I. Nerovnosti, indukce – opakování

1. Řešte následující nerovnosti v $\mathbb{R}$: $\dfrac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0, \qquad \dfrac{x+2}{x+3} > \dfrac{2x+3}{x+6}.$

2. Nakreslete graf funkce: $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

3. Dokažte následující formulky:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > -1, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

4. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

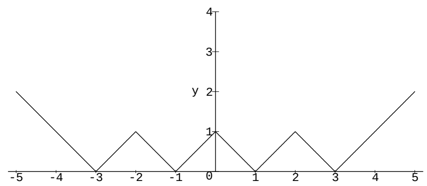
5. Dokažte pro $a,\, b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \leq |a| + |b|, \qquad ||a|-|b|| \leq |a-b|$.

6. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$ platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

7. Řešte rovnice: $\sin 2x = \sin x, \quad 2\sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2+1) = 2\log(3-x)$.

Výsledky a návody. **1.** $(4,6\rangle$; $\langle 2,3\rangle$, $(-6,-3) \cup (\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2})$

2.



3. Použijte matematickou indukci. **4.** $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$; $\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$. **5.** Proveďte rozbor možností pro znaménka. Druhou nerovnost odvoďte z první. **6.** Použijte matematickou indukci. **7.** $x \in \{k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$ pro $k \in \mathbb{Z}$; $x \in \{2k\pi, \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi\}$ pro $k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{4}{3}$.

II. Nerovnosti a suprema

1. Řešte nerovnici $1 \leq |ax+1| < 2$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

2. Pro která $x \in \mathbb{R}$ neplatí nerovnost $|1 + x\sqrt{a}| \leq 2ax^2$ pro žádné $a \in \mathbb{R}$? **3.** Určete množinu $\{a \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}$

Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují).
Existují maxima a minima?

4. $A = \{p/(p+q);\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$, **5.** a) $B_1 = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, b) $B_2 = \{\sin x;\ x \in (0, 2\pi)\}$, c) $B_3 = \{\sin x;\ x \in (0, \pi)\}$, **6.** a) $C_1 = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$,
b) $C_2 = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}, n > m\}$, c) $C_3 = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$,

7. a) $D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$, $D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z}\}$, **8.** $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

9. a) $F_1 = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$, b) $F_2 = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi;\ n \in \mathbb{N}$ sudé$\}$,
c) $F_3 = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi;\ n \in \mathbb{N}$ liché$\}$

10. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ a $S = \sup A$, $s = \inf A$, $T = \sup B$, $t = \inf B$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin? a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, *c) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, d) $-A = \{-a \mid a \in A\}$, *e) $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$, f) $A - B$, g) $A \setminus B$, h) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Výsledky a návody. **1.** Pro $a=0$ je $x\in\mathbb{R}$, pro $a\neq 0$ je $x\in(-\frac{1}{a}-\frac{2}{|a|},-\frac{1}{a}-\frac{1}{|a|}]\cup[-\frac{1}{a}+\frac{1}{|a|},-\frac{1}{a}+\frac{2}{|a|})$. **2.** Pro $x=0$. **3.** $(-\infty,-4)$. **4.** $\sup A=1$, $\inf A=0$, maximum a minimum neexistuje. **5.** a),b) $\max B_1=\max B_2=1$, $\min B_1=\min B_2=-1$; c) $\max B_3=1$, $\inf B_3=0$, minimum neexistuje. **6.** a) C_1 není shora ani zdola omezená; b) C_2 není shora omezená, $\min C_2=3$; c) C_3 není zdola omezená, $\max C_3=0$. **7.** a) $\max D_1=\frac{5}{6}$, $\inf D_1=0$, minimum neexistuje; b) D_2 není shora omezená, $\inf D_2=0$, minimum neexistuje. **8.** E není shora omezená, $\inf E=0$, minimum neexistuje. **9.** a) $\max F_1=1$, $\inf F_1=-1$, minimum neexistuje; b) $\sup F_2=1$, $\min F_1=0$, maximum neexistuje; c) $\max F_3=1$, $\inf F_3=-1$, minimum neexistuje. **10.** a) $\sup(A\cup B)=\max\{S,T\}$, $\inf(A\cup B)=\min\{s,t\}$. b) Pokud $A\cap B\neq\emptyset$, pak $\max\{s,t\}\leq\inf(A\cap B)\leq\sup(A\cap B)\leq\min\{S,T\}$ (a víc říci nelze). c) $\sup(A+B)=S+T$, $\inf(A+B)=s+t$. d) $\sup(-A)=-s$, $\inf(-A)=-S$. e) $\sup(A\cdot B)=\max\{S\cdot T,s\cdot t,s\cdot T,S\cdot t\}$, $\inf(A\cdot B)=\min\{S\cdot T,s\cdot t,s\cdot T,S\cdot t\}$. f) $\sup(A-B)=S-t$, $\inf(A-B)=s-T$. g) Pokud $A\setminus B\neq\emptyset$, pak $s\leq\inf(A\setminus B)\leq\sup(A\setminus B)\leq S$ (a víc říci nelze). h) Pokud $A\triangle B\neq\emptyset$, pak $\min\{s,t\}\leq\inf(A\cap B)\leq\sup(A\cap B)\leq\max\{S,T\}$ (a víc říci nelze).

III. Výroková logika

1. Nechť M značí množinu všech mužů a $\check{Z}$ množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy: $S(m,\check{z})$: „Muž m je manželem ženy $\check{z}$.“; $L_1(m,\check{z})$: „Muž m miluje ženu $\check{z}$.“; $L_2(m,\check{z})$: „Žena $\check{z}$ miluje muže m.“. Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem S, L_1 a L_2 zapište následující výroky:

a) Každý ženatý muž miluje svou manželku. b) Každou ženu miluje nějaký muž.

c) Každá žena má nejvýš jednoho manžela.

d) Každý muž má nejvýš jednu manželku. (Říká tento výrok totéž, co c)?)

e) Existuje vdaná žena. f) Existuje ženatý muž. (Říká tento výrok totéž, co e)?)

g) Existují nevěrné manželky. (Manželku prohlásíme za nevěrnou, pokud miluje jiného muže než svého manžela.)

Následující výroky přeložte do češtiny.

h) $\exists m\in M\forall\check{z}\in\check{Z}(non\,S(m,\check{z}))$; i) $\exists\check{z}\in\check{Z}\forall m\in M(L_1(m,\check{z})\Rightarrow non\,L_2(m,\check{z}))$;

j) $\exists\check{z}\in\check{Z}\forall m\in M(L_2(m,\check{z})\Rightarrow non\,L_1(m,\check{z}))$;

k) $\forall\check{z}\in\check{Z}((\exists m\in M:L_2(m,\check{z}))\Rightarrow(\exists m\in M:L_1(m,\check{z})\ \&\ non\,L_2(m,\check{z}))$.

2. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

a) $\forall x\in\mathbb{N}\ \exists y\in\mathbb{N}\ \forall z\in\mathbb{N}(z>x\Rightarrow y<z)$; b) $\exists y\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{N}\ \forall z\in\mathbb{N}\ (z>x\Rightarrow y<z)$;

c) $\exists x\in\mathbb{N}\ \forall y\in\mathbb{N}\ \forall z\in\mathbb{N}(z>x\Rightarrow y<z)$; d) $\exists x\in\mathbb{N}\ \forall y\in\mathbb{N}\ \forall z\in\mathbb{N}(z<x\Rightarrow y>z)$;

e) $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \exists\alpha\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}(x\in(a,a+\varepsilon)\Leftrightarrow|x-\alpha|<1)$;

f) $\exists a\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}(x\in(a,a+\varepsilon)\Leftrightarrow|x-\alpha|<1)$.

3. Vyjádřete co nejjednodušeji:

a) $\forall\varepsilon>0\ \forall y\in\mathbb{R}:|y-7|<5\Rightarrow|f(y)-15|<\varepsilon$; b) $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists\delta>1\forall y\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}:|y-x|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{1}{n}$.

4. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů:

a) Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se:„Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně a tak se zeptáte obyvatele B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal,že mezi námi je jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C? b) Dejme tomu, že A řekne: „Buď já jsem padouch nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

c) Dejme tomu, že A řekne: „Já jsem padouch, ale B ne.“ Co jsou A a B?

d) A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se někdo zeptá C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co C odpoví?

Výsledky a návody. **1.** a) $\forall m \in M\ \forall ž \in Ž : S(m, ž) \Rightarrow L_1(m, ž)$; b) $\forall ž \in Ž\ \exists m \in M : L_1(m, ž)$; c) $\forall ž \in Ž\ \forall m_1 \in M\ \forall m_2 \in M : S(m_1, ž)\ \&\ S(m_2, ž) \Rightarrow m_1 = m_2$; d) $\forall m \in M\ \forall ž_1 \in Ž\ \forall ž_2 \in Ž : S(m, ž_1)\ \&\ S(m, ž_2) \Rightarrow ž_1 = ž_2$ (NE); e) $\exists ž \in Ž\ \exists m \in M : S(m, ž)$; f) $\exists m \in M\ \exists ž \in Ž : S(m, ž)$ (ANO); g) Existuje nevěrná manželka (aspoň jedna): $\exists ž \in Ž\ \exists m_1 \in M\ \exists m_2 \in M(m_1 \neq m_2\ \&\ S(m_1, ž)\ \&\ L_2(m_2, ž))$, existují nevěrné manželky (aspoň dvě): $\exists ž_1 \in Ž\ \exists ž_2 \in Ž \exists m_1 \in M\ \exists m_2 \in M\ \exists m_3 \in M\ \exists m_4 \in M(ž_1 \neq ž_2\ \& m_1 \neq m_2\ \&\ m_3 \neq m_4\ \&\ S(m_1, ž_1)\ \&\ L_2(m_2, ž_1)\ \&\ S(m_3, ž_2)\ \&\ L_2(m_4, ž_2))$. h) Existuje svobodný muž. i) Existuje žena, která žádnému muži neopětuje lásku. j) Existuje žena, jíž žádný muž neopětuje lásku. k) Každá žena, která někoho miluje, nemiluje některého muže, který miluje ji. **2.** a) Platí, negace $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}(z > x\ \&\ y \geq z)$; b) Platí, negace $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ (z > x\ \&\ y \geq< z)$; c) Neplatí, negace $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}(z > x\ \&\ y \geq z)$; d) Platí, negace $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}(z < x\ \&\ y \leq z)$; e) Platí, negace $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}(x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| \geq 1)$; f) Platí, negace $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}(x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| \geq 1)$. **3.** a) $f(y) = 15$ pro všechna $y \in (2, 12)$; b) Funkce f je na konstantní na $\mathbb{R}$. **4.** a) B je padouch a C poctivec. b) Oba jsou poctivci. c) Oba jsou padouši. d) Odpoví ANO.

IV. Spočtěte následující limity posloupností

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$ **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}\right)$ **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ **7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$ **10.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a \geq 0)$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ **14.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ **15.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$ **16.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

- - -

Výsledky a návody. **1.** 0 **2.** 2 **3.** 2 **4.** 0 (rozšiřte vhodným výrazem) **5.** 0 **6.** Nemá limitu. **7.** 0 **8.** $\frac{1}{2}$ **9.** $-\frac{1}{2}$ **10.** $\frac{1}{3}$ **11.** $\frac{1}{4}$ **12.** 1 pro $a > 0$, 0 pro $a = 0$ (pro $a > 0$ pište $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$ a ukažte, že $\delta_n \to 0$) **13.** 1 (pište $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ a ukažtem že $\delta_n \to 0$) **14.** 1 **15.** 0 **16.** 0

V. Spočtěte limity posloupností

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n}$, $(A, B, C > 0)$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} [kx]}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ **5.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$ **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i}{n} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ***8.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$

***9.** Pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$? Totéž pro $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}})$ **12.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

13. Spočtěte v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$ a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}$.

14. Dokažte, že součin $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots$ má konečnou nenulovou hodnotu.

***15.** Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \sqrt{n+i} = 0$, pokud $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0$

Výsledky a návody. **1.** $\max\{A,B,C\}$ **2.** $\frac{x}{2}$ **3.** $+\infty$ **4.** 1 **5.** 2 **6.** 0 **7.** 2 (ukažte, že posloupnost a_n je neklesající a omezená, a tudíž má limitu, a pak odvoďte, že tato limita musí být 2) **8.** 1 (ukažte, že posloupnost lichých členů i posloupnost sudých členů jsou monotónní a omezené, a že mají tutéž limitu 1) **9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$ existuje jen pro $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx$ existuje jen pro $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ (využijte toho, že pokud $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$ existuje, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)x-\sin nx=0$, a pak ještě podobně pro $\cos nx$) **10.** 0 (vhodně rozšiřte a jmenovatele odhadněte). **11.** $\frac{2}{3}$ **12.** $\frac{1}{2}$ (vyjádřete jednoduše $\prod_{n=1}^{k}(1-\frac{1}{(n+1)^2})$ a spočtěte limitu této posloupnosti) **13.** a) 1, pokud $k>l$; -1, pokud $k<l$; 0, pokud $k=l$. b) 1, pokud $k>l$; $(-1)^{l+1}$, pokud $k<l$; $-\infty$, pokud $k=l$ je sudé; -1, pokud $k=l$ je liché. **14.** Použijte větu o limitě monotónní posloupnosti. **15.** Dokazujte matematickou indukcí v závislosti na k. Pro $k=2$ proveďte vhodné rozšíření.

VI. Spočtěte limity nebo dokažte, že neexistují

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ **3.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ **4.** $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $(m,n\in\mathbb{N})$ **6.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, $(n\in\mathbb{N})$ **7.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $(m,n\in\mathbb{N},a,b\in\mathbb{R})$ **9.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, $(m,n\in\mathbb{N})$ **10.** $\lim\limits_{x\to1}([x]-x)$
11. $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$ **12.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$ **13.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ **14.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ **15.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$
16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}$ **17.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ **18.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ **19.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$
20. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x}$ **21.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(\cos\alpha x)}{\log(\cos\beta x)}$

Výsledky a návody. **1.** 6 **2.** $-\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{3}{2}$ **4.** $\frac{112}{27}$ **5.** $\frac{1}{2}mn(n-m)$ **6.** $\frac{1}{2}n(n+1)$ **7.** $\frac{1}{n}$ **8.** $\frac{an-bm}{mn}$ **9.** $\frac{m}{n}$ **10.** Limita neexistuje (zleva -1, zprava 0). **11.** 1 **12.** -3 **13.** $\frac{1}{2}$ **14.** 1 **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **16.** 2 **17.** $\frac{\alpha}{\beta}$, pokud $\beta\neq0$. **18.** -1 **19.** $\frac{4}{3}$ **20.** $-\frac{1}{12}$ **21.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, pokud $\beta\neq0$

VII. Spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log\cos x}{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ **4.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2x}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}$ **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{\log(x^{10}+x+1)}$ **7.** $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}$ **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$
9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x^{\operatorname{tg}2x}$ **10.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$ **11.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}$ **12.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$ **14.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}\cdot x^k$ **15.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$,
16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ **17.** Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby platilo $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

Výsledky a návody. **1.** $-\frac{1}{2}$ **2.** 0 **3.** e^3 **4.** e **5.** 1 **6.** $\frac{1}{5}$ **7.** 0 **8.** $\frac{3}{2}$ **9.** $\frac{1}{e}$ **10.** limita neexistuje. **11.** $+\infty$ **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $3\log2$ **14.** 0 pro $k>1$, $\frac{1}{\pi}$ pro $k=1$, $+\infty$ pro $k<1$ liché, neexistuje pro $k<1$ sudé. **15.** 0 **16.** $\frac{1}{2}$ **17.** $a=-1,b=\frac{1}{2}$

VIII. Spočtěte limity

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$ **3.** $\lim\limits_{x\to1-}\frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}$ **4.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2(\pi\cdot2^x)}{\log\cos(\pi\cdot4^x)}$ **5.** $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos x)^x-\sqrt{1+\sin^3x}}{x^3}$ **7.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x-1}+\sqrt[3]{\cos\pi x}}{\log^2x}$ **8.** $\lim\limits_{x\to0+}\left(e^x-1\right)^{\frac{(\operatorname{tg}x)^2}{x^\alpha}}$

Výsledky a návody. **1.** 1 **2.** 1 **3.** 0 pro $\alpha<\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ pro $\alpha=\frac{1}{2}$, $+\infty$ pro $\alpha>\frac{1}{2}$ **4.** $-\frac{1}{8}$ **5.** 2 **6.** -1 **7.** $1+\frac{3}{2}\pi^2$ **8.** 1 pro $\alpha<2$, 0 pro $\alpha\geq2$

IX. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x) =$

1. $(x^2 + 51x + 119)^{87}$ **2.** $(x + 15)^3(x - 17)^{10}x^9$ **3.** $\frac{e^{x^2+1} \cdot \cos x}{(x+1)^2 \cdot \log(x^2+1)}$ **4.** $\log(x^2 + x + 1)$

5. $\sin\left(\cos\left((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}\right)\right)$ **6.** x^x **7.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **8.** $(\sin x)^{\cos x}$ **9.** $\arcsin(\sin x)$

10. $\log \arccos x$ **11.** $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$ **12.** $\operatorname{arctg} e^x - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

13. $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$ **14.** $(\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}$ **15.** $f(x) = e^{\frac{1}{\log |x|}}$

16. Spočtěte limity a) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a}$, $(a > 0)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

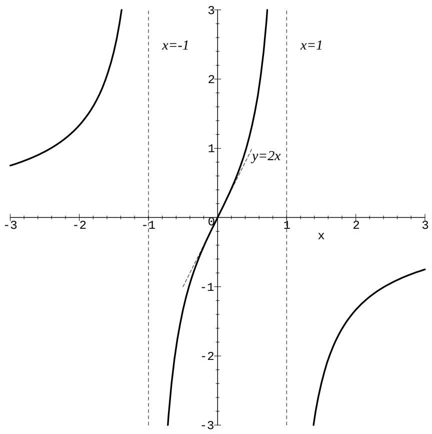
Výsledky a návody. **1.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 87(x^2+51x+119)^{86} \cdot (2x+51)$. **2.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3(x + 15)^2(x - 17)^{10}x^9 + 10(x + 15)^3(x - 17)^9x^9 + 9(x + 15)^3(x - 17)^{10}x^8$. **3.** f je definována a spojitá na $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{\left((2x+1)e^{x^2+1} \cdot \cos x - e^{x^2+1} \cdot \sin x\right) \cdot (x+1) \cdot \log(x^2+1) - e^{x^2+1} \cdot \cos x \cdot \left(2 \cdot \log(x^2+1) + \frac{2x(x+1)}{x^2+1}\right)}{(x+1)^3 \cdot \log^2(x^2+1)}$. **4.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ **5.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = -18 \cos\left(\cos\left((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}\right)\right) \cdot \sin\left((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}\right) \cdot (x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{17} \cdot (3x^2 + 34x - 56)$. **6.** f je definována a spojitá na $(0, \infty)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$, lze tedy spojitě dodefinovat na $[0, \infty)$. $f'(x) = x^x(\log x + 1)$ pro $x > 0$. Po dodefinování platí $f'_+(0) = -\infty$. **7.** f je definována a spojitá na $(0, \infty)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, nelze spojitě rozšířit. $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}+2} \cdot (\log x - 1)$ pr $x > 0$. **8.** f je definována a spojitá na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k + 1)\pi)$. $\lim\limits_{x\to 2k\pi+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to(2k+1)\pi-} f(x) = +\infty$, lze tedy spojitě rozšířit na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi)$. $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right)$ pro $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k + 1)\pi)$. Po dodefinování je $f'_+(2k\pi) = 1$. **9.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = 1$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $f'(x) = -1$ pro $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$, $f'_-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = f'_+(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$, $f'_+(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = f'_-(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ $(k \in \mathbb{Z})$. **10.** f je definována a spojitá na $\langle -1, 1)$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = -\frac{1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$, $f'_+(-1) = -\infty$. **11.** f je definována a spojitá na $\langle 0, +\infty)$. $f'(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ pro $x > 0$, $f'_+(0) = 0$. **12.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}$ pr $x \in \mathbb{R}$. **13.** f je definována a spojitá na $(1, \infty)$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 0$, lze tedy spojitě rozšířit na $\langle 1, \infty)$. $f'(x) = \frac{x \log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ pro $x > 1$, po dodefinování je $f'_+(-1) = +\infty$. **14.** f je definována a spojitá na $(0, 1\rangle$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$, lze tedy spojitě dodefinovat na $\langle 0, 1\rangle$. $f'(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{\log \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}\right)$ pro $x \in (0, 1)$, $f'_-(1) = +\infty$, po dodefinování je $f'_+(0) = -\infty$. **15.** f je definována a spojitá na $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+} = \lim\limits_{x\to -1-} f(x) = +\infty$. Funkce f lze tedy rozšířit na celé $\mathbb{R}$ tak, že bude spojitá všude kromě bodů ± 1, a navíc bude spojitá v bodě 1 zleva a v bodě -1 zprava. $f'(x) = -e^{\frac{1}{\log |x|}} \cdot \frac{1}{x \log^2 |x|}$ pro $x \neq 0, \pm 1$. Po dodefinování je $f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_-(1) = f'_+(-1) = 0$. **16.** a) $a^a(\log a + 1)$, b) e^2.

X. Příklady na průběh funkcí

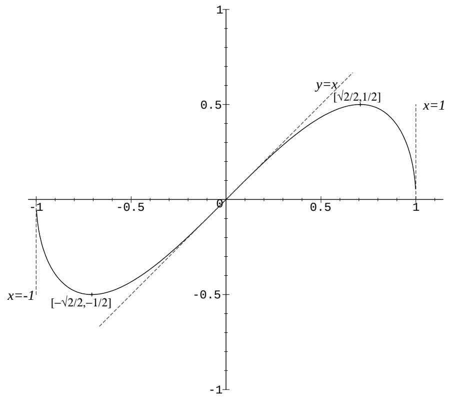
1. $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ **2.** $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ **3.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ **4.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$
5. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$ **6.** $f(x)=\frac{x^4+8}{x^3+1}$ **7.** $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$ **8.** $f(x)=\frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$
9. $f(x)=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$ **10.** $f(x)=\sin x+\cos^2 x$ **11.** $f(x)=|\sin x|+\cos 2x$
12. $f(x)=\exp(-x^2+3x-7)$ **13.** $f(x)=\arcsin(\cos^2 x)$

Výsledky a návody.

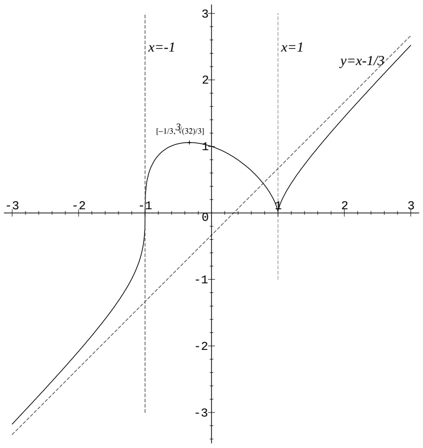
1.



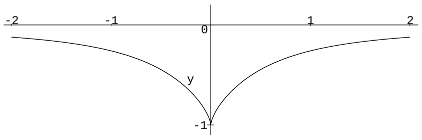
2.



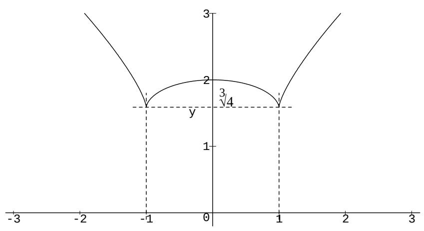
3.



5.



7.



XI. Další příklady na průběh funkcí

1. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$ **2.** $f(x)=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}$ **3.** $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$ **4.** * $f(x)=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$
5. * $f(x)=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$ **6.** * $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1}}$ **7.** * $f(x)=\arcsin(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2})$

XII. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

1. $x^m y^n$ **2.** e^{xy} **3.** $xy + yz + zx$ **4.** $\sqrt{x^2 + y^2}$ **5.** $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ **6.** $|x| \cdot |y|$ **7.** $\sqrt[3]{xy}$
8. $|y - \sin x|$ **9.** $|\sin y - \sin x|$ **10.** $\sqrt[3]{x + y^2}$ **11.** $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y} \cdot \ln(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$
12. $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}$, $f(0, 0) = 0$ **13.** $\left(\frac{x}{y}\right)^z$ **14.** $x^{\frac{y}{z}}$ **15.** x^{y^z}

Výsledky a návody. **1.** $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$ pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. **2.** $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. **3.** $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$ pro $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. **4.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pokud $(x, y) \neq (0, 0)$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ neexistují. **5.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}$, pokud $y \neq -x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$ neexistují pro $x \neq 0$. **6.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **7.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **8.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\operatorname{sgn}(y - \sin x) \cdot \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(y - \sin x)$, pokud $y \neq \sin x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \sin x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \sin x)$ neexistuje pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **9.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\cos y \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, pokud $\sin x \neq \sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. **10.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, pokud $x \neq -y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-x^2, x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(-x^2, x)$ neexistují pro $x \in \mathbb{R}$. **11.** V $(x, -x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2 + x^4 \neq 1$, pokud $x^2 + x^4 = 1$, jsou obě parciální derivace nulové. **12.** $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$; v bodě $(0, 0)$ jsou obě parciální derivace nulové. **13.** Pokud $x, y > 0$ nebo $x, y < 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \log \frac{x}{y}$. **14.** Pokud $x > 0$ a $y \neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{y}{z^2}$. **15.** Pokud $x, y > 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} \cdot \log x \cdot zy^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} \cdot \log x \cdot y^z \cdot \log y$.