$ **3.** $X = \mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p$, kde $p \in (0,1)$.

4. $X = \mathbb{R}^2$, $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$, kde $p \in (0,1)$.

5. X je prostor omezených spojitých funkcí na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ (t.j. $X = \mathcal{C}_b(I)$), $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in I} |f(x) - f(y)|$. Kdy můžeme napsat max místo sup ?

6. $X = \mathcal{C}[0,1]$, a) $\rho(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$; b) $\rho(f,g) = |\int\limits_0^1 f(x) - g(x)\mathrm{d}x|$.

7. $X = \{(x_n) \mid \lim x_n = 0\}$ (t.j. $X = c_0$), $\rho(x,y) = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ (a dokažte, že maximum existuje).

8. Nechť (X,ρ) je metrický prostor a $f : X \to X$ zobrazení. Definujme $\sigma(x,y) = \rho(f(x), f(y))$. Je (X,σ) je metrický prostor?

9. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Položme a) $\sigma(x,y) = \min(1, \rho(x,y))$, b) $\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$. Dokažte, že σ je metrika ekvivalentní s ρ.

10. Nechť X je prostor všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$. Najděte metriku ρ na X takovou, aby konvergence posloupností v (X,ρ) byla lokálně stejnoměrnou konvergencí.

11. Existuje na množině $\mathbb{R}$ nejsilnější metrika? A nejslabší metrika? (*Co když místo $\mathbb{R}$ vezmu nějakou jinou množinu?) Najděte na $\mathbb{R}$ metriku, která je ostře slabší než obvyklá metrika.

Výsledky a návody. **1.** Ano. $x_n \to x$, právě když $(\exists n_0)(\forall n > n_0)(x_n = x)$ **2.** a) Ano. Konvergence je obvyklá. b) Ne, není splněna trojúhelníková nerovnost. **3.** Ano. $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (x_1, x_2, \dots, x_n)$, právě když $x_1^k \to x_1$, $x_2^k \to x_2$, … $x_n^k \to x_n$ (t.j. konvergence po souřadnicích). **4.** Ne, pokud $n > 1$, není splněna trojúhelníková nerovnost. **5.** Ano. Konvergence je obvyklá stejnoměrná konvergence. Maximum lze psát, pokud I je omezený a uzavřený. **6.** a) Ano. Konvergence je „konvergence v průměru“. b) Ne, i pro $f \neq g$ může být $\rho(f,g) = 0$. **7.** Ano. Konvergence je stejnoměrná konvergence. **8.** Ano, pokud f je prosté. **9.** Ad b) Pro důkaz trojúhelníkové nerovnosti dokažte, že funkce $f(t) = \frac{t}{1+t}$ je rostoucí a splňuje $f(s+t) \le f(s) + f(t)$ pro $s, t \ge 0$. **10.** Např. $\rho(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \min(1, \max\limits_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)|)$. **11.** Nejsilnější metrika existuje (např. diskrétní metrika). Nejslabší neexistuje. (Návod: Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována jako $f(x) = \begin{cases} x & x \neq \pm 1 \\ 1 & x = -1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$. Položte $\rho_1(x,y) = |x-y|$, $\rho_2(x,y) = |f(x) - f(y)|$, a dokažte, že neexistuje metrika, která je slabší než obě tyto metriky.) Ostře slabší než obvyklá: Vezměme například funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definovanou předpisem $f(x) = \begin{cases} (x, 0) & x \le 0 \\ (\sin \frac{2\pi x^2}{x^2+1}, 1 - \cos \frac{2\pi x^2}{x^2+1}) & x > 0 \end{cases}$, a vezměme metriku $\rho(x,y) = d(f(x), f(y))$, kde d je euklidovská vzdálenost v rovině. Nakreslete si to. Pro jiné množiny: Na konečné množině jsou všechny metriky ekvivalentní, na nekonečné je diskrétní nejsilnější a nejslabší neexistuje.

VII. Otevřené a uzavřené množiny, vnitřek, uzávěr ...

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené, zjistěte jejich vnitřek, uzávěr, vnějšek, hranici.

(a) $\mathbb{Q}$, (b) $\mathbb{N}$, (c) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$

Všechny tyto množiny uvažujte (i) v $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou (ii) v rovině ($\mathbb{R}^2$) s euklidovskou metrikou.

2. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené, zjistěte jejich vnitřek, uzávěr, vnějšek, hranici.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \le 0\}$;
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$;
c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0, y > 0, x + y = 2, z \le 0\}$;
d) $D = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(\frac{1}{2}) = 2\}$;
e) $E = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(\frac{1}{2}) \in (0, 2)\}$;
f) $F = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0\}$
g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| > x + y\}$
g) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| = x - y\}$

3. Definujme $\mathcal{N} : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ předpisem $\mathcal{N}(f) = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Je $\mathcal{N}$ spojité zobrazení?

4. Platí rovnosti $\overline{U_\delta(a)} = \{x \mid \rho(a, x) \le \delta\}$ a $\operatorname{int}\{x \mid \rho(a, x) \le \delta\} = U_\delta(a)$ pro každé $\delta > 0$ a) v každém metrickém prostoru b) v normovaném lineárním prostoru ?

5. Platí následující rovnosti?

(i) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$; (ii) $\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$; (iii) $\operatorname{int} M_1 \cup \operatorname{int} M_2 = \operatorname{int}(M_1 \cup M_2)$;
(iv) $\operatorname{int} M_1 \cap \operatorname{int} M_2 = \operatorname{int}(M_1 \cap M_2)$; (v) $(M')' = M'$;
(vi) $M \subset \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, s = \sup M \Rightarrow s \in \overline{M}(s \in M', s \in \partial M)$.

Výsledky a návody. **1.** (i) V $\mathbb{R}$: (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \operatorname{ext} \mathbb{Q} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. (b) Uzavřená, $\operatorname{int} \mathbb{N} = \emptyset$, $\operatorname{ext} \mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}} = \partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$. (c) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr i hranice je $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, vnějšek $\mathbb{R} \setminus (\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$. (d) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $(-\infty, 0)$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $[0, \infty)$, vnějšek $\emptyset$. (ii) V rovině (jakožto podmnožiny osy x, kterou značíme $\mathbb{R}$): (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$, $\operatorname{ext} \mathbb{Q} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. (b) Uzavřená, $\operatorname{int} \mathbb{N} = \emptyset$, $\operatorname{ext} \mathbb{N} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}} = \partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$. (c) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr i hranice je $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, vnějšek $\mathbb{R}^2 \setminus (\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$. (d) Není otevřená ani uzavřená, vnitřek je $\emptyset$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $\mathbb{R}$, vnějšek $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$. **2.** (a) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$, $\operatorname{ext} A = \{(x, y) \mid x < 0 \text{ nebo } y > 0\}$, $\overline{A} = \{(x, y) \mid x \ge 0, y \ge 0\}$, $\partial A = \{(x, y) \mid (x \ge 0, y = 0) textnebo (x = 0, y \le 0)\}$. (b) Uzavřená, $\operatorname{int} B = \emptyset$, $\overline{B} = \partial B = B$, $\operatorname{ext} B = \mathbb{R}^2 \setminus B$. (c) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} C = \emptyset$, $\overline{C} = \partial C = \{(x, y, z) \mid x \ge 0, y \ge 0, x + y = 2, z \le 0\}$, $\operatorname{ext} C = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C}$. (d) Uzavřená, $\operatorname{int} D = \emptyset$, $\overline{D} = \partial D = D$, $\operatorname{ext} D = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \ne 2\}$. (e) Otevřená, $\operatorname{int} E = E$, $\overline{E} = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \in [0, 2]\}$, $\partial E = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \in \{0, 2\}\}$, $\operatorname{ext} E = \{f \mid f(\frac{1}{2}) \notin [0, 2]\}$. (f) Uzavřená, $\operatorname{int} F = \emptyset$, $\overline{F} = \partial F = F$, $\operatorname{ext} F = \{f \mid \int_0^1 f \ne 0\}$. (g) Otevřená, $\operatorname{int} G = G$, $\overline{G} = \{(x, y) \mid x+y \le 0\}$, $\partial G = \{(x, y) \mid x+y = 0\}$, $\operatorname{ext} G = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$. (h) Uzavřená, $\operatorname{int} H = \{(x, y) \mid x > y\}$, $\partial H = \{(x, y) \mid x = y\}$, $\operatorname{ext} H = \{(x, y) \mid x < y\}$, $\overline{H} = H$. **3.** Ano, využijte linearitu a monotonii Newtonova integrálu. **4.** V metrickém prostoru platit nemusí (např. diskrétní prostor a $\delta = 1$), ale v NLP platí. **5.** Platí: (i), (iv), (vi) – případ $\overline{M}$ a ∂M. Neplatí: (ii), (iii), (v), (vi) – případ M'.

VIII. Implicitní funkce

1. Nechť x_0 je jednonásobný kořen rovnice $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Dokažte, že existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že kdykoli $|b_i - a_i| < \delta$ pro $i = 1, \ldots, n$, pak rovnice $x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ má v intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ právě jeden kořen. Spočtěte $\frac{\partial x}{\partial a_i}(a_1, \ldots, a_n)$.
2. Co se stane, bude-li v předchozím příkladě kořen x_0 p-násobný?
3. S použitím prvního příkladu spočtěte přibližně (bez odhadu chyby) kořen rovnice $0.99x^3 + 1.02x - 10 = 0$.
4. Dokažte, že existují funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$, pro které platí $u(1, 2) = v(1, 2) = 0$, a které na nějakém okolí bodu $(1, 2)$ splňují rovnice $xe^{u+v} + 2uv = 1$, $ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$ a jsou tam třídy $\mathcal{C}^1$. Spočtěte jejich diferenciál v bodě $(1, 2)$.
5. Dokažte, že existují funkce $z = z(x, y)$ a $t = t(x, y)$, pro které platí $z(1, -1) = 0$ a $t(1, -1) = 2$, a které na nějakém okolí bodu $(1, -1)$ splňují rovnice $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$, $x + y + z - t - 2 = 0$ a jsou tam třídy $\mathcal{C}^2$. Spočtěte druhý diferenciál funkce z v bodě $(1, -1)$.
6. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ „v bodě $u = 2$, $v = 1$“, jestliže $x = u + v^2$, $y = u^2 - v^3$, $z = 2uv$.
7. Najděte rovnici tečné roviny k ploše $e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}$ v bodě $(1, 1, 0, \frac{\pi}{4})$.

==

Test číslo 2 – první verze

1. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y''' - 2y'' + y' - 2y = 2 + \sin x$. (25 bodů)

Řešení. Nejprve řešme homogenní rovnici $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$. Její charakteristický polynom je $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$, kořeny jsou tedy $2, i, -i$. Fundamentální systém řešení je tedy e^{2x}, $\cos x$, $\sin x$.

Nyní hledejme partikulární řešení rovnice s pravou stranou. Jako první najděme řešení rovnice $y''' - 2y'' + y' - 2y = 2$. Je zřejmé, že tato rovnice má řešení $y_1 = -1$. Dále najděme řešení rovnice $y''' - 2y'' + y' - 2y = \sin x$. Pravá strana je ve speciálním tvaru, a i je jednonásobný kořen charakteristického polynomu, a tedy řešení lze najít ve tvaru $y_2 = x \cdot (a \cos x + b \sin x)$. Pak máme

$$\begin{aligned}
y_2' &= x(-a \sin x + b \cos x) + (a \cos x + b \sin x), \\
y_2'' &= x(-a \cos x - b \sin x) + 2(-a \sin x + b \cos x), \\
y_2''' &= x(a \sin x - b \cos x) + 3(-a \cos x - b \sin x).
\end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$y_2''' - 2y_2'' + y_2' - 2y_2 = \cos x \cdot (-2a - 4b) + \sin x \cdot (-2b + 4a).$$

Má=li vyjít $\sin x$, musí být $-2a - 4b = 0$ a $-2b + 4a = 1$, neboli $a = \frac{1}{5}$ a $b = -\frac{1}{10}$.
Všechna řešení rovnice ze zadání mají tedy tvar

$$y = -1 + \frac{1}{5} x \cos x - \frac{1}{10} x \sin x + ae^{2x} + b \cos x + c \sin x, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

2. Nechť

$$M_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x} \right\} \quad \text{a} \quad M_2 = \left\{ \left(x, \frac{1}{y} \right) \mid \left(y, -\frac{1}{|x|} \right) \in M_1 \right\}.$$

Zjistěte, zda M_1 a M_2 jsou uzavřené nebo otevřené, a určete uzávěr, vnitřek a hranici v prostoru a) $\mathbb{R}^2$, b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Svá tvrzení zdůvodněte. (25 bodů)

Řešení. Nejprve se věnujme množině M_1 v $\mathbb{R}^2$. Platí

$$M_1 = \{(x,y) \mid x > 0 \;\&\; xy \geq 1\} \cup \{(x,y) \mid x < 0 \;\&\; xy \leq 1\}.$$

Označme první z množin na pravé straně M_{11} a druhou M_{12}. Zřejmě platí

$$M_{11} = \{(x,y) \mid x \geq 0 \;\& xy \geq 1\},$$

a tedy M_{11} je uzavřená v $\mathbb{R}^2$ (využíváme spojitost funkcí $(x,y) \mapsto x$ a $(x,y) \mapsto xy$). Dále vidíme, že

$$\overline{M_{12}} = \{(x,y) \mid x \leq 0 \;\& xy \leq 1\} = M_{12} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

protože množina na pravé straně je uzavřená (opět ze spojitosti týchž funkcí jako výše), a navíc pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $(\frac{1}{n}, y) \to (0,y)$, přičemž $(\frac{1}{n}, y) \in M_{12}$ pro dostatečně velká n (pokud $y \geq 0$, pak pro všechna n, pokud $y < 0$, pak pro $n > \frac{1}{|y|}$). Tedy

$$\overline{M_1} = \overline{M_{11}} \cup \overline{M_{12}} = M_1 \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Dále

$$\operatorname{int} M_1 = \{(x,y) \mid x > 0 \;\&\; xy > 1\} \cup \{(x,y) \mid x < 0 \;\&\; xy < 1\}.$$

Množina na pravé straně je totiž otevřená, a přitom žádný bod z M_1, který není v množině na pravé straně, není ve vnitřku M_1, protože pro něj platí $xy = 1$, a pak $(x, y - \frac{1}{n}) \to (x,y)$, kde $(x, y - \frac{1}{n}) \notin M_1$. Nakonec

$$H(M_1) = \overline{M_1} \setminus \operatorname{int} M_1 = \{(x,y) \mid xy = 1 \text{ nebo } x = 0\}.$$

Z uvedených výsledků je zřejmé, že M_1 není v $\mathbb{R}^2$ otevřená ani uzavřená.
V $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ je M_1 uzavřená, a tedy $\overline{M_1} = M_1$. To je vidět buď z tvaru uzávěru M_1 v $\mathbb{R}^2$, nebo přímo z toho, že

$$M_1 = \{(x,y) \mid y - \frac{1}{x} \geq 0\}$$

a funkce $(x,y) \mapsto y - \frac{1}{x}$ je spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Ze stejných důvodů jako výše je i zde

$$\operatorname{int} M_1 = \{(x,y) \mid x > 0 \;\&\; xy > 1\} \cup \{(x,y) \mid x < 0 \;\&\; xy < 1\},$$

a pak

$$H(M_1) = \overline{M_1} \setminus \operatorname{int} M_1 = \{(x,y) \mid xy = 1\}.$$

Dále zkoumejme množinu M_2. Upravujme její zápis:

$$\begin{aligned} M_2 =& \{(x, \frac{1}{y}) \mid (y, -\frac{1}{|x|}) \in M_1\} = \{(x, \frac{1}{y}) \mid -\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{y}\} = \{(x,y) \mid y \leq -\frac{1}{|x|} \;\&\; x \neq 0\} \\ &= \{(x,y) \mid y \leq -\frac{1}{|x|}\} = \{(x,y) \mid y|x| \leq -1 \;\&\; x \neq 0\} = \{(x,y) \mid y|x| \leq -1\} \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že M_2 je uzavřená v $\mathbb{R}^2$, a tedy $\overline{M_2} = M_2$. Snadno vidíme, že $\operatorname{int} M_2 = \{(x,y) \mid y|x| < -1\}$, protože tato množina je otevřená, a pokud $y|x| = -1$, pak $(x, y + \frac{1}{n}) \notin M_2$ a $(x, y + \frac{1}{n}) \to (x,y)$. Nakonec $H(M_2) = \overline{M_2} \setminus \operatorname{int} M_2 = \{(x,y) \mid y|x| = -1\}$.
V prostoru $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ vyjdou stejné výsledky ze stejných důvodů.

Test číslo 2 – druhá verze

1. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y''' - y'' + 4y' - 4y = 4 + \cos 2x$. (25 bodů)

Řešení. Nejprve řešme homogenní rovnici $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$. Její charakteristický polynom je $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4)$, kořeny jsou tedy $1, 2i, -2i$. Fundamentální systém řešení je tedy e^x, $\cos 2x$, $\sin 2x$.

Nyní hledejme partikulární řešení rovnice s pravou stranou. Jako první najděme řešení rovnice $y''' - y'' + 4y' - 4y = 4$. Je zřejmé, že tato rovnice má řešení $y_1 = -1$. Dále najděme řešení rovnice $y''' - y'' + 4y' - 4y = \cos 2x$. Pravá strana je ve speciálním tvaru, a $2i$ je jednonásobný kořen charakteristického polynomu, a tedy řešení lze najít ve tvaru $y_2 = x \cdot (a \cos 2x + b \sin 2x)$. Pak máme

$$
\begin{aligned}
y_2' &= x(-2a \sin 2x + 2b \cos 2x) + (a \cos 2x + b \sin 2x),\\
y_2'' &= x(-4a \cos 2x - 4b \sin 2x) + 2(-2a \sin 2x + 2b \cos 2x),\\
y_2''' &= x(8a \sin 2x - 8b \cos 2x) + 3(-4a \cos 2x - 4b \sin 2x).
\end{aligned}
$$

Odtud dostaneme

$$y_2''' - y_2'' + 4y_2' - 4y_2 = \cos 2x \cdot (-8a - 4b) + \sin 2x \cdot (4a - 8b).$$

Má=li vyjít $\cos 2x$, musí být $-8a - 4b = 1$ a $-8b + 4a = 0$, neboli $a = -\frac{1}{10}$ a $b = -\frac{1}{20}$.
Všechna řešení rovnice ze zadání mají tedy tvar

$$y = -1 - \frac{1}{10} x \cos 2x - \frac{1}{20} x \sin 2x + ae^x + b \cos 2x + c \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

2. Nechť

$$M_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{|x|} \right\} \quad \text{a} \quad M_2 = \left\{ \left(\frac{1}{y}, x \right) \mid (y, x) \in M_1 \right\}.$$

Zjistěte, zda M_1 a M_2 jsou uzavřené nebo otevřené, a určete uzávěr, vnitřek a hranici v prostoru a) $\mathbb{R}^2$, b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Svá tvrzení zdůvodněte. (25 bodů)

Řešení. Pro množinu M_1 lze postupovat analogicky, jako pro M_2 v první verzi. Platí (v $\mathbb{R}^2$ i v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$)

$$
\begin{aligned}
\overline{M_1} = M_1 &= \{(x, y) \mid y|x| \geq 1\},\\
\operatorname{int} M_1 &= \{(x, y) \mid y|x| > 1\},\\
H(M_1) &= \{(x, y) \mid y|x| = 1\}.
\end{aligned}
$$

Pro množinu M_2 platí

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \left\{ \left(\frac{1}{y}, x \right) \mid (y, x) \in M_1 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{y}, x \right) \mid x \geq \frac{1}{|y|} \right\} = \{(y, x) \mid x \geq |y|, y \neq 0\}\\
&= \{(x, y) \mid y \geq |x|, x \neq 0\}.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne, že v $\mathbb{R}^2$

$$\overline{M_2} = \{(x, y) \mid y \geq |x|\},$$

protože množina vpravo je uzavřená, a pokud $y \geq |x|$ a $x = 0$, pak $(\frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}) \to (x, y)$, a přitom $(\frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}) \in M_2$ pro všechna n.

Dále

$$\operatorname{int} M_2 = \{(x,y) \mid y > |x|, x \neq 0\},$$

protože množina na pravé straně je otevřená, a pokud $(x,y) \in M_2$, $y = |x|$, pak $(x, y - \frac{1}{n}) \notin M_2$ a $(x, y - \frac{1}{n}) \to (x,y)$.
Konečně

$$H(M_2) = \overline{M_2} \setminus \operatorname{int} M_2 = \{(x,y) \mid y = |x| \text{ nebo } (x = 0 \;\&\; y \geq 0)\}.$$

Z výše uvedeného vyjádření M_2 plyne, že v prostoru $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ je M_2 uzavřená, tedy $\overline{M_2} = M_2$. Z týchž důvodů jako v předchozím odstavci platí

$$\operatorname{int} M_2 = \{(x,y) \mid y > |x|, x \neq 0\}$$

a

$$H(M_2) = \overline{M_2} \setminus \operatorname{int} M_2 = \{(x,y) \mid y = |x| \& \; x \neq 0\}.$$

===

IX. Řešte soustavy diferenciálních rovnic

1. $z' + y = 0$, $z' - y' = 3z + y$ **2.** $z' + z - y = e^x$, $y' - z + y = e^x$ **3.** $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}$, $z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$ **4.** $z' + 3z + y = 0$, $y' - z + y = 0$, $y(0) = z(0) = 1$ **5.** $z' = y - 7z$, $y' + 2z + 5y = 0$ **6.** $z' = 2y - 5z + e^x$, $y' = z - 6y + e^{-2x}$ **7.** $z'' + y' + z = e^x$, $z' + y'' = 1$ **8.** $u' = w + v - u$, $v' = w + u - v$, $w' = u + v + w$, $(u(0) = 1,\ v(0) = w(0) = 0)$ **9.** $u' = v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + v$, $(u(0) = -1,\ v(0) = 1,\ z(0) = 0)$

- -

Výsledky a návody. **1.** $z = \frac{3B-A}{4}e^x + \frac{A+B}{4}e^{-3x}$, $y = \frac{A-3B}{4}e^x + \frac{3A+3B}{4}e^{-3x}$ **2.** $z = e^x + de^{-2x} + c$, $y = e^x - de^{-2x} + c$ **3.** $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$, $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$ **4.** $z = -(c+d)xe^{-2x} + de^{-2x}$, $y = (c+d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$, $y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$ **5.** $z = (c-d)e^{-6x}\sin x + de^{-6x}\cos x$, $y = ce^{-6x}\cos x + (c-2d)e^{-6x}\sin x$ **6.** $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{2}{3}(c+d)e^{-4x} - \frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$, $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + \frac{1}{3}(c+d)e^{-4x} + \frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$ **7.** $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$, $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$ **8.** $u = \frac{a+b-c}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{6}e^{2x} + \frac{a-b}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{a+b-c}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{6}e^{2x} + \frac{b-a}{2}e^{-2x}$, $w = \frac{c-a-b}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{3}e^{2x}$, s poč.podm. $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ **9.** $u = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{b+c-2a}{3}e^{-x}$, $v = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{a+c-2b}{3}e^{-x}$, $w = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{a+b-2c}{3}e^{-x}$ s poč. podm. $u = -e^{-x}$, $v = e^{-x}$, $w = 0$

===

X. Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \cos(x-y)$ **2.** $y' = \sin(x+y)$ **3.** $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ **4.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ **5.** $xy' = y\log\frac{y}{x}$ **6.** $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ **7.** $y^2 + x^2y' = xyy'$ **8.** $xy' - y = \sqrt{y^2 + x^2}$ **9.** $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$ **10.** $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$ **11.** $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$ **12.** $y' = \frac{y^2-x}{2y(x+1)}$

- -

Výsledky a návody. **1.** substituce $y = x - z$. **2.** substituce $y = z - x$. **3.-8.** substituce $y = xz$. **9.-11.** substitucí $x = t + a$, $y = z + b$ pro vhodná a, b převést na předchozí typ. **12.** substitucí $y^2 = z$ převést na předchozí typ.