I. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici

1. (a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{N}$ (c) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ **2.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \leq 0\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ **4.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ **5.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y > 17\}$
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| > x + y\}$ **7.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| = x - y\}$
8. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$ **9.** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$

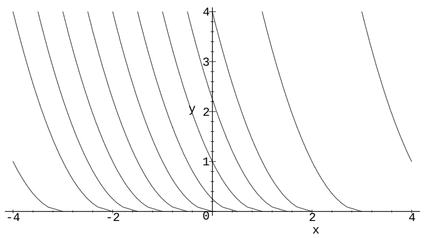
Určete (a nakreslete) definiční obor a vrstevnice funkcí

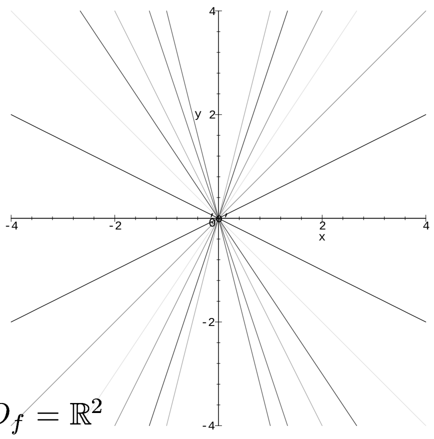
10. $f(x, y) = x + \sqrt{y}$ **11.** $f(x, y) = \frac{y}{x}$ **12.** $f(x, y) = x^2 + y^2$ **13.** $f(x, y) = x^2 - y^2$
14. $f(x, y) = \sqrt{xy}$ **15.** $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **16.** $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
17. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$ **18.** $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$
19. $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$ **20.** $f(x, y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$ **21.** $f(x, y) = |x| + y$

Výsledky a návody. **1.** (a) $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$, $H(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená. (b) $\mathbb{N}$ je uzavřená, $\operatorname{int} \mathbb{N} = \emptyset$, $H(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ (c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek je prázdný, hranice i uzávěr jsou $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. (d) Ani otevřená, ani uzavřená, vnitřek $(-\infty, 0)$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $[0, \infty)$. **2.** Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\}$, uzávěr $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$, hranice$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\ \&\ y \leq 0\ \&\ (x = 0 \vee y = 0)\}$. **3.** Otevřená, uzávěr $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, hranice $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **4.** Uzavřená, vnitřek $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$, hranice $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **5.** Otevřená, hranice $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y = 17\}$, uzávěr $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y \leq 17\}$ **6.** Otevřená, uzávěr $\{(x, y) \mid x + y \leq 0\}$, hranice $\{(x, y) \mid x + y = 0\}$. **7.** Uzavřená, vnitřek $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$, hranice $\{(x, y) \mid x + y = 0\}$. **8.** Uzavřená, prázdný vnitřek. **9.** Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný, hranice i uzávěr $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$.

10. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

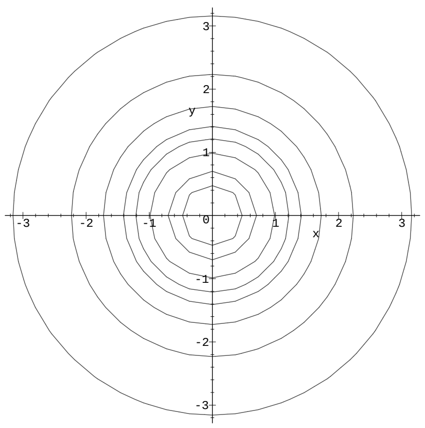
11. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

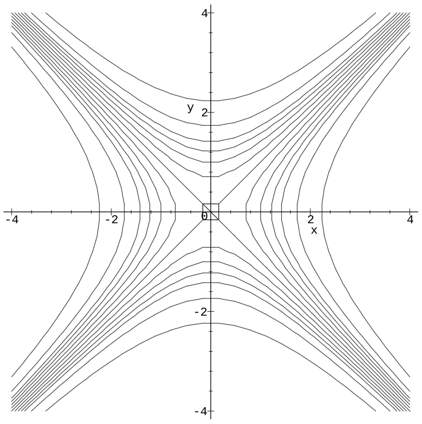




12. $D_f = \mathbb{R}^2$

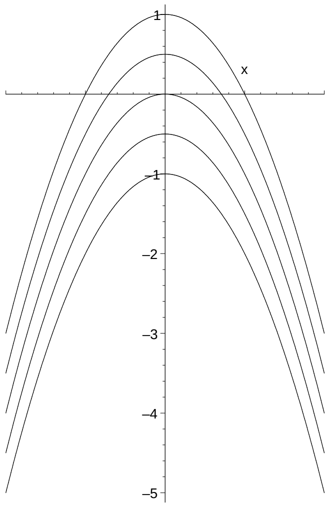
13. $D_f = \mathbb{R}^2$



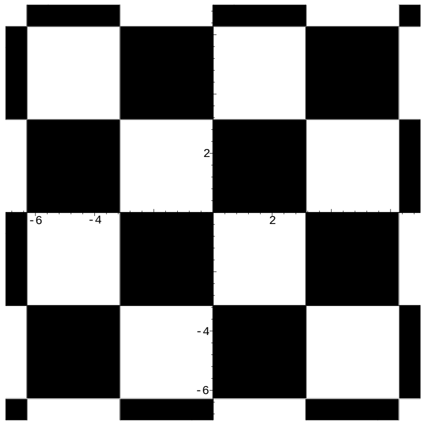


14. $D_f = \{(x,y) \mid (x \geq 0 \;\&\; y \geq 0) \vee (x \leq 0 \;\&\; y \leq 0)\}$, vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}$ pro $c > 0$ spolu s dvojicí os. **15.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **16.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **17.** $D_f = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. **18.** $D_f = \{(x,y) \mid -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. **19.** $D_f = \{(x,y) \mid 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi$ pro nějaké $k = 0, 1, 2, \ldots\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. **20.** $D_f = \mathbb{R}^2$, jsou tři vrstevnice - vnitřky černých čtverců, vnitřky bílých čtverců a hraniční přímky. **21.** $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice jsou grafy funkcí $y = k - |x|$.

Ad **18.**



Ad **20.**



II. Určete v kterých bodech je funkce f spojitá vzhledem k množině M, pokud

1. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy = 0, \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases}$ a) $M = \mathbb{R}^2$, b) $M = \{[x,y] : x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$, c) $M = \{[x,y] : x = y\}$.

2. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2, x \neq 0, \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases}$ a) M je nějaká přímka procházející počátkem, b) $M = \mathbb{R}^2$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & x \neq 0 \neq y, \\ x + y & \text{jinak;} \end{cases}$ a) M je nějaká přímka procházející počátkem, b) M je nějaká přímka rovnoběžná s osou x, c) $M = \mathbb{R}^2$.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & x \neq 0, \\ y & x = 0; \end{cases}$ $M = \mathbb{R}^2$.

Výsledky a návody. **1.** a) V bodech $[x,y]$, kde $xy \neq 0$ (tj. v bodech mimo osy), b) ve všech bodech množiny M (f je na M konstantní), c) ve všech bodech množniny M s výjimkou bodu $[0,0]$. **2.** a) Je-li tou přímkou osa x nebo osa y, pak ve všech bodech množiny M. Ostatní přímky procházející počátkem protínají parabolu $y = x^2$ ve dvou bodech - $[0,0]$ a ještě jednom, říkejme mu A. f je spojitá ve všech bodech množiny M s výjimkou bodu A. b) Ve všech bodech, které neleží na parabole $y = x^2$. **3.** a) Ve všech bodech množiny M. b) Je-li M osa x, pak ve všech jejích bodech; v ostatních případech s výjimkou průsečíku s osou y. c) V bodech mimo osy (tj. v takových $[x,y]$, že $x \neq 0 \neq y$) a ještě v bodě $[0,0]$. **4.** Ve všech bodech $\mathbb{R}^2$.

III. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na M nabývá.

1. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z; M = [-1;1] \times [-1;1] \times [-1;1]$;
2. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a > 0, b > 0; M = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$;
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z; M = \mathbb{R}^3$; **4.** $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}; M = \mathbb{R}^2$;
5. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$
6. $f(x,y) = (x+y)\, e^{-2x-3y}; M = \{(x,y); x > 0, y > 0\}$
7. $f(x,y) = \left(x^2 + 5y^2\right) e^{-\left(3x^2+y^2\right)}; M = \mathbb{R}^2$;
8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; M = \{(x,y,z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}; a > b > c > 0.$
9. $z(x,y) = x^2 + y^2,\ M = \{(x,y), x^2 + 4y^2 = 1\}$
10. $z(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2;\ M = \{(x,y), 4x^2 + y^2 = 1\}$
11. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

Výsledky a návody. **1.** max 5 v bodech $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, min -1 v bodě $(0,0,-1)$ **2.** max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ **3.** sup $+\infty$, min -14 v bodě $(-1,-2,3)$ **4.** min 0 v $(0,0)$, max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2+y^2=1$. **5.** max 1 v bodech $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, min 0 v $(0,0)$ **6.** sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se **7.** max $\frac{5}{e}$ v bodech $(0,\pm 1)$, min 0 v bodě $(0,0)$ **8.** max a^2 v bodech $(\pm a, 0, 0)$, min 0 v $(0,0,0)$ **9.** max 1 v bodech $(\pm 1, 0)$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $(0, \pm\frac{1}{2})$ **10.** max $\frac{17}{4}$ v bodech $(\frac{3}{10}, \frac{4}{5})$, $(-\frac{3}{10}, -\frac{4}{5})$, min -2 v bodech $(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$, $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ **11.** dno $4m \times 4m$, výška $2m$

IV. Implicitní funkce

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2,0]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$;
b) napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.
2. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1,-2,1]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x,y)$ v jistém okolí U bodu $[1,-2]$, pro kterou platí $z(1,-2) = 1$;
b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;
c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x,y)$ v bodě $[1,-2]$.
3. Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0,1]$. Dokažte, že
a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;
b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.
4. Dokažte, že množina bodů $(x,y,z) \in \mathbb{R}$, které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

je v okolí bodu $(1,1,1)$ popsatelná jako graf funkce $f(x,y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1,1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $(1,1)$.

Výsledky a návody. **1.** tečna: $y = 0$ **2.** tečná rovina $z = \frac{7}{5}(y+2) + 1$ **3.** Spočtěte $f'(0)$ a ověřte, že $f'(0) > 0$. **4.** tečná rovina $z = -(x-1) - (y-1) + 1$

V. Určete y' a y'' v bodech, v jejichž okolí je uvedenou rovnicí zadána diferencovatelná funkce $y = y(x)$

1. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2 \quad a \in \mathbb{R}$ **2.** $\log \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ **3.** $y - \varepsilon \sin y = x \quad 0 < \varepsilon < 1$
4. $x^y = y^x$ **5.** $y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Zjistěte, v okolí kterých bodů je následujícím předpisem zadána diferencovatelná funkce $z = z(x,y)$ a najděte její parciální derivace prvního a druhého řádu

6. $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$ **7.** $xyz = x + y + z$ **8.** $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$ (F je tří dy C^2)
9. $F(xz, yz) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$ (F je tří dy C^2)
10. Dokažte, že existují funkce $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$, pro které platí $u(1,2) = v(1,2) = 0$, a které na nějakém okolí bodu $(1,2)$ splňují rovnice $xe^{u+v} + 2uv = 1$, $ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$ a jsou tam třídy $\mathcal{C}^1$. Spočtěte jejich parciální derivace prvního řádu v bodě $(1,2)$.
***11.** Nechť x_0 je jednonásobný kořen rovnice $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Dokažte, že existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že kdykoli $|b_i - a_i| < \delta$ pro $i = 1, \dots, n$, pak rovnice $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ má v intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ právě jeden kořen. Spočtěte $\frac{\partial x}{\partial b_i}(a_1, \dots, a_n)$. (Co se stane, bude-li kořen x_0 p-násobný?)

Výsledky a návody. **1.** $y' = \frac{y+x}{y-x}$, $(x,y) \neq \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$ **2.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $(x,y) \neq (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}), (-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})$ **3.** $y' = \frac{1}{1-\varepsilon \cos y}$ **4.** $y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{x \log y + y}{y \log x + x}$, $(x,y) \neq (e,e)$ **5.** $y' = \frac{y}{x}$ **6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z+x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$ s výjimkou bodů $(-\frac{y}{e}, y, \frac{y}{e})$ **7.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-yz}{xy-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-xz}{xy-1}$ **8.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z-x)(z-y)\left(\partial_{11}F \cdot (\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F \cdot \partial_1 F \cdot \partial_2 F + \partial_{22}F \cdot (\partial_1 F)^2\right) + 2\partial_2 F \cdot (\partial_1 F + 2x\partial_2 F) \cdot (\partial_1 F + 2y\partial_2 F)}{(\partial_1 F + 2z\partial_2 F)^3}$, $(\partial_1 F + 2z\partial_2 F) \neq 0$ **9.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{zy\left(\partial_{11}F \cdot (\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F \cdot \partial_1 F \cdot \partial_2 F + \partial_{22}F \cdot (\partial_1 F)^2\right) + 2z^2(\partial_1 F)^2}{(x\partial_1 F + y\partial_2 F)^3}$, $(x\partial_1 F + y\partial_2 F) \neq 0$ **10.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$. **11.** Označme levou stranu $P(x)$. Využijte toho, že fakt, že x_0 je jednonásobný kořen P znamená $P(x_0) = 0$ a $P'(x_0) \neq 0$. $\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\frac{x_0^{n-i}}{P'(x_0)}$. (Pro sudé p analogie neplatí, pro liché p zkoumejte $\sqrt[p]{P(x)}$.)

VI. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce f na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot f na M nabývá.

1. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$,
a) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$
2. $f(x,y,z) = xyz$,
a) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$
3. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{(x,y,z); x+y+z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
4. $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $M = \{(x,y,z); x+2y+3z = a, x > 0, y > 0\}$, kde $a > 0$.
5. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^p + \cdots + x_n^p$; $M = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 + \cdots + x_n = a, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$; kde $a > 0, p > 0$. **6.** $f(x,y) = x + y$, $M = \{(x,y); x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$
7. $f(x,y,z) = 10z + x - y$, $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 \leq 1, y + x \geq 0\}$ **8.** $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $M = \{(x,y), \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 1\}$ **9.** $f(x,y) = y$, $M = \{(x,y), \left(x^2+y^2\right)^2 = Kxy\}$, kde $K > 0$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) max 3 v $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, min -3 v $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}})$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}})$; **2.** a) max $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$; b) max $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$; **3.** max $\frac{1}{8}$ v $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, inf 0, nenabývá se **4.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6})$, inf $-\infty$ **5.** pro $p = 1$ je f na M konstantní; pro $p > 1$ je sup a^p, nenabývá se, min $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n})$; pro $p \in (0,1)$ je inf a^p, nenabývá se, max $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n})$; **6.** max 2 v $(1,1)$, min 0 v $(0,0)$ **7.** max $\sqrt{102}$ v $(\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}})$; min $-\sqrt{102}$ v $(-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}})$; **8.** max $\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{5})$; min $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -2\sqrt{5})$; **9.** max $\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15}, \frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}})$; min $-\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(-\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15}, -\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}})$.

==

VII. Určete hodnost matic (v závislosti na parametru)

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 15 & 12 & 25 & 42 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a \\ (1-a) & -2 & -1 \\ a & 2a & a \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a & 2a \\ (1-a) & -2 & -1 & 2 \\ a & 2a & a & a+1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & 2 & a \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Najděte inverzní matice k následujícím maticím

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** 3 **2.** 3 **3.** 3 pro $a \neq 1$, 1 pro $a = 1$ **4.** 3 pro $a \neq 0, -1, 2$, jinak 2 **5.** 3 pro $a \neq -1$, 2 pro $a = -1$ **6.** 3 **7.** hodnost 4 pro $a \neq 1$, pro $a = 1$ hodnost 3 **8.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 5/6 & 1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 0 & -1/21 & 5/42 & 11/42 \\ -1/2 & 23/42 & -5/42 & 5/21 \\ -1/2 & 13/42 & -1/42 & 1/21 \\ 1/2 & -5/42 & 1/21 & -25/42 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

VIII. Spočtěte determinanty

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

najděte řešení soustav lineárních rovnic

8. $\begin{aligned} x+2y-z&=1 \\ 2x+3y&=1 \\ -y+z&=1 \end{aligned}$ **9.** $\begin{aligned} x-z&=-2 \\ -x+y&=1 \\ 2x+y+3z&=13 \end{aligned}$ **10.** $\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+x_4&=-5 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4&=0 \\ 7x_1-x_2+4x_3-3x_4&=15 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4&=-3 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4&=2 \\ x_1-x_4&=-1 \\ x_2+x_3&=0 \\ x_1+2x_2&=-1 \end{aligned}$ **12.** $\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3+3x_4&=5 \\ 6x_1+15x_2+12x_3+25x_4&=42 \\ 2x_1+5x_2+4x_3+8x_4&=14 \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4&=-7 \end{aligned}$

- -

Výsledky a návody. **1.** determinant neexistuje, matice není čtvercová. **2.** 1 **3.** 6 **4.** -84 **5.** 1 **6.** 0 **7.** 29400000 **8.** $x=5$, $y=-3$, $z=-2$ **9.** $x=1$, $y=2$, $z=3$ **10.** $(1,0,2,0)$ **11.** $(5,-3,3,6)$ **12.** nekonečně mnoho řešení tvaru $(-3-2t,4,t,0)$, $t\in\mathbb{R}$

==

IX. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$ **5.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{3k+100}{2k+1}\right)^k$ **8.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin k$ **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\log\cos\frac{1}{k}$

10. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\log(1+\sin\frac{1}{k})$ **11.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$ **12.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ **13.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\ln x}$, $x\in\mathbb{R}$

14. $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **15.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x\in\mathbb{R}$ **16.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k^2}}{2^k}$, $x\in\mathbb{R}$ **17.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$

- -

Výsledky a návody. **1.** Diverguje. **2.** Konverguje neabsolutně. **3.** Konverguje absolutně. **4.** Konverguje absolutně. **5.** Konverguje absolutně. **6.** Konverguje absolutně. **7.** Diverguje. **8.** Diverguje. **9.** Konverguje absolutně. **10.** Diverguje. **11.** Konverguje neabsolutně. **12.** Konverguje neabsolutně. **13.** Pro $0<x<\frac{1}{e}$ konverguje absolutně, jinak diverguje (pro $x\le 0$ nemá smysl). **14.** Pro $\alpha>\frac{1}{2}$ konverguje absolutně, jinak diverguje. **15.** Konverguje absolutně pro $x\ne\pm1$, diverguje pro $x=\pm1$. **16.** Konverguje absolutně pro $|x|\le 1$, jinak diverguje. **17.** Konverguje neabsolutně.

==

X. Vyšetřete konvergenci následujících řad

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^7}{2^k+3^k}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}}$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+11}-\sqrt{k+2}\right)$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}-1\right)$

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^4x^n$, $x\in\mathbb{R}$ **6.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$ **8.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{2k+1}$ **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi)\frac{2-\cos(k\pi)}{4k}$

Výsledky a návody. **1.** Konverguje absolutně. **2.** Konverguje absolutně. **3.** Konverguje (neabsolutně). **4.** Konverguje. **5.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| \geq 1$. **6.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, pro $x = 1$ konverguje neabsolutně, pro $x = -1$ diverguje. **7.** Konverguje absolutně pro $|x| \leq 1$, diverguje pro $|x| > 1$. **8.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, konverguje neabsolutně pro $|x| = 1$. **9.** Diverguje.

XI. Nalezněte primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3 + 2x + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sin^7 x \cos x\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **10.** $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \log x\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a, b \in \mathbb{R}$
16. $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Výsledky a návody. **1.** $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 17\log|x| + C$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **2.** $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x + C$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **3.** $\frac{1}{8}\sin^8 x + C$ na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ na $\mathbb{R}$ **5.** $-\log|\cos x| + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **6.** $\log|\sin x| + C$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **7.** $\operatorname{tg} x - x + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **8.** $-\operatorname{cotg} x - x + C$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **9.** $\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **10.** $-\log|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})| + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **11.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ na $\mathbb{R}$ **12.** $(x-1)e^x + C$ na $\mathbb{R}$ **13.** $x\log x - x + C$ na $(0, \infty)$ **14.** $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1 + x^2)$ na $\mathbb{R}$ **15.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \cdot (a\cos bx + b\sin bx) + C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2 + b^2 \neq 0$; $x + C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a = b = 0$ **16.** $\frac{1}{4}|x|x^3 + C$ na $\mathbb{R}$ **17.** $F(x) + C$ na $\mathbb{R}$, kde

$$F(x) = \begin{cases} 2\log(1+x^2) + \pi(x_2 - x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x \in [-\infty, -x_2] \\ -\pi(x + x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x \in [-x_2, -x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x \in [-x_1, x_1] \\ \pi(x - x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x \in [x_1, x_2] \\ 2\log(1+x^2) + \pi(x_2 - x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x \in [x_2, \infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2 &= \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{aligned}$$

XII. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \frac{x^{17}-5}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{\exp x}{\exp x+1}\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cdot \sin^3 x}$ **8.** $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$ **10.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$
11. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **12.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ **13.** $\int \sqrt{x^2 - 2x - 1}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \frac{(2x+3)\ \mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$
15. $\int \log^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.*** V závislosti na parametru $\alpha > 0$ vypočtěte: (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos x}$ (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha\cos x)^2}$
17.* Spočtěte: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$ (pracné) **18.*** Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$?

Výsledky a návody. **1.** $\log(x^2+x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ **2.** $\left(\sum_1^{17} \frac{x^k}{k}\right) - 4\log|x-1|$, $x \in (-\infty, 1)$ nebo $x \in (1, +\infty)$ **3.** $\left(\sum_1^8 \frac{1}{2k} x^{2k}\right) - 2\log|x-1| + 3\log|x+1|$, $x \in (-\infty, -1)$ nebo $x \in (-1, 1)$ nebo $x \in (1, +\infty)$ **4.** $x + \frac{1}{6}\log|x| - \frac{9}{2}\log|x-2| + \frac{28}{3}\log|x-3|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, 2)$ nebo $x \in (2, 3)$ nebo $x \in (3, +\infty)$ **5.** $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x \in (-\infty, 1)$ nebo $x \in (1, +\infty)$ **6.** $\log(e^x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ **7.** $\log|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}) + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ **8.** $\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right| + \sin 2x\right)$, $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je funkce dodefinována 0 **9.** $6\left(\frac{1}{9}u^{(3/2)} - \frac{1}{8}u^{(4/3)} + \frac{1}{7}u^{(7/6)} - \frac{1}{6}u + \frac{1}{5}u^{(5/6)} - \frac{1}{4}u^{(2/3)}\right)$, kde $u = x+1$, $x \in (-1, +\infty)$ **10.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x \in (-1, 1)$ **11.** $\log\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$, kde $u = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x \in (-\infty, -1)$ nebo $x \in (-1, 0)$ nebo $x \in (1, +\infty)$ **12.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}} - \log(\sqrt{x^2+2x+2} - x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$ **13.** $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2})$ nebo $x \in (1+\sqrt{2}, +\infty)$ **14.** $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt{2}}$, kde $t = \sqrt{x^2+2x+4} - x$, $x \in \mathbb{R}$ **15.** $x\log^2 x - 2x\log x + 2x$, $x \in (0, +\infty)$ **16.** (a) Pro $0 < \alpha < 1$: $F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$, $x \neq (2n+1)\pi$, $F((2n+1)\pi) = \lim\limits_{x\to(2n+1)\pi} F(x)$ Pro $\alpha > 1$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right|$, $x \in (-\arccos(-\frac{1}{\alpha}), \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$ nebo $x \in (\arccos(-\frac{1}{\alpha}), 2\pi - \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$, přičemž v bodě $(2k+1)\pi$ je funkce F vždy dodefinována 0 Pro $\alpha = 1$: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (b) Pro $0 < \alpha < 1$: $G(x) = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(F(x) - \frac{\alpha\sin x}{1+\alpha\cos x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Pro $\alpha = 1$: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $\alpha > 1$: $G(x) = -(\alpha^2-1)^{-\frac{3}{2}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right| - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha-1)^2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right)$, $x \in (-\arccos(-\frac{1}{\alpha}), \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$, nebo $x \in (\arccos(-\frac{1}{\alpha}), 2\pi - \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$ **17.** $\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3}) + \frac{1}{3}\arctan x - \frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2-\sqrt{3}x+1) + \frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2+\sqrt{3}x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ **18.** $a + 2b + 3c = 0$