I. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici

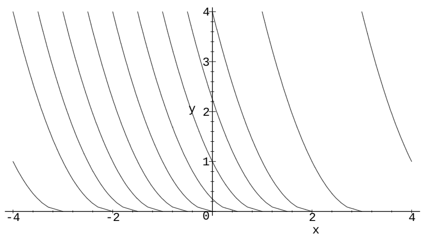
1. (a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{N}$ (c) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ **2.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \leq 0\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ **4.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ **5.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y > 17\}$
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| > x + y\}$ **7.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| = x - y\}$
8. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$ **9.** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$

Určete (a nakreslete) definiční obor a vrstevnice funkcí

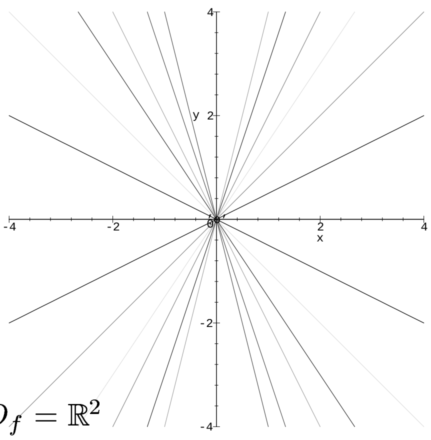
10. $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ **11.** $f(x,y) = \frac{y}{x}$ **12.** $f(x,y) = x^2 + y^2$ **13.** $f(x,y) = x^2 - y^2$
14. $f(x,y) = \sqrt{xy}$ **15.** $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **16.** $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
17. $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ **18.** $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$
19. $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ **20.** $f(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$ **21.** $f(x,y) = |x| + y$

Výsledky a návody. **1.** (a) $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $H(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená. (b) $\mathbb{N}$ je uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $H(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ (c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek je prázdný, hranice i uzávěr jsou $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. (d) Ani otevřená, ani uzavřená, vnitřek $(-\infty, 0)$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $[0, \infty)$. **2.** Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\}$, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$, hranice$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\ \&\ y \leq 0\ \&\ (x = 0 \vee y = 0)\}$. **3.** Otevřená, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **4.** Uzavřená, vnitřek $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **5.** Otevřená, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y = 17\}$, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y \leq 17\}$ **6.** Otevřená, uzávěr $\{(x,y) \mid x + y \leq 0\}$, hranice $\{(x,y) \mid x + y = 0\}$. **7.** Uzavřená, vnitřek $\{(x,y) \mid x + y > 0\}$, hranice $\{(x,y) \mid x + y = 0\}$. **8.** Uzavřená, prázdný vnitřek. **9.** Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný, hranice i uzávěr $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$.

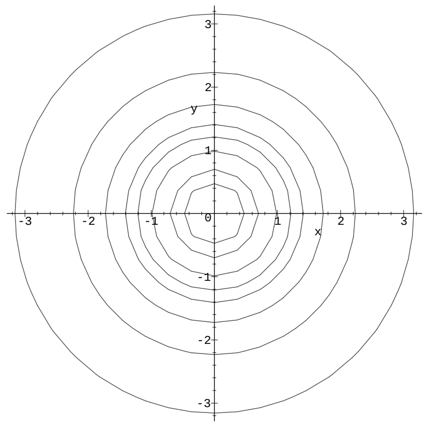
10. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$



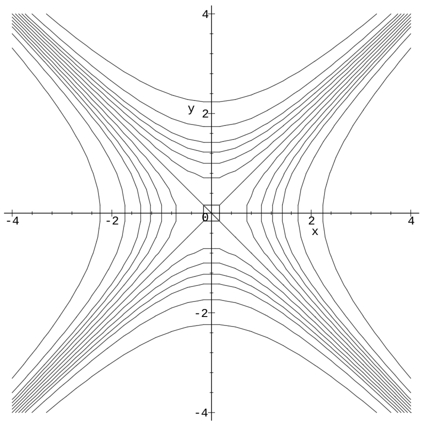
11. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$



12. $D_f = \mathbb{R}^2$

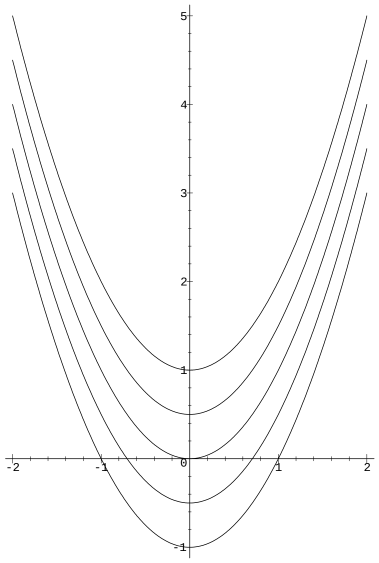


13. $D_f = \mathbb{R}^2$

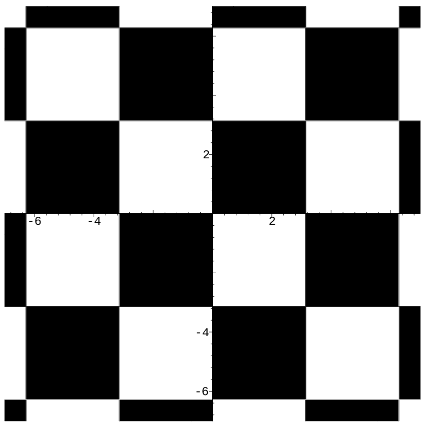


14. $D_f = \{(x,y) \mid (x \geq 0 \ \&\ y \geq 0) \vee (x \leq 0 \ \&\ y \leq 0)\}$, vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}$ pro $c > 0$ spolu s dvojicí os. **15.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **16.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **17.** $D_f = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. **18.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 1\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. **19.** $D_f = \{(x,y) \mid 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi$ pro nějaké $k = 0, 1, 2, \ldots\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. **20.** $D_f = \mathbb{R}^2$, jsou tři vrstevnice - vnitřky černých čtverců, vnitřky bílých čtverců a hraniční přímky.

Ad **18.**



Ad **20.**



II. Spojitost a limita funkcí více proměnných

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **2.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ **3.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$ **4.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ **6.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ **7.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Výsledky a návody. **1.** 2 **2.** 0 **3.** 0 **4.** Neexistuje. **5.** 1 **6.** Neexistuje. **7.** 1

III. Zkoumejte parciální derivace a totální diferenciál funkcí

1. $x^m y^n$ **2.** e^{xy} **3.** $xy + yz + zx$ **4.** $\sqrt{x^2+y^2}$ **5.** $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ **6.** $|x| \cdot |y|$ **7.** $\sqrt[3]{xy}$

8. $\sqrt[3]{x+y^2}$ **9.** $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y} \cdot \ln(x^2+y^2)$, $f(0,0) = 0$ **10.** $|y - \sin x|$ **11.** $|\sin y - \sin x|$

12. $f(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}$, $f(0,0) = 0$ **13.** $\left(\frac{x}{y}\right)^z$ **14.** $x^{\frac{y}{z}}$ **15.** x^{y^z}

Spočtěte přibližně tak, že nahradíte přírůstek vhodné funkce jejím diferenciálem

16. $\dfrac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{1.05^3}}}$ **17.** $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ **18.** $0.97^{1.05}$ **19.** $1.04^{2.02}$ **20.** $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$

21. $\log(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $Df(x,y)(h,k) = mx^{m-1}y^nh + nx^my^{n-1}k$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **2.** $Df(x,y)(h,k) = ye^{xy}h + xe^{xy}k$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **3.** $Df(x,y,z)(h,k,l) = (y+z)h + (x+z)k + (x+y)l$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. **4.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pokud $(x,y) \neq (0,0)$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistují. $Df(x,y)$ existuje všude kromě $(0,0)$. **5.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}$, pokud $y \neq -x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$ neexistují pro $x \neq 0$. $Df(x,y)$ existuje pro $y \neq -x$. ($Df(0,0)$ neexistuje.) **6.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. $Df(x,y)$ existuje, pokud $x \neq 0$ a $y \neq 0$, a navíc v bodě $(0,0)$. **7.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. $Df(x,y)$ existuje, pokud $x \neq 0$ a $y \neq 0$. ($Df(0,0)$ neexistuje.) **8.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, pokud $x \neq -y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-x^2,x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(-x^2,x)$ neexistují pro $x \in \mathbb{R}$. **9.** V $(x,-x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2+x^4 \neq 1$, pokud $x^2+x^4 = 1$, jsou obě parciální derivace nulové. $Df(x,y)$ existuje pro $y \neq -x^2$ a dále v bodech $(x,-x^2)$, pokud $x^2+x^4 = 1$. **10.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sgn}(y-\sin x)\cdot\cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn}(y-\sin x)$, pokud $y \neq \sin x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\sin x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi,(-1)^k) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\sin x)$ neexistuje pro $x \neq k\pi$. $Df(x,y)$ existuje, pokud $y \neq \sin x$. **11.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos y \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, pokud $\sin x \neq \sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi) = 0$ ($k-l$ sudé). V ostatních bodech parciální derivace neexistují. $Df(x,y)$ existuje, pokud $\sin y \neq \sin x$, a ještě v bodech $(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi)$, $k,l \in \mathbb{Z}$, $k-l$ sudé. **12.** $Df(x,y)(h,k) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}}{(x^2+xy+y^2)^2}\cdot((2x+y)h + (x+2y)k)$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $Df(0,0) = 0$. **13.** $Df(x,y,z)(h,k,l) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \left(\frac{z}{x}h - \frac{z}{y}k + l\log\frac{x}{y}\right)$, pokud $xy > 0$. **14.** $Df(x,y,z)(h,k,l) = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\left(\frac{y}{x}h + k\log x - l\frac{y}{z}\log x\right)$, pokud $x > 0$ a $z \neq 0$. **15.** $Df(x,y,z)(h,k,l) = x^{y^z}\cdot y^z \cdot \left(\frac{h}{x} + k\frac{z}{y}\log x + l\log x\log y\right)$ pro $x > 0$ a $y > 0$. **16.** 1.0542 **17.** 2.95 **18.** 0.97 **19.** 1.08 **20.** 108.972 **21.** 0.005

IV. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH – DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

1. Vyjádřete parciální derivace prvního a druhého řádu funkcí
$g(x,y) =$ (a) $f(x^2+y^2)$, (b) $f(x,xy)$, (c) $f(x,\frac{x}{y})$, (d) $f(x+y,x-y)$, (e) $f(ax,by)$.

2. Nechť $f(s,t)$ je kladná funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce g pomocí hodnot a derivací funkce f, pokud je (a) $g(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}$, b) $g(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$.

3. Nechť f má diferenciál v bodě $(1,1)$ a nechť $f(1,1) = \partial_1 f(1,1) = 1$, $\partial_2 f'(1,1) = 2$. Položme $g(t,u) = f(f(u,t), f(t,u))$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial t}(1,1)$.

4. Nechť $f(r,\varphi) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, funkce g má diferenciál v bodě $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial r}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}) = 4$. Spočtěte $\partial_1 g(1,1)$, $\partial_2 g(1,1)$.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** (a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(x^2+y^2)\cdot 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x^2+y^2)\cdot 2y$, pokud existuje $f'(x^2+y^2)$. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = f''(x^2+y^2)\cdot 4x^2+2f'(x^2+y^2)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = f''(x^2+y^2)\cdot 4y^2+2f'(x^2+y^2)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = f''(x^2+y^2)\cdot 4xy$, pokud existuje $f''(x^2+y^2)$. V příkladech (b)–(e) předpokládejme existenci totálního diferenciálu funkce f v příslušných bodech. (b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \partial_1 f(x,xy) + y\partial_2 f(x,xy)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\partial_2 f(x,xy)$, (c) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \partial_1 f(x,\frac{x}{y}) + \frac{1}{y}\partial_2 f(x,\frac{x}{y})$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}\partial_2 f(x,\frac{x}{y})$, (d) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \partial_1 f(x+y,x-y) + \partial_2 f(x+y,x-y)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \partial_1 f(x+y,x-y) - \partial_2 f(x+y,x-y)$, (e) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = a\partial_1 f(ax,by)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = b\partial_2 f(ax,by)$, zde stačí existence $\partial_1 f$ a $\partial_2 f$. **2.** (a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\cdot(\log f(x,y)+1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial s}(x,y)\cdot(\log f(x,y)+1)$, (b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial s}(y,x)\log f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\cdot\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial t}(y,x)\log f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial s}(x,y)\cdot\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right)$ **3.** 4 **4.** $\partial_1 g = -2$, $\partial_2 g = 2$.

V. V NÁSLEDUJÍCÍCH ÚLOHÁCH ZJISTĚTE sup A inf FUNKCE NA MNOŽINĚ M A VYŠETŘETE, ZDA TĚCHTO HODNOT FUNCE NA M NABÝVÁ.

1. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z; M = [-1;1]\times[-1;1]\times[-1;1]$;
2. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a>0, b>0; M = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}$;
3. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z; M = \mathbb{R}^3$; **4.** $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}; M = \mathbb{R}^2$;
5. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x|+|y| \le 1\}$
6. $f(x,y) = (x+y)\,e^{-2x-3y}; M = \{(x,y); x>0, y>0\}$
7. $f(x,y) = \left(x^2+5y^2\right)e^{-\left(3x^2+y^2\right)}; M = \mathbb{R}^2$;
8. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2; M = \{(x,y,z); \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\}; a>b>c>0.$
9. $z(x,y) = x^2+y^2$, $M = \{(x,y), x^2+4y^2 = 1\}$
10. $z(x,y) = x^2+12xy+2y^2$; $M = \{(x,y), 4x^2+y^2 = 1\}$
11. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

- -

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** max 5 v bodech $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, min -1 v bodě $(0,0,-1)$ **2.** max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ **3.** sup $+\infty$, min -14 v bodě $(-1,-2,3)$ **4.** min 0 v $(0,0)$, max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2+y^2=1$. **5.** max 1 v bodech $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$, min 0 v $(0,0)$ **6.** sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se **7.** max $\frac{5}{e}$ v bodech $(0,\pm1)$, min 0 v bodě $(0,0)$ **8.** max a^2 v bodech $(\pm a,0,0)$, min 0 v $(0,0,0)$ **9.** max 1 v bodech $(\pm1,0)$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $(0,\pm\frac{1}{2})$ **10.** max $\frac{17}{4}$ v bodech $(\frac{3}{10},\frac{4}{5})$, $(-\frac{3}{10},-\frac{4}{5})$, min -2 v bodech $(\frac{2}{5},-\frac{3}{5})$, $(-\frac{2}{5},\frac{3}{5})$ **11.** dno $4m\times4m$, výška $2m$

VI. V NÁSLEDUJÍCÍCH ÚLOHÁCH ZJISTĚTE sup inf FUNKCE f NA MNOŽINĚ M A VYŠETŘETE, ZDA TĚCHTO HODNOT f NA M NABÝVÁ.

1. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$,
a) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$
2. $f(x,y,z) = xyz$,
a) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 0\}$
3. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{(x,y,z); x+y+z = \frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0\}$
4. $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $M = \{(x,y,z); x+2y+3z = a, x>0, y>0\}$, kde $a>0$.
5. $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^p + \dots + x_n^p$; $M = \{(x_1,\dots,x_n); x_1+\dots+x_n = a,\ x_1>0, \dots, x_n>0\}$; kde $a>0, p>0$. **6.** $f(x,y) = x+y$, $M = \{(x,y); x^3+y^3-2xy = 0, x\ge0, y\ge0\}$
7. $f(x,y,z) = 10z + x - y$, $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 \le 1, y+x \ge 0\}$ **8.** $f(x,y) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $M = \{(x,y), \frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2} = 1\}$ **9.** $f(x,y) = y$, $M = \{(x,y), \left(x^2+y^2\right)^2 = Kxy\}$, kde $K>0$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) max 3 v $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, min -3 v $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}})$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}})$; **2.** a) max $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$; b) max $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$; **3.** max $\frac{1}{8}$ v $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, inf 0, nenabývá se **4.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6})$, inf $-\infty$ **5.** pro $p = 1$ je f na M konstantní; pro $p > 1$ je sup a^p, nenabývá se, min $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n})$; pro $p \in (0,1)$ je inf a^p, nenabývá se, max $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n})$; **6.** max 2 v $(1,1)$, min 0 v $(0,0)$ **7.** max $\sqrt{102}$ v $(\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}$; min $-\sqrt{102}$ v $(-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}}$; **8.** max $\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{5})$; min $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -2\sqrt{5})$; **9.** max $\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15}, \frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}})$; min $-\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(-\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15}, -\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}})$.

VIII. Implicitní funkce

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2, 0]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$;
b) napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.
2. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$;
b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;
c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.
3. Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že
a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;
b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.
4. Dokažte, že množina bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}$, které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

je v okolí bodu $(1, 1, 1)$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Určete totální diferenciál v bodě (1,1) a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** tečna: $y = 0$ **2.** tečná rovina $z = \frac{7}{5}(y + 2) + 1$ **3.** Spočtěte $f'(0)$ a ověřte, že $f'(0) > 0$. **4.** tečná rovina $z = -(x - 1) - (y - 1) + 1$

IX. Lineární algebra

1. $\begin{aligned} x+2y-z&= 1\\ 2x+3y\quad &= 1\\ -y+z&= 1 \end{aligned}$ **2.** $\begin{aligned} x\quad -z&= -2\\ -x+y\quad &= 1\\ 2x+y+3z&= 13 \end{aligned}$ **3.** $\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+x_4&= -5\\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4&= 0\\ 7x_1-x_2+4x_3-3x_4&= 15\\ x_1+x_2-2x_3-x_4&= -3 \end{aligned}$ **4.** $\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4&= 2\\ x_1\qquad -x_4&= -1\\ x_2+x_3\quad &= 0\\ x_1+2x_2\quad &= -1 \end{aligned}$

Příklady 1 a 2 řešte pomocí výpočtu inverzní matice (existuje-li), v příkladech 3 a 4 použijte Gaussovu eliminaci a navíc spočtěte determinant soustavy.

5. Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ a & 2 & 1 & 2 & a\\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3\\ 1 & 2 & a & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

6. Spočtěte následující determinanty:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 6 & 7 & 5\\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327\\ 1014 & 543 & 443\\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

7. Najděte řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3+3x_4&= 5\\ 6x_1+15x_2+12x_3+25x_4&= 42\\ 2x_1+5x_2+4x_3+8x_4&= 14\\ x_1-x_2+2x_3-4x_4&= -7 \end{aligned}$$

Výsledky a návody. **1.** inverzní matice: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, řešení $x=5$, $y=-3$, $z=-2$ **2.** inverzní matice: $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 5/6 & 1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$, řešení $x=1$, $y=2$, $z=3$ **3.** determinant -60, řešení $(1,0,2,0)$ **4.** determinat 1, řešení $(5,-3,3,6)$ **5.** hodnost 4 pro $a \neq 1$, pro $a=1$ hodnost 3 **6.** 0, 29400000 **7.** nekonečně mnoho řešení tvaru $(-3-2t, 4, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$

==

X. Nalezněte primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3 + 2x + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sin^7 x \cos x\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **10.** $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \log x\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a, b \in \mathbb{R}$
16. $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

– –

Výsledky a návody. **1.** $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16\log|x| + C$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **2.** $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x + C$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3.** $\frac{1}{8}\sin^8 x + C$ na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ na $\mathbb{R}$ **5.** $-\log|\cos x| + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **6.** $\log|\sin x| + C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **7.** $\operatorname{tg} x - x + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **8.** $-\operatorname{cotg} x - x + C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **9.** $\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **10.** $-\log|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})| + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **11.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ na $\mathbb{R}$ **12.** $(x-1)e^x + C$ na $\mathbb{R}$ **13.** $x\log x - x + C$ na $(0,\infty)$ **14.** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **15.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx + b\sin bx) + C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2+b^2 \neq 0$; $x + C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a=b=0$ **16.** $\frac{1}{4}|x|x^3 + C$ na $\mathbb{R}$ **17.** $F(x) + C$ na $\mathbb{R}$, kde

$$F(x) = \begin{cases} 2\log(1+x^2) + \pi(x_2 - x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x \in [-\infty, -x_2] \\ -\pi(x+x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x \in [-x_2, -x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x \in [-x_1, x_1] \\ \pi(x-x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x \in [x_1, x_2] \\ 2\log(1+x^2) + \pi(x_2 - x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x \in [x_2, \infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2 &= \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{aligned}$$

==

XI. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \frac{x^{17}-5}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{\exp x}{\exp x+1}\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\cdot\sin^3 x}$ **8.** $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **10.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$
11. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **12.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ **13.** $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$
15. $\int \log^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.*** V závislosti na parametru $\alpha > 0$ vypočtěte: (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos x}$ (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha\cos x)^2}$
17.* Spočtěte: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$ (pracné) **18.*** Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$?

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $\log(x^2+x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **2.** $\left(\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}\right)-4\log|x-1|$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **3.** $\left(\sum_1^{8}\frac{1}{2k}x^{2k}\right)-2\log|x-1|+3\log|x+1|$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **4.** $x+\frac{1}{6}\log|x|-\frac{9}{2}\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,2)$ nebo $x\in(2,3)$ nebo $x\in(3,+\infty)$ **5.** $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **6.** $\log(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **7.** $\log|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2 x}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ **8.** $\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right|+\sin 2x\right)$, $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pro $x=\frac{1}{2}\pi+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ je funkce dodefinována 0 **9.** $6\left(\frac{1}{9}u^{(3/2)}-\frac{1}{8}u^{(4/3)}+\frac{1}{7}u^{(7/6)}-\frac{1}{6}u+\frac{1}{5}u^{(5/6)}-\frac{1}{4}u^{(2/3)}\right)$, kde $u=x+1$, $x\in(-1,+\infty)$ **10.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-1,1)$ **11.** $\log\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$, kde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **12.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ **13.** $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x\in(-\infty,1-\sqrt{2})$ nebo $x\in(1+\sqrt{2},+\infty)$ **14.** $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt{2}}$, kde $t=\sqrt{x^2+2x+4}-x$, $x\in\mathbb{R}$ **15.** $x\log^2 x-2x\log x+2x$, $x\in(0,+\infty)$ **16.** (a) Pro $0<\alpha<1$: $F(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$, $x\neq(2n+1)\pi$, $F((2n+1)\pi)=\lim\limits_{x\to(2n+1)\pi}F(x)$ Pro $\alpha>1$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right|$, $x\in(-\arccos(-\frac{1}{\alpha}),\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+2k\pi$ nebo $x\in(\arccos(-\frac{1}{\alpha}),2\pi-\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+2k\pi$, přičemž v bodě $(2k+1)\pi$ je funkce F vždy dodefinována 0 Pro $\alpha=1$: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. (b) Pro $0<\alpha<1$: $G(x)=\frac{1}{1-\alpha^2}\left(F(x)-\frac{\alpha\sin x}{1+\alpha\cos x}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Pro $\alpha=1$: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Pro $\alpha>1$: $G(x)=-(\alpha^2-1)^{-\frac{3}{2}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right|-\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha-1)^2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right)$, $x\in(-\arccos(-\frac{1}{\alpha}),\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+2k\pi$, nebo $x\in(\arccos(-\frac{1}{\alpha}),2\pi-\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+2k\pi$ **17.** $\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3})+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2-\sqrt{3}x+1)+\frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2+\sqrt{3}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **18.** $a+2b+3c=0$